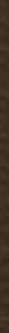
ТЕОРИЯ РАДИО- ТЕХНИ- ЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ



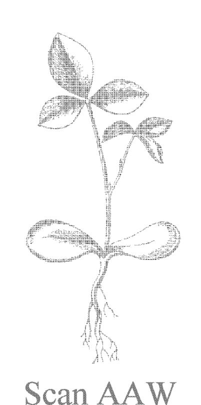


Н. В. ЗЕРНОВ
В. Г. КАРПОВ

ТЕОРИЯ РАДИО- ТЕХНИ- ЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Н. В. ЗЕРНОВ и В. Г. КАРПОВ

ТЕОРИЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ





ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЭНЕРГИЯ»
МОСКВА 1965 ЛЕНИНГРАД

УДК 621.372.061.621.396
З 58

Книга содержит систематическое изложение теории электрических цепей, применяемых в радиотехнике. Рассматриваются линейные и нелинейные радиотехнические цепи и методы их анализа. Дается характеристика сигналов и их спектральный состав.

На основе общей теории цепей изучаются преобразования сигналов в линейных, нелинейных и параметрических цепях. Излагается также теория автоколебательных цепей.

Книга предназначена для студентов радиотехнических вузов, а также для инженеров, работающих в области радиоэлектроники.

Зернов Николай Викторович, Карпов Вениамин Григорьевич

ТЕОРИЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

М. — Л., издательство «Энергия», 1965, 892 стр. с рис.

Сводный тематический план по радиоэлектронике и связи 1965 г. № 3

Научный редактор *Д. М. Казарновский.* Редактор *Л. С. Павлова*
Технический редактор *Е. М. Соболева.* Корректоры *Р. И. Геллер, Л. А. Липатова*

Сдано в производство 10/X 1964 г. Подписано к печати 27/II 1965 г. М 20350. Печ. л. 55,75.
Уч.-изд л. 50,8. Бум. л. 27,88. Формат 60×90[1]/16. Тираж 18 000 экз. Заказ № 1289.
Цена 2 р. 69 к.

Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького Главполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров СССР по печати, Гатчинская, 26.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В создании материально-технической базы коммунизма большая роль принадлежит радиоэлектронике.

Современные радиоэлектронные методы позволяют решать многообразные задачи, связанные с передачей информации на расстояние. Электро- и радиотехнические методы все шире применяются во всех областях науки и техники. Поэтому подготовка квалифицированных радиоспециалистов является весьма важной народнохозяйственной задачей.

Одно из центральных мест в системе подготовки радиоинженеров занимает изучение теории электрических цепей. Обычно в практике радиотехнических факультетов вузов теорию цепей принято было разделять на два курса: «Теоретические основы электротехники» (ТОЭ) и «Теоретические основы радиотехники» (ТОР).

Представляется, однако, значительно более целесообразным иметь единый курс теории электрических цепей. Это дает возможность устранить ненужные повторения, применять единую методику изложения разделов курса и, что особенно важно, целеустремленно изучать именно те вопросы теории, которые играют наиболее существенную роль в современной радиоэлектронике.

Теория цепей вместе с курсами электродинамики, электровакуумных и полупроводниковых приборов, а также теории информации образует комплекс дисциплин, составляющих теоретические основы радиотехники. При этом необходимость в курсе ТОЭ вообще отпадает.

Настоящая книга преследует цель систематического изложения теории радиотехнических цепей, т. е. тех электрических цепей, которые находят применение в радиотехнике. Она должна служить учебным пособием по курсу теории цепей, построенному в соответствии с изложенными выше принципами. Предполагается, что читатель знаком с физикой и высшей математикой в объеме соответствующих курсов радиотехнических вузов, а также (при чтении последних глав книги) с курсом электровакуумных приборов.

Ввиду того, что теория цепей является первой из специальных дисциплин, изучаемых студентами радиотехнических вузов, книга открывается главой, дающей читателю основные сведения о радиотехнике и радиотехнических цепях.

Излагаемая в последующих (вторая — одиннадцатая) главах общая теория цепей служит базой для изучения преобразований сигналов в линейных и нелинейных радиотехнических цепях (главы двенадцатая — четырнадцатая), а также для усвоения теории автоколебательных и параметрических цепей (главы пятнадцатая — шестнадцатая).

В основу содержания книги положены лекции, читавшиеся нами в течение многих лет по курсам теоретических основ радиотехники и теории радиотехнических цепей. При написании книги использован также богатый методический опыт советских ученых, отраженный в лучших изданных учебниках и учебных пособиях, особенно в работах А. А. Харкевича, И. С. Гоноровского, Г. В. Зевеке и П. А. Ионкина, Г. И. Атабекова и др.

Некоторые темы и отдельные абзацы, посвященные более углубленному рассмотрению вопросов, набраны мелким шрифтом и могут быть опущены при чтении книги без ущерба для систематичности изложения курса.

Главы первая — пятая, десятая, четырнадцатая и шестнадцатая написаны В. Г. Карповым; главы шестая — девятая, одиннадцатая, двенадцатая и тринадцатая — Н. В. Зерновым; глава пятнадцатая написана совместно.

В процессе подготовки рукописи многие части ее подвергались дискуссии, в которой приняли активное участие наши товарищи по кафедре: Е. К. Аухимович, В. С. Стригин, В. П. Ципер, а также Ф. А. Пигулевский и С. Я. Шац.

Рецензирование рукописи было проведено Н. Н. Крыловым, а ее редактирование — Д. М. Казарновским.

Большинство сделанных замечаний учтено нами в процессе работы над книгой.

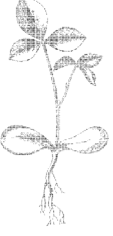
Значительную помощь в оформлении рукописи и в изготовлении оригиналов рисунков оказала Т. И. Левченко.

Всем названным товарищам мы выражаем искреннюю благодарность.

Пожелания и замечания к книге просьба направлять по адресу: Ленинград, Д-41, Марсово поле, д. 1, Ленинградское отделение издательства «Энергия».

Авторы

ОГЛАВЛЕНИЕ



Scan AAW

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О РАДИОТЕХНИКЕ И РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

1-1. Главные задачи электротехники и радиотехники

Электротехника и радиотехника являются науками, изучающими физические процессы и технические методы использования энергии электромагнитного поля для практических целей.

Электромагнитное поле представляет собой один из видов материи. Оно характеризуется связанными между собой электрическими и магнитными явлениями, которые следует рассматривать как две стороны единого процесса.

Радиотехника, возникшая и первоначально развивавшаяся как часть электротехники, имеет с ней много общих черт, что дает основание для изучения в этой книге как электрических цепей, применяемых и в электротехнике, и в радиотехнике, так и тех цепей, которые предназначены для решения специфических задач радиотехники.

Однако назначение современной радиоаппаратуры и физические процессы, положенные в ее основу, во многом отличаются от целей и принципов действия электротехнических устройств.

Главной задачей электротехники является передача и использование электромагнитного поля для приведения в действие мощных машин, механизмов, источников света, тепла и для других энергетических преобразований.

Основная задача современной радиотехники заключается в использовании энергии электромагнитного поля для передачи на расстояние различного рода информации, т. е. сообщений о тех или иных процессах, фактах, событиях и т. п.

Аналогичные цели преследует и электропроводная связь, однако, в отличие от нее, радиотехника осуществляет передачу информации без посредства проводов между отправителем и получателем сообщений. С этой целью радиотехника использует свободно распространяющееся в пространстве электромагнитное поле, называемое полем излучения.[1]

[1] Слово «радиотехника» происходит от radio — луч.

Рассмотрим несколько подробнее основные задачи, являющиеся общими для электротехники и радиотехники, а затем остановимся на тех конкретных особенностях, которые отличают их друг от друга.

Из сказанного выше следует, что как в электротехнике, так и в радиотехнике должны изучаться методы передачи электромагнитного поля из одной точки пространства в другую и способы последующего преобразования энергии поля в какой-либо иной вид энергии (механическую, акустическую, тепловую и т. п.).

Обычно говорят о передаче энергии из одного пункта в другой. Однако эти слова следует понимать условно; в действительности речь идет о перемещении в пространстве определенного вида материи, являющейся носителем энергии. В самом деле, энергия наряду с массой является неотъемлемым свойством материи, мерой ее движения. Нет материи, не обладающей массой, так же как не может быть энергии, не связанной с тем или иным материальным объектом. В электротехнике и радиотехнике таким видом материи, несущим электромагнитную энергию, и является электромагнитное поле.

Итак, общими для электротехники и радиотехники являются три основные научно-технические проблемы.

1. Генерирование электромагнитного поля (условно пользуются термином «генерирование электромагнитной энергии») посредством устройств, называемых *генераторами*, или *передающими устройствами*.

2. Передача электромагнитного поля («передача энергии») от генератора к потребителю через разделяющую их среду, которая может быть названа *линией передачи*.

3. Использование отправленного передающим устройством электромагнитного поля и несомой им энергии в территориально отдаленном пункте для тех или иных практических целей при помощи специального *приемного устройства*.

В *электротехнике* электромагнитное поле передается из одной точки пространства в другую вдоль проводов, соединяющих эти точки. Благодаря наличию проводов удается осуществить высокую степень концентрации электромагнитного поля и несомой им энергии в пространстве диэлектрика, окружающего провода. Поэтому приемного пункта достигает почти вся энергия, поступающая на вход линии, соединяющей генератор с потребителем. Лишь относительно небольшая часть ее расходуется (бесполезно теряется) в соединительной линии. Эти замечательные свойства переноса электромагнитного поля вдоль проводов позволяют осуществить в электротехнических системах эффективную передачу на значительные расстояния мощных электромагнитных полей и тем самым использовать их энергию для приведения в действие мощных машин, приборов, источников света, тепла и т. п.

Радиотехника позволяет решить проблему передачи энергии электромагнитного поля без помощи соединительных про-

водов. Излучаемое электромагнитное поле, распространяясь в свободном пространстве, рассеивается в значительном объеме и только небольшая часть энергии поля достигает места приема. Поэтому переданная без проводов энергия не может быть непосредственно использована для приведения в действие сколько-нибудь мощных механизмов. Она служит для передачи с и г н а л о в, несущих ту или иную информацию. Характер и форма сигналов соответствует передаваемому сообщению; их источником является отправитель информации. Так, например, речевые сигналы производятся голосовыми связками говорящего человека.

Первичные сигналы, несущие передаваемое сообщение, преобразуются в электрические (вторичные) сигналы, т. е. в электрические колебания, изменяющиеся во времени по тому же закону, что и первичные сигналы.

В радиотехнике сигналы того или иного назначения (телеграфные, телефонные, телевизионные и т. п.) передаются от отправителя к получателю без проводов. Главная цель, которая здесь преследуется, состоит в том, чтобы принятые сигналы были по возможности совершенно подобны отправленным (неискаженная передача) и чтобы действие неизбежных внешних помех было минимальным. Энергетические соображения при этом отодвигаются на второй план. Даже ничтожно малая энергия принятого сигнала оказывается достаточной для приведения в действие очень чувствительных приборов современного радиоприемного устройства. В нем осуществляется обратное преобразование электрических сигналов в исходные. Так, при приеме речевых сигналов телефон на выходе приемника преобразует электрические колебания в звуковые, которые воспринимаются ухом человека.

В электротехнике и радиотехнике широко используются периодические гармонические процессы, при которых величина напряженности поля (напряжения, тока и т. д.) повторяется через один и тот же промежуток времени — п е р и о д T (см. главу третью).

Величина, обратная периоду,

$$f = \frac{1}{T} \tag{1-1}$$

называется ч а с т о т о й и измеряется в герцах (циклах в секунду).

В некоторых случаях удобно пользоваться более крупными единицами:

1 килогерц (*кгц*) = 10^3 *гц*; 1 мегагерц (*Мгц*) = 10^3 *кгц*;
1 гигагерц (*Ггц*) = 10^3 *Мгц*; 1 терагерц (*Тгц*) = 10^3 *Ггц*.

Электромагнитное поле, распространяющееся в пространстве с некоторой скоростью v, называют э л е к т р о м а г н и т н о й в о л н о й. За период T электромагнитная волна распространяется на расстояние длины волны

$$\lambda = vT = \frac{v}{f}. \tag{1-2}$$

Для вакуума и воздуха скорость $v = c = 3 \cdot 10^8$ *м/сек* и длина волны

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{f} \ [м], \qquad (1\text{-}3)$$

где f — в герцах.

В ряде случаев оказывается удобным количественно характеризовать периодичность процесса не частотой, а длиной волны. Вместо того, чтобы говорить о частоте колебаний f, говорят об их длине волны в вакууме λ, имея в виду, что переход от одной величины к другой может быть произведен при помощи формулы (1-3).

Электромагнитные волны, применяемые в электрорадиотехнике, имеют ту же физическую природу, что и световые волны. Известно, что для эффективного излучения световых волн необходимо, чтобы размеры излучателя превышали длину волны колебаний или были соизмеримы с ней. Также и в радиотехнике — эффективное излучение электромагнитного поля в пространство с целью последующего его распространения без проводов возможно лишь в том случае, если размеры излучающей системы, называемой антенной, соизмеримы с длиной волны электрических колебаний. Ввиду того, что практически осуществимые размеры антенных систем ограничены конструктивными (габаритными) соображениями, радиотехника принуждена в большинстве случаев использовать достаточно короткие электромагнитные волны или, как это следует из (1-3), достаточно высокие частоты колебаний.

Электромагнитные волны, используемые для передачи информации радиотехническими методами, называются радиоволнами.

Наиболее низкими частотами, которые находят применение в радиотехнике для беспроводной передачи сигналов, являются частоты порядка 5—10 *кгц*. Им соответствуют волны длиной 60 000—30 000 *м*.

С точки зрения эффективности излучения радиоволн желательно применять возможно более высокие частоты. Однако при выборе и оценке величины радиочастот необходимо учитывать некоторые специфические особенности, свойственные тем или иным частотам. Важнейшими из них являются условия распространения радиоволн при их движении вдоль (или внутри) земли и в пространстве, ее окружающем, а также методы генерирования и использования колебаний различных частот.

Современная радиотехника имеет дело с чрезвычайно широким диапазоном частот, которые можно классифицировать согласно табл. 1-1.

Приведенную в таблице классификацию радиочастот и соответствующих им волн нельзя считать обязательной и твердо установившейся. Для развития радиотехники характерно освоение все новых диапазонов. В частности, включение в таблицу радиоволн

колебаний инфракрасного и светового диапазонов стало возможным благодаря успехам, достигнутым в последние годы электроникой и радиотехникой.

Таблица 1-1

Классификация радиочастот (радиоволн)

Наименование волн	Длина волны	Частота
Сверхдлинные (СДВ)	$>$ 10 000 *м*	$<$ 30 *кгц*
Длинные (ДВ)	10 000—1000 »	30—300 »
Средние (СВ)	1000—100 »	300—3000 »
Короткие (КВ)	100—10 »	3—30 *Мгц*
Ультракороткие (УКВ)	$<$ 10 »	$>$ 30 »
метровые	10—1 »	30—300 »
дециметровые	10—1 *дм*	300—3000 »
сантиметровые	10—1 *см*	3—30 *Ггц*
миллиметровые	10—1 *мм*	30—300 »
субмиллиметровые	1—0,4 »	300—750 »
инфракрасные	0,4 *мм* — 0,76 *мк*	0,75—395 *Тгц*
световые	0,76 *мк* — 0,4 »	395—750 »

Примечание. Частоты, соответствующие длинным и средним волнам, иногда называют умеренно высокими, а частоты, соответствующие ультракоротким волнам — сверхвысокими (СВЧ).

Если для осуществления эффективного излучения радиоволн необходимы очень высокие частоты, то для решения многих других радиотехнических задач требуются как постоянные токи ($f = 0$), так и токи низких частот. Таким образом, для радиотехники характерно использование самых различных колебаний, имеющих частоты, лежащие в пределах от $f = 0$ до величин, превышающих миллиарды герц.

Естественно, что электротехника, имеющая дело с передачей энергии вдоль проводов, свободна от высказанных выше требований в отношении частоты колебаний. Наряду с постоянными токами чаще всего здесь находят применение колебания стандартной частоты 50 *гц* (в США — 60 *гц*). Наибольшие частоты, с которыми мы встречаемся в электротехнике, не превышают немногих сотен или тысяч герц.

Столь большое количественное различие в частотах, используемых в электротехнике и радиотехнике, приводит к тому, что технические приемы, которые с успехом применяются в электротехнических системах, оказываются совершенно непригодными в радиотехнике. Более того, многие физические представления, основанные на некоторых допущениях и удовлетворительно характеризующие явления при низких частотах, становятся несправедливыми при переходе к высоким частотам. Количественные изменения приводят к необходимости качественного изме-

нения ряда физических представлений и методов осуществления технических устройств. Эти отличия заставляют говорить о радиотехнике как о большой самостоятельной отрасли науки.

Однако в самое последнее время в развитии радиотехники наметились тенденции, которые, возможно, приведут к некоторому уменьшению отмеченных выше различий между электротехникой и радиотехникой. Так, проводятся опыты применения для подземной и подводной радиосвязи весьма низких частот, которые уже мало отличаются от используемых в электротехнике. С другой стороны, создание генераторов, излучающих узкий пучок световых лучей (так называемых л а з е р о в), открывает новые пути для построения систем беспроводной передачи не только сигналов, несущих информацию, но и значительной энергии при высоком коэффициенте полезного действия.

Роль электротехники и радиотехники в современной жизни не ограничивается решением задач передачи электромагнитной энергии на расстояние. Электротехнические и в особенности радиотехнические методы находят все более широкое применение в современной науке, технике и промышленности. Успехи радиотехники привели к возникновению такой широкой науки, как р а д и о э л е к т р о н и к а, которая развивает методы радиотехники и электроники (науки об электронных приборах и их применениях) для решения многих разнообразных задач, возникающих в самых различных отраслях науки и техники. Наконец, радиотехника положила начало развитию некоторых новых наук, в числе которых может быть названа р а д и о а с т р о н о м и я, чрезвычайно расширившая возможности познания и изучения вселенной, и р а д и о с п е к т р о с к о п и я, играющая весьма большую роль в изучении строения атома в современной физике.

1-2. Электромагнитное поле, заряды, токи

В природе наблюдаются два вида материи, проявляющей себя в электрических и магнитных процессах: а) электромагнитное поле и б) элементарные частицы электричества, образующие э л е к т р и ч е с к и е з а р я д ы. Численно заряды определяются количеством электричества q, которое измеряется в к у л о н а х.

Оба эти вида материи находятся в диалектическом единстве. С зарядами органически связано э л е к т р и ч е с к о е поле, т. е. электрическая составляющая электромагнитного поля. Если же заряды находятся в движении, то с ними оказывается связанным и м а г н и т н о е поле, т. е. магнитная составляющая электромагнитного поля.

Рассмотрим некоторые основные закономерности, управляющие явлениями в электромагнитном поле.

а) Заряды и электрическое поле

Пусть в диэлектрике, имеющем диэлектрическую проницаемость ε, помещен заряд q (рис. 1-1). С ним, как отмечалось выше, связано электрическое поле, которое характеризуют напряженностью электрического поля E. Последняя определяется как сила, действующая на единицу положительного электричества, и измеряется в вольтах на метр (*в/м*).

Графически электрическое поле иллюстрируют силовыми линиями, густота которых пропорциональна интенсивности поля, а направление совпадает с направлением вектора $\bar{E}$.

Окружим заряд q замкнутой поверхностью s произвольной формы и рассчитаем поток вектора электрической индукции $\bar{D} = \varepsilon\bar{E}$ через всю эту поверхность:

$$\oint \bar{D}\,\overline{ds} = \varepsilon \oint \bar{E}\,\overline{ds}.$$

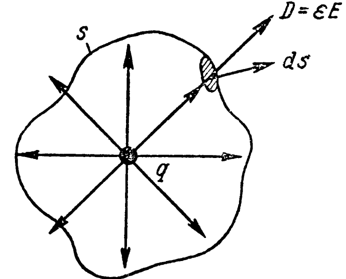


Рис. 1-1. Электрическое поле заряда.

Тогда согласно теореме Гаусса — Остроградского

$$\varepsilon \oint \bar{E}\,\overline{ds} = \Phi_E = q. \qquad (1\text{-}4)$$

Здесь Φ_E — поток вектора электрической индукции через поверхность s, который будем для краткости называть электрическим потоком; он так же, как и заряд, измеряется в кулонах, а площадь s в квадратных метрах.

Диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

измеряется в фарадах на метр (*ф/м*); $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ [*ф/м*] — диэлектрическая проницаемость вакуума; ε_r — относительная диэлектрическая проницаемость.

Выражение (1-4) определяет зависимость между электрическим зарядом q и напряженностью связанного с ним электрического поля E.

Если внутри объема, ограниченного поверхностью s, помещен не один, а множество зарядов, то в правой части (1-4) следует писать сумму (алгебраическую) этих зарядов Σq.

б) Токи и магнитное поле

Когда заряды находятся в движении, то говорят, что в среде проходит электрический ток. Величина его определяется количеством электричества, протекающего через поперечное сечение

среды s в единицу времени (в секунду):

$$i = \frac{dq}{dt}. \qquad (1\text{-}5)$$

Величину i называют сокращенно «током» и измеряют в амперах (a).

Ток, проходящий через единицу поперечного сечения среды,

$$j = \frac{di}{ds}$$

называют плотностью тока и измеряют в амперах на квадратный метр ($a/м^2$).

Выше было отмечено, что когда электрические заряды находятся в движении, т. е. в среде проходит ток, с ним оказывается неразрывно связанным магнитное поле, которое характеризуется напряженностью (или силой) магнитного поля H. По аналогии с электрическим полем напряженность магнитного поля определяют как силу, действующую на единицу количества магнетизма (магнитной массы), хотя последняя величина фиктивная, поскольку в природе изолированные магнитные массы (полюса) не наблюдаются.

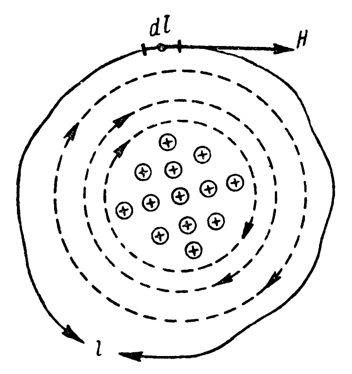


Рис. 1-2. Магнитное поле тока.

Пусть положительные заряды, условно показанные на рис. 1-2 в виде крестиков, движутся в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа. Таково направление тока i. Магнитное поле, связанное с этим током, графически иллюстрируется силовыми линиями, представляющими собой концентрические окружности, лежащие в плоскости, перпендикулярной направлению тока (т. е. в плоскости чертежа). Вектор $\overline{H}$ направлен по касательной к силовой линии, а густота линий пропорциональна его величине.

Связь между током и магнитным полем определяется законом полного тока или, иначе, теоремой о циркуляции вектора $\overline{H}$.

Рассчитаем циркуляцию вектора $\overline{H}$ по некоторому произвольному замкнутому пути l (рис. 1-2), окружающему ток i:

$$\oint \overline{H}\,\overline{dl}.$$

Тогда, согласно закону полного тока

$$\oint \overline{H}\,\overline{dl} = i. \qquad (1\text{-}6)$$

Эта зависимость определяет связь между током i и напряженностью магнитного поля H. Под величиной i, вообще говоря, следует понимать алгебраическую сумму всех токов Σi, охватываемых контуром интегрирования.

Напряженность магнитного поля измеряется в амперах на метр (*а/м*).

Итак, зависимости (1-4) и (1-6) устанавливают связь между зарядами q и токами i, с одной стороны, и напряженностями составляющих электромагнитного поля $\overline{\mathrm{E}}$ и $\overline{H}$ — с другой стороны.

в) Электромагнитное поле. Уравнения Максвелла

В определении электромагнитного поля, данном в начале § 1-1, отмечены неразрывная связь и единство электрической и магнитной составляющих поля.

Рассмотрим некоторые соотношения, подтверждающие и характеризующие это положение.

Обратимся сначала к проводящей среде; эта среда характеризуется тем, что в ней содержатся заряженные частицы, которые могут перемещаться под действием поля. Если в проводнике действует электрическое поле, то в нем возникает ток проводимости, который согласно закону Ома пропорционален силе поля E. Плотность тока проводимости

$$j_{\text{пр}} = \sigma \mathrm{E}, \qquad (1\text{-}7)$$

где σ — величина, характеризующая проводимость среды и называемая удельной проводимостью.

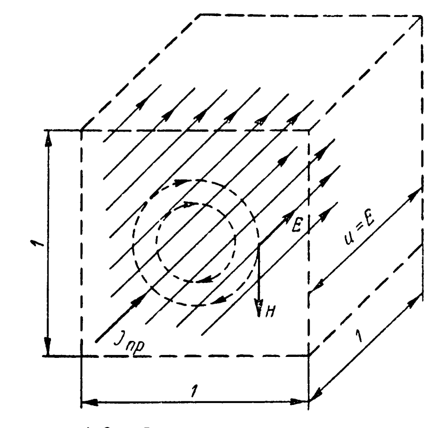


Рис. 1-3. Электромагнитное поле в проводящей среде.

Пусть электрическое поле однородно, т. е. напряженность его E одинакова по величине и направлению в различных точках пространства. Тогда соотношение (1-7) может быть иллюстрировано рис. 1-3. Напряженность электрического поля равна разности потенциалов (напряжению) между точками, разделенными расстоянием $l = 1$ *м*. Плотность тока проводимости $j_{\text{пр}}$ равна току, проходящему через площадь поперечного сечения $s = 1$ *м*^{2}. Направление тока совпадает с направлением электрических силовых линий.

Из рисунка видно, что удельная проводимость σ представляет собой проводимость куба со стороной $l = 1$ *м*.

Ток проводимости через некоторую поверхность s в случае однородного поля будет

$$i_{пр} = j_{пр}s = \sigma \mathrm{E}s. \quad (1\text{-}8)$$

На основании закона полного тока (1-6)

$$\sigma \mathrm{E}s = \oint \overline{H}\,\overline{dl}. \quad (1\text{-}9)$$

Это выражение свидетельствует о том, что если в проводнике действует электрическое поле, то с ним неразрывно связано и поле магнитное. Силовые линии последнего также изображены (пунктиром) на рис. 1-3. Они перпендикулярны линиям электрического поля. Таким образом, в пространстве проводника образуется единое электромагнитное поле с взаимно перпендикулярными составляющими $\overline{\mathrm{E}}$ и $\overline{H}$.

Рассмотрим теперь процессы в д и э л е к т р и ч е с к о й с р е д е. Эта среда отличается тем, что содержащиеся в ней заряженные частицы не могут перемещаться под действием поля.

С этой целью прежде всего продифференцируем по времени выражение для электрического потока Φ_{E}:

$$\frac{\partial \Phi_{\mathrm{E}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\oint \overline{D}\,\overline{ds}\right].$$

Согласно (1-4) поток Φ_{E} имеет размерность количества электричества q. Поэтому производная $\partial\Phi_{\mathrm{E}}/\partial t$ по своей размерности $[dq/dt]$ в соответствии с (1-5) имеет характер «электрического тока». Однако в диэлектрике отсутствуют свободные заряды, которые могли бы перемещаться, «течь». Поэтому величина $\partial\Phi_{\mathrm{E}}/\partial t$ только условно может быть названа «током». Ее называют т о к о м с м е щ е н и я.

Ток смещения

$$i_{см} = \frac{\partial \Phi_{\mathrm{E}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\oint \overline{D}\,\overline{ds}\right] = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left[\oint \overline{\mathrm{E}}\,\overline{ds}\right] \quad (1\text{-}10)$$

пропорционален скорости изменения электрической составляющей электромагнитного поля.

Максвелл сделал предположение, впоследствии полностью подтвержденное опытом, что с током смещения, так же как и с током проводимости, связано магнитное поле, т. е. что на ток смещения распространяется закон полного тока (1-6). Если это так, то можно записать

$$i_{см} = \frac{\partial}{dt}\left[\oint \overline{D}\,\overline{ds}\right] = \oint \overline{H}\,\overline{dl}. \quad (1\text{-}11)$$

Это уравнение, называемое п е р в ы м у р а в н е н и е м М а к с в е л л а для диэлектрической среды, устанавливает искомую связь между электрической и магнитной составляющими электромагнитного поля в диэлектрике.

Надо отметить, что ток смещения аналогичен току проводимости только в отношении свойства быть связанным с магнитным полем. Именно это обстоятельство дает основание называть его «током». Однако имеются и существенные различия между этими двумя понятиями. Ток проводимости в соответствии с законом Ома [см. (1-7)] пропорционален величине напряженности электрического поля E, а ток смещения — производной E по времени. Иными словами, ток смещения имеет место только, если поле изменяется во времени; в случае же постоянного во времени поля ток смещения равен нулю. Кроме того, прохождение тока проводимости связано с превращением энергии электромагнитного поля

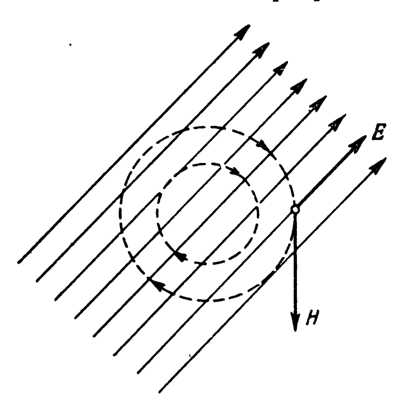


Рис. 1-4. Электромагнитное поле в диэлектрической среде.

Рис. 1-5. К формулировке закона электромагнитной индукции.

в тепло (с нагревом среды), в то время как «прохождение» в идеальной диэлектрической среде тока смещения не связано с необратимым преобразованием энергии.

Термин «смещение» возник в связи с тем, что в диэлектриках под действием электрического поля элементарные заряды «смещаются» в том или ином направлении в зависимости от знака (направления) поля. Однако для вакуума, где нет материи в виде вещества или частиц электричества, но где может существовать материя в виде электромагнитного поля, «смещения» в указанном смысле нет. Тем не менее понятие о токе смещения и здесь сохраняет свое значение, и величина его является очень важной количественной характеристикой того вида материи, который мы называем электромагнитным полем.

Графической иллюстрацией электромагнитного поля в диэлектрике может служить рис. 1-4, аналогичный рис. 1-3. Только в диэлектрической среде ток проводимости отсутствует, а магнитные силовые линии, окружающие линии электрического поля, имеются лишь в том случае, если электрическое поле изменяется во времени. Так называемое второе уравнение Максвелла опре-

деляет еще одно чрезвычайно важное соотношение между двумя составляющими единого электромагнитного поля.

Это уравнение является обобщением закона электромагнитной индукции. Согласно этому закону при изменении магнитного поля, пронизывающего некоторый контур l (рис. 1-5), в нем индуктируется электродвижущая сила (э. д. с.)

$$e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \qquad (1\text{-}12)$$

Э. д. с. e равна циркуляции вектора $\overline{\mathrm{E}}$ по контуру l, т. е. она равна работе, совершаемой при перенесении по этому замкнутому контуру единичного заряда:

$$e = \oint \overline{\mathrm{E}}\,\overline{dl}.$$

Величина Φ носит название магнитного потока,

$$\Phi = \int_s \overline{B}\,\overline{ds} = \mu \int_s \overline{H}\,\overline{ds}, \qquad (1\text{-}13)$$

т. е. равна потоку вектора магнитной индукции $\overline{B} = \mu \overline{H}$ через площадь s, охватываемую контуром l.

Магнитный поток измеряется в веберах, а магнитная индукция — в тесла.

Магнитная проницаемость среды

$$\mu = \mu_0 \mu_r \ [гн/м],$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ [*гн/м*] — магнитная проницаемость воздуха;
μ_r — относительная магнитная проницаемость.

С учетом (1-13) уравнение (1-12) может быть записано так:

$$\oint \overline{\mathrm{E}}\,\overline{dl} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_s \overline{B}\,\overline{ds}\right] = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_s \overline{H}\,\overline{ds}\right]. \qquad (1\text{-}14)$$

Обобщение Максвелла заключается в том, что закон электромагнитной индукции распространяется не только на проводящий контур l, но и на любой, мысленно проведенный в пространстве контур. Так понимаемое уравнение (1-14) и носит название второго уравнения Максвелла. Оно так же, как и первое уравнение (1-11), определяет связь между двумя составляющими электромагнитного поля.

Система уравнений Максвелла

$$\oint \overline{H}\,\overline{dl} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left[\oint \overline{\mathrm{E}}\,\overline{ds}\right] = i_{см}, \qquad (1\text{-}11а)$$

$$\oint \overline{\mathrm{E}}\,\overline{dl} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_s \overline{H}\,\overline{ds}\right] \qquad (1\text{-}14а)$$

имеет большое принципиальное значение. Эти уравнения, которые не выводятся, а постулируются как основные законы природы,

свидетельствуют о том, что если электрическое и магнитное поля в диэлектрике переменны во времени, то они не могут существовать раздельно. Одно из них обязательно связано с наличием второго. Так же, как и в проводящей среде, электрическое и магнитное поля составляют две стороны единой электромагнитной материи. [1]

Из всего сказанного выше и из приведенных графиков следует, что в пространстве векторы $\overline{E}$ и $\overline{H}$ расположены взаимно перпендикулярно; силовые линии одного и другого полей пересекаются под прямыми углами.

г) Энергетические соотношения в электромагнитном поле

Рассмотрение процессов в электромагнитном поле нельзя было бы считать полным, если бы мы не остановились на имеющих здесь место энергетических соотношениях.

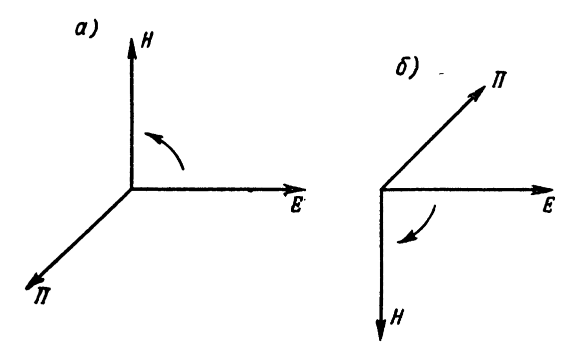


Рис. 1-6. К определению вектора Пойнтинга.

Электромагнитное поле, как и всякий вид движущейся материи, является носителем определенного вида энергии. Энергия электромагнитного поля сосредоточена в его электрической и магнитной составляющих.

В единице объема, занимаемого электрическим полем, заключено количество энергии

$$w'_e = \frac{\varepsilon E^2}{2}, \tag{1-15}$$

называемое объемной плотностью электрической энергии.

Аналогично объемная плотность магнитной энергии

$$w'_m = \frac{\mu H^2}{2}. \tag{1-16}$$

---

[1] Для общего случая среды с конечной проводимостью ($\sigma \neq 0$) в первом уравнении Максвелла должны учитываться как ток смещения, так и ток проводимости, и оно приобретает вид $i_{см} + i_{пр} = \oint \overline{H}\, \overline{dl}$.

Электромагнитное поле обладает замечательной особенностью, вытекающей из рассмотрения уравнений Максвелла: будучи создано в пространстве, оно не может оставаться в покое, а обязательно приходит в движение с весьма большой скоростью, определяемой параметрами среды ε, μ и σ. Направление движения поля определяется ориентацией в пространстве векторов $\overline{\mathrm{E}}$ и $\overline{H}$. Для того чтобы определить это направление, следует мысленно вращать рукоятку правого винта по кратчайшему пути от вектора $\overline{\mathrm{E}}$ к вектору $\overline{H}$; тогда направление движения винта совпадает с направлением П движения поля (рис. 1-6). Таким образом, поле перемещается перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\overline{\mathrm{E}}$ и $\overline{H}$.

Вместе с полем перемещается в пространстве и связанная с ним энергия. Через единицу поверхности, перпендикулярной направлению движения, в единицу времени проносится количество энергии

$$\Pi = \mathrm{E}H. \qquad (1\text{-}17)$$

Рис. 1-7. Поток вектора Пойнтинга через поверхность s.

Если Е измеряется в вольтах на метр, а H в амперах на метр, то П выражается в *дж/сек* $\cdot$ *м*^{2} или, иначе, в ваттах на квадратный метр (*вт/м*^{2}).

Величина П рассматривается как вектор, количественное значение которого определяется (1-17), а направление совпадает с направлением движения электромагнитного поля (рис. 1-6). Его принято называть **вектором Пойнтинга**.

Для того чтобы определить полную мощность, переносимую полем через поверхность s, надо рассчитать поток вектора П через эту поверхность (рис. 1-7):

$$p_s = \int\limits_s \Pi\, d\overline{s}; \qquad (1\text{-}18)$$

если же поле однородно, то

$$p_s = \Pi s. \qquad (1\text{-}19)$$

Таким образом, для передачи на расстояние электромагнитной энергии достаточно создать электромагнитное поле, в котором составляющие $\overline{\mathrm{E}}$ и $\overline{H}$ ориентированы так, чтобы вектор $\overline{\Pi}$ оказался направленным в желательную сторону. Из сказанного следует также, что для изменения направления движения поля на обратное достаточно направить в противоположную сторону один из векторов: $\overline{\mathrm{E}}$ или $\overline{H}$. Если же изменить направление обоих векторов, то направление вектора $\overline{\Pi}$ останется неизменным.

Когда электромагнитное поле распространяется в среде с конечной проводимостью ($\sigma \neq 0$), этот процесс связан не только с посту-

пательным движением энергии, но и с тем, что часть ее необратимо расходуется (теряется), обращаясь в тепло.

Мощность (p_0), теряемая в единице объема среды в связи с прохождением в ней тока проводимости, определяется законом Джоуля — Ленца:

$$p_0 = \mathrm{E} j_{\text{пр}} = \mathrm{E}^2 \sigma. \qquad (1\text{-}20)$$

В объеме V теряется мощность

$$p = \int\limits_V p_0 \, dV = \sigma \int\limits_V \mathrm{E}^2 \, dV; \qquad (1\text{-}21)$$

если же поле однородно ($\mathrm{E} = \mathrm{const}$), то

$$p = \sigma \mathrm{E}^2 V. \qquad (1\text{-}21а)$$

Таким образом, расходуемая в проводнике заданного объема V мощность пропорциональна квадрату напряженности действующего в нем электрического поля.

1-3. Параметры электрических цепей

Электрической цепью называется система, состоящая из элементов, образующих пути для прохождения электрических токов.

Источники (генераторы) электромагнитной энергии называют активными элементами цепи, а все остальные ее участки — пассивными элементами.

Как было показано в предыдущем параграфе, движение зарядов в электрической цепи связано: а) с потерями энергии в проводниках и б) с наличием внутри и вне цепи электромагнитного поля.

Для количественной оценки процессов, происходящих в цепях, введем в рассмотрение величины, называемые параметрами цепи.

а) Сопротивление

Параметром, определяющим потери энергии, связанные с прохождением в цепи тока проводимости, является сопротивление r.

Сопротивлением участка цепи называется отношение расходуемой в нем мощности к квадрату тока, проходящего через него:

$$r = \frac{p}{i^2}. \qquad (1\text{-}22)$$

Если p измерять в ваттах, а ток — в амперах, сопротивление r будет выражено в омах. Подставляя сюда (1-21), получим

$$r = \frac{\sigma \int\limits_V \mathrm{E}^2 \, dV}{i^2}. \qquad (1\text{-}23)$$

Если поле, действующее в проводнике, однородно, то согласно (1-21а)

$$r = \frac{\sigma E^2 V}{i^2}. \tag{1-24}$$

Найдем сопротивление проводника длиной l, имеющего площадь поперечного сечения s (рис. 1-8, *а*). С этой целью подставим в (1-24) вместо i его выражение (1-8) $i = \sigma E s$, а вместо V его значение $V = ls$. Тогда получим

$$r = \frac{l}{\sigma s} = \rho \frac{l}{s}, \tag{1-25}$$

откуда следует, что сопротивление проводника зависит от свойств материала, из которого он изготовлен ($\sigma = 1/\rho$) и от его геомет-

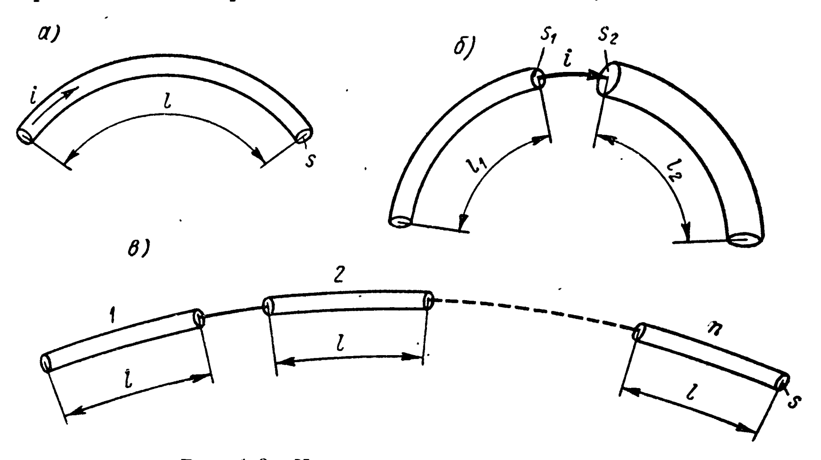


Рис. 1-8. К определению сопротивления.

рических размеров l и s; здесь ρ — удельное сопротивление материала проводника, *ом · м*; l — длина, *м*; s — сечение, *м*^{2}.

Рассмотрим теперь два проводника, обтекаемых одним и тем же током i (рис. 1-8, *б*); «конец» одного из них соединен с «началом» другого. Такое соединение называется последовательным.

Общее сопротивление участка цепи

$$r = \frac{p}{i^2} = \frac{p_1}{i^2} + \frac{p_2}{i^2} = r_1 + r_2, \tag{1-26}$$

где p — полная мощность, расходуемая в рассматриваемом участке;

p_1 и p_2 — мощности, расходуемые в первом и втором проводниках соответственно;

r_1 и r_2 — сопротивления проводников.

Таким образом, сопротивление нескольких последовательно соединенных проводников равно сумме их сопротивлений.

В частном случае, когда последовательно соединены n одинаковых проводников с сопротивлением r (рис. 1-8, *в*), общее сопротивление

$$R = nr. \tag{1-27}$$

Воспользовавшись понятием сопротивления, выражению для тока (1-8) можно придать иной вид.

Если поле однородно, напряженность его

$$\mathrm{E} = \frac{u}{l}, \tag{1-28}$$

где u — разность потенциалов (напряжение) на зажимах участка цепи длиной l.

Подставив (1-28) в (1-8), получим

$$i = \sigma \mathrm{E} s = \frac{\sigma s}{l} u$$

или, приняв во внимание (1-25), найдем

$$i = \frac{u}{r}. \tag{1-29}$$

Полученная формула выражает закон Ома для участка цепи. Из нее следует, что сопротивление участка цепи равно отношению напряжения, действующего на зажимах участка, к току, проходящему через него:

$$r = \frac{u}{i}. \tag{1-30}$$

Если напряжение измерено в вольтах, а ток в амперах, сопротивление выражается в омах.

б) Индуктивность

С током, проходящим в цепи, неразрывно связано, согласно закону полного тока [см. (1-6)], магнитное поле.

Параметром, количественно характеризующим связанное с цепью магнитное поле, является индуктивность.

Рассмотрим участок цепи (рис. 1-9, *а*), представляющий собой виток, охватывающий площадь s. Этот виток при прохождении в нем тока i пронизывает (или с ним «сцепляется») магнитный поток, равный согласно (1-13)

$$\Phi' = \int_s \overline{B}\, \overline{ds} = \mu \int_s \overline{H}\, \overline{ds}.$$

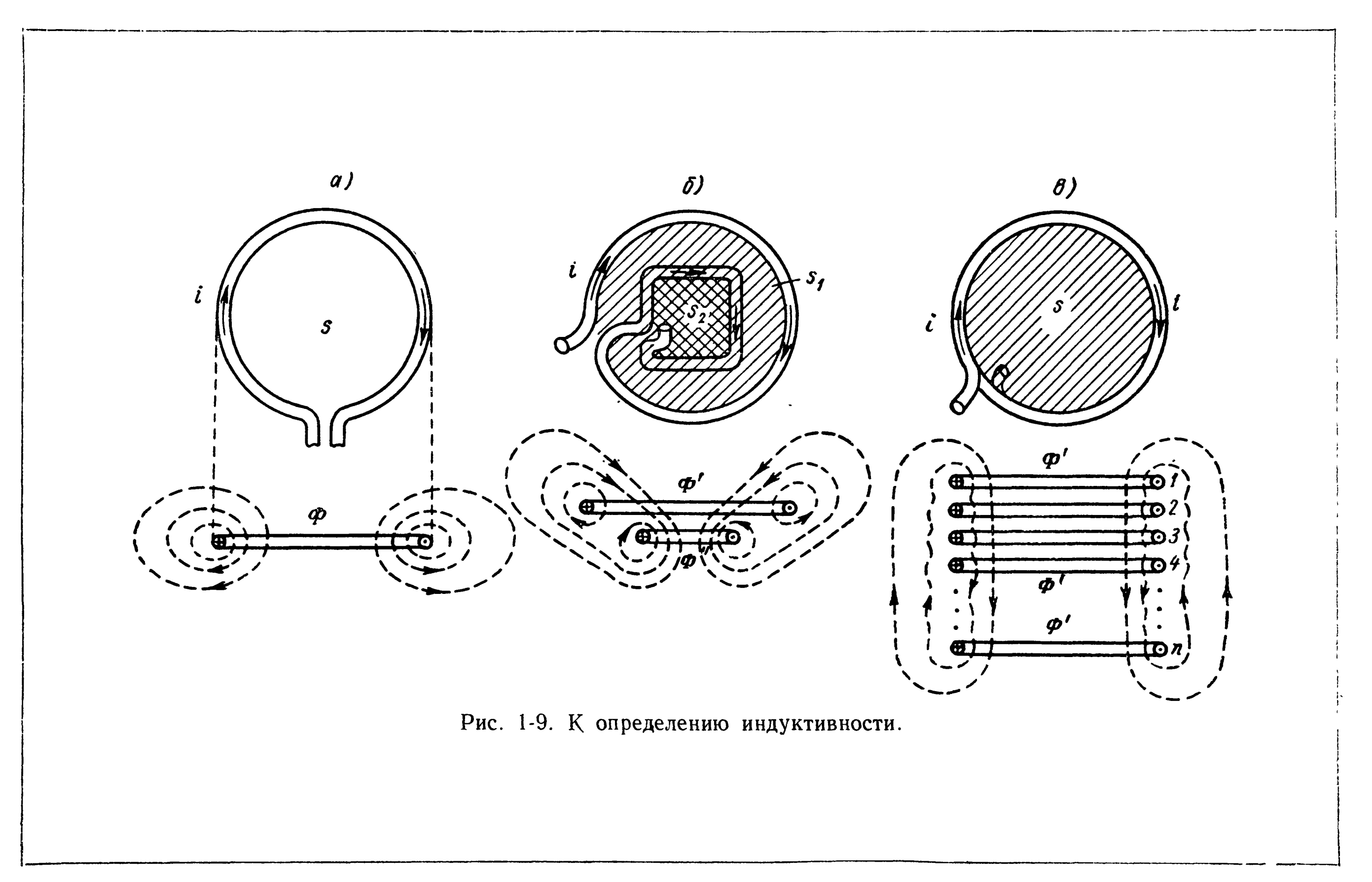


Рис. 1-9. К определению индуктивности.

Индуктивностью витка называется отношение магнитного потока к току:

$$L = \frac{\Phi'}{i} = \frac{\int_s \overline{B}\, \overline{ds}}{i}, \qquad (1\text{-}31)$$

т. е. индуктивность представляет собой магнитный поток, отнесенный к единице связанного с ним тока. Если магнитный поток измерен в веберах, а ток — в амперах, индуктивность выражается в генри (*гн*).

Представим себе, что цепь (или ее участок) составлена не из одного, а из двух последовательно соединенных, намотанных в одинаковом направлении витков различной конфигурации (рис. 1-9, *б*). Они охватывают в общем случае разные площади s_1 и s_2. Через каждый из витков проходит один и тот же ток i.

Полный магнитный поток, связанный с цепью,

$$\Phi = \Phi' + \Phi'', \qquad (1\text{-}32)$$

где Φ' и Φ'' — магнитные потоки, пронизывающие соответственно первый и второй витки.

Полный магнитный поток иногда называют потокосцеплением.

Индуктивность рассматриваемой цепи равна отношению полного магнитного потока к току, т. е.

$$L = \frac{\Phi' + \Phi''}{i}. \qquad (1\text{-}33)$$

Важно отметить, что магнитный поток Φ' при наличии второго витка оказывается бо́льшим, чем если бы первый виток (при том же токе) был одиночным, так как теперь с ним сцепляется также и часть потока второго витка. Это обстоятельство способствует увеличению индуктивности. То же можно сказать и в отношении потока, пронизывающего второй виток, Φ''. Поэтому в тех случаях, когда стремятся получить возможно бо́льшую индуктивность, проводник сворачивают в катушку, представляющую собой ряд последовательно соединенных витков.

Если катушка содержит n одинаковых витков (рис. 1-9, *в*), то в соответствии с (1-32) полный магнитный поток (потокосцепление)

$$\Phi = n\Phi', \qquad (1\text{-}34)$$

где Φ' — поток, пронизывающий каждый из витков.

Индуктивность катушки при этом

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{n\Phi'}{i}. \qquad (1\text{-}35)$$

В случае однородного поля ($H = \text{const}$) магнитный поток

$$\Phi' = \mu s H$$

и индуктивность катушки, состоящей из n витков,

$$L = \frac{n\mu s H}{i}. \qquad (1\text{-}36)$$

Индуктивность зависит от геометрической конфигурации цепи и от свойств окружающей среды.

Если последовательно соединены две катушки, пространственно размещенные так, что магнитный поток одной из них не сцепляется с другой, индуктивность

$$L = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{i} = L_1 + L_2, \qquad (1\text{-}37)$$

где Φ_1 и Φ_2 — полные магнитные потоки каждой из катушек; L_1 и L_2 — индуктивности соединенных между собой катушек.

Таким образом, индуктивность нескольких последовательно соединенных элементов цепи равна сумме их индуктивностей.

В магнитном поле цепи заключена энергия, для расчета которой следует проинтегрировать величину объемной плотности магнитной энергии w'_m [см. (1-16)] по всему объему, занимаемому магнитным полем:

$$w_m = \int_V w'_m \, dV. \qquad (1\text{-}38)$$

В результате этого расчета можно получить, что

$$w_m = \frac{Li^2}{2}. \qquad (1\text{-}39)$$

Отсюда следует другое, энергетическое, определение индуктивности:

$$L = \frac{2w_m}{i^2}, \qquad (1\text{-}40)$$

т. е. индуктивность равна отношению удвоенной энергии магнитного поля к квадрату силы тока, с которым это магнитное поле связано.

в) Емкость

Перейдем к рассмотрению параметра цепи, определяющего связанное с цепью электрическое поле. Этим параметром является емкость.

Если к двум телам (*а-а* на рис. 1-10, *а*) подведено напряжение u, на них накапливаются равные, одноименные заряды $\pm q$ и в окружающем пространстве создается электрическое поле, силовые линии которого начинаются на положительном и заканчиваются на отрицательном заряде.

Окружив любой из двух зарядов замкнутой поверхностью, найдем электрический поток через эту поверхность

$$\Phi_E = \int_s \overline{D}\, \overline{ds}.$$

Емкостью называется отношение потока Φ_E к разности потенциалов u:

$$C = \frac{\Phi_E}{u} = \frac{\int_s \overline{D}\,\overline{ds}}{u}. \qquad (1\text{-}41)$$

Так как согласно теореме Гаусса — Остроградского [см. формулу (1-4)] поток $\Phi_E = q$, емкость обычно определяют как

$$C = \frac{q}{u}. \qquad (1\text{-}42)$$

Если заряд измерен в кулонах, а напряжение в вольтах, емкость выражается в фарадах.

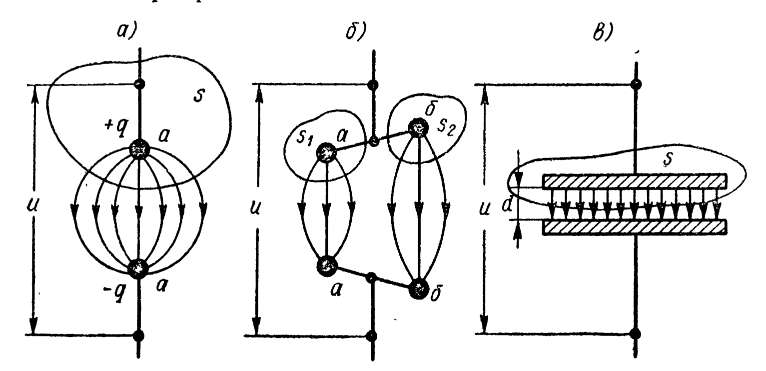


Рис. 1-10. К определению емкости.

Когда две пары зажимов (*а-а* и *б-б* на рис. 1-10, *б*) находятся под одинаковым напряжением, т. е. соединены параллельно, при определении емкости следует учитывать полный электрический поток

$$\Phi_E = \Phi_{E1} + \Phi_{E2}, \qquad (1\text{-}43)$$

где Φ_{E1} и Φ_{E2} — потоки через поверхности s_1 и s_2 соответственно.

При этом предполагается, что электрические силовые линии одного из участков не сцепляются (не связаны) с другим участком.

Емкость двух параллельно соединенных участков

$$C = \frac{\Phi_{E1} + \Phi_{E2}}{u} = C_1 + C_2, \qquad (1\text{-}44)$$

где C_1 и C_2 — емкости каждого из участков.

Таким образом, для увеличения емкости следует включить в параллель ряд проводящих «обкладок» или, что равносильно этому, применить конденсатор (рис. 1-10, *в*). Последний представляет собой в простейшем случае две проводящие пластины, разделенные слоем диэлектрика.

Если электрическое поле однородно (E = const), электрический поток

$$\Phi_E = \varepsilon E s \qquad (1\text{-}45)$$

и емкость

$$C = \frac{\varepsilon E s}{u}. \qquad (1\text{-}46)$$

Емкость зависит от диэлектрической проницаемости диэлектрика и от геометрической конфигурации конденсатора. Она возрастает с увеличением площади пластин и уменьшением расстояния между ними d. Последнее вытекает из того обстоятельства, что при заданном напряжении сила поля E тем больше, чем меньше расстояние между пластинами.

В электрическом поле цепи сосредоточена энергия w_e. Для расчета ее надо проинтегрировать объемную плотность w'_e [см. формулу (1-15)] по всему объему V, занимаемому электрическим полем:

$$w_e = \int_V w'_e \, dV. \qquad (1\text{-}47)$$

Этот расчет показывает, что

$$w_e = \frac{Cu^2}{2}. \qquad (1\text{-}48)$$

Отсюда следует, что емкость C можно также определить как отношение удвоенной величины энергии электрического поля к квадрату напряжения, действующего на участке цепи:

$$C = \frac{2w_e}{u^2}. \qquad (1\text{-}49)$$

1-4. Схемы цепей. Линейные и нелинейные цепи

С любым участком электрической цепи связано электромагнитное поле, и в нем происходят потери энергии. Иными словами, любой участок цепи обладает как сопротивлением, так емкостью и индуктивностью. Невозможно указать такого места в цепи, которое обладало бы только одним из этих параметров. Однако для облегчения исследования явлений в цепях и их расчета заменяют цепь приближенной моделью (схемой), состоящей из отдельных пространственно разделенных элементов r, L и C.

Так, проводник (рис. 1-11, *а*), входящий в состав действительной цепи, заменяется схемой (рис. 1-11, *б*), согласно которой участок ab обладает только сопротивлением r, участок ba' — только индуктивностью L, а участок cd — только емкостью C.

Тем самым предполагается, что все необратимые потери сосредоточены в участке r, все магнитное поле — в участке L, а все элект-

рическое поле — в участке C, подключенном к входным зажимам a-a', между которыми действует подведенное напряжение. Далее, допускается, что проводники, соединяющие между собой элементы схемы r, L, C, не обладают ни сопротивлением, ни индуктивностью, ни емкостью. Образованная таким путем идеализированная цепь носит название цепи с сосредоточенными параметрами.

Несмотря на приближенный характер подобной идеализации, основанные на ней расчеты приводят во многих случаях к вполне удовлетворительным, хорошо подтверждаемым опытом, результатам.

Если параметры цепи r, L и C являются постоянными, не зависящими от напряжений (или токов), формулы (1-30), (1-31) и (1-41) выражают прямую (линейную) зависимость между величинами, характеризуемыми этими параметрами. Процессы в таких цепях описываются линейными алгебраическими или дифференциальными уравнениями. Поэтому цепи, параметры которых не зависят от токов (или напряжений), называются линейными.

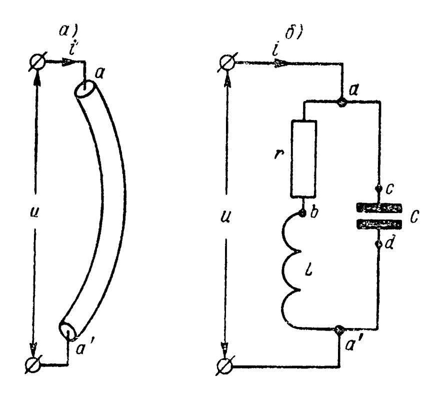


Рис. 1-11. Участок цепи (*а*) и его схема (*б*).

Если же величина какого-либо из параметров (r, L или C) сама зависит от тока (или напряжения), определяемая этим параметром зависимость уже не является линейной. В таких системах процессы описываются нелинейными уравнениями. Цепи, в которых хотя бы один из параметров является функцией напряжения (или тока), называются нелинейными.

Строго говоря, в природе не существует линейных цепей. Параметры практически осуществимых элементов цепей всегда в какой-то мере зависят от тока или напряжения, в особенности если последние превышают определенные величины. Однако во многих случаях — в известных пределах изменения токов и напряжений — вполне возможно делать допущение о линейности цепи. Представления, основанные на такой идеализации, приводят к важным и практически весьма ценным результатам.

С другой стороны, в современной электрорадиотехнике находят также широкое применение цепи с ярко выраженной нелинейностью. С помощью нелинейных цепей удается решать многие важные задачи. Поэтому изучение нелинейных цепей представляет большой принципиальный и практический интерес.

1-5. Радиотехнические цепи. Режим работы цепи

Электрические цепи, применяемые в радиотехнике, носят название радиотехнических цепей.

Всякая электрическая цепь включает в себя один или несколько источников электромагнитной энергии, т. е. находится под воздействием напряжений (или токов). Интенсивность воздействия x может изменяться во времени по некоторому закону $x(t)$. Зависимость $x(t)$ носит название функции воздействия.

Для радиотехнических цепей характерно чрезвычайное разнообразие видов функции воздействия. В частности, x может быть величиной постоянной во времени (рис. 1-12): $x = \text{const}$.

Часто применяются цепи, в которых интенсивность внешнего воздействия изменяется во времени по периодическому закону. В этом случае функция воздействия удовлетворяет условию

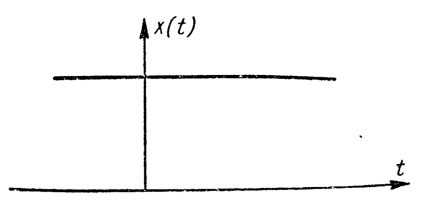


Рис. 1-12. Постоянное во времени воздействие.

$$x(t) = x(t \pm nT),$$

где T — период;

n — любое целое число.

На рис. 1-13 представлены примерные графики некоторых периодических функций воздействия. Первый из них (рис. 1-13, *а*) иллюстрирует воздействие, изменяющееся во времени по синусоидальному закону; рис. 1-13, *б* — функцию $x(t)$, изменяющуюся во времени по кусочно-линейному (пилообразному) закону. График рис. 1-13, *в* изображает периодически повторяющуюся последовательность импульсов, каждый из которых имеет длительность $t_и$.

Как было отмечено в § 1-1, в радиотехнических цепях периодические воздействия могут иметь чрезвычайно различные частоты — от самых низких до весьма высоких.

Воздействие может иметь и апериодический характер. В качестве примеров на рис. 1-14 приведены графики функций $x(t)$, имеющих вид одиночных импульсов той или иной формы.

Под влиянием внешнего воздействия в цепи возникают отклики в виде напряжений, токов, электромагнитных полей в пассивных участках цепи. Отклик y так же, как и воздействие x, является некоторой функцией времени t.

Определение отклика по заданному воздействию, т. е. нахождение функции

$$y(t) = F[x(t)]$$

является одной из главных задач теории электрических цепей.

Совокупность величин (напряжений, токов, напряженностей полей и т. п.), характеризующих воздействие на цепь и возникающие в ней отклики, носит название режима работы электрической цепи.

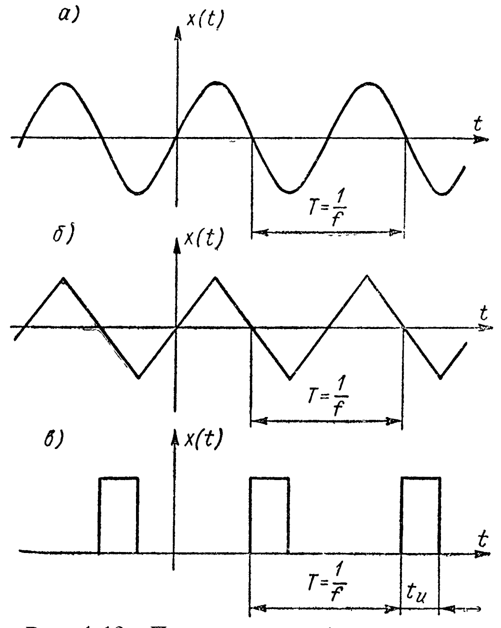


Рис. 1-13. Периодические функции воздействия.

Если воздействие и отклик являются постоянными величинами ($x = \text{const}$; $y = \text{const}$) или имеют вид периодических функций:

$$x(t) = x(t \pm nT),$$
$$y(t) = y(t \pm nT),$$

то мы называем режим цепи стационарным, или установившимся.

В зависимости от свойств цепи и режима ее работы функция отклика $y(t)$ может в той или иной степени отличаться от функции воздействия $x(t)$. Это обстоятельство широко используется в радиотехнических цепях для преобразования формы колебаний и для получения (генерирования) колебаний желаемой формы.

Поскольку между электромагнитным полем, с одной стороны, и зарядами и токами, с другой стороны, существует неразрывная

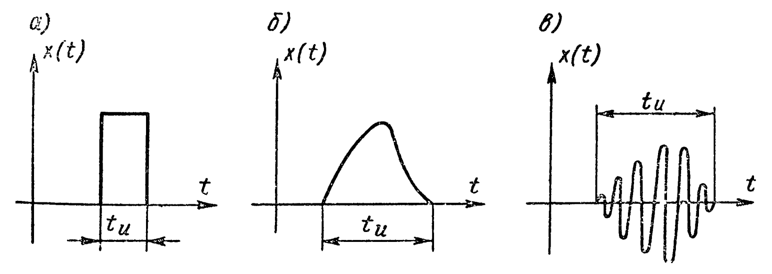


Рис. 1-14. Апериодические функции воздействия: *а* — прямоугольный импульс; *б* — импульс произвольной формы; *в* — высокочастотный импульс произвольной формы.

связь, режим цепи может быть полностью определен применением одного из двух методов исследования: 1) определение зарядов (напряжений) и токов во всех элементах цепи; 2) нахождение электромагнитных полей, связанных со всеми элементами цепи.

Принципиально возможны как первый, так и второй пути исследования. Более простым и удобным является первый из них. В этой книге будем придерживаться главным образом метода исследования процессов, основанного на расчете токов и напряжений в участках цепи.

Любое радиотехническое (так же, как и электротехническое) устройство независимо от его назначения представляет собой сочетание различных электрических цепей, служащих для решения тех или иных задач. Поэтому знание процессов в электрических цепях, их теории и методов расчета совершенно необходимо для изучения основ радиотехники.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

2-1. Основные сведения о цепи постоянного тока

Электрическими цепями постоянного тока называют цепи, в которых величина внешнего воздействия постоянна, т. е. во времени не меняется.

В соответствии с определением, данным в главе первой, в стационарном режиме рассматриваемой цепи токи, напряжения, электромагнитные поля во всех участках цепи (т. е. отклики на внешнее воздействие) также неизменны во времени.

Цепь постоянного тока, как и всякую электрическую цепь, мы представляем в виде идеализированной системы с сосредоточенными параметрами, как это было сделано для участка цепи на рис. 1-11, *б*.

Э. д. с., индуктируемая на зажимах индуктивности L (e_L) магнитным потоком, связанным с данным участком цепи, на основании закона электромагнитной индукции [формула (1-12)] и с учетом (1-31) будет

$$e_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}.$$

Однако в стационарном режиме цепи постоянного тока

$$\frac{di}{dt} = 0,$$

поэтому

$$e_L = 0,$$

что равносильно тому, что участок L замкнут накоротко.

Через емкость C может проходить ток смещения, равный согласно (1-10) и (1-41)

$$i_C = \frac{d\Phi_E}{dt} = C\frac{du}{dt}.$$

Но в стационарном режиме цепи постоянного тока

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad i_C = 0,$$

что равноценно тому, что участок C разомкнут (отсутствует).

Таким образом, при определении стационарных напряжений и токов в цепи постоянного тока индуктивности могут быть коротко замкнуты, а емкости заменены разрывами цепи. Иными словами, при расчете цепей постоянного тока из трех параметров цепи (r, L и C) должны учитываться только сопротивления r, что применительно к рассматриваемому участку цепи приводит к схеме рис. 2-1.

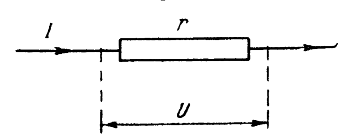


Рис. 2-1. Участок цепи постоянного тока.

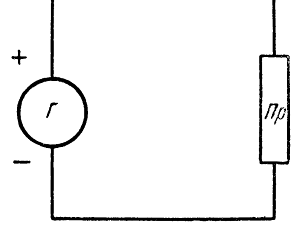


Рис. 2-2. Обобщенная схема цепи постоянного тока.

Обобщенная схема цепи постоянного тока, питаемой от одного источника энергии, изображена на рис. 2-2. Она состоит из генератора постоянного тока *Г* и потребителя (приемника) энергии *Пр*, представляющего собой то или иное сочетание (соединение) сопротивлений.

В настоящей главе изучаются стационарные режимы линейных цепей постоянного тока и основные методы их расчета.

Это изучение мы начнем с рассмотрения свойств и характеристик пассивных и активных элементов цепей постоянного тока.

2-2. Характеристики и параметры пассивных элементов цепи

Напряжение U на зажимах пассивного элемента цепи (рис. 2-1) и ток I через него связаны между собой зависимостью:

$$I = I(U) \tag{2-1}$$

или

$$U = U(I), \tag{2-2}$$

называемой **вольт-амперной характеристикой** элемента цепи. Вид этой характеристики определяется физическими свойствами рассматриваемого элемента.

Целесообразность использования того или иного уравнения — (2-1) или (2-2) — определяется характером внешнего воздействия на

цепь. Часто к сопротивлению извне подводится напряжение U, вызывающее в нем ток I. В этих условиях независимой переменной (воздействием) является напряжение, а функцией, «откликом», — ток, и удобно пользоваться зависимостью вида (2-1). Однако в других случаях внешнее воздействие заключается в создании в элементе цепи определенного тока, а откликом на это воздействие является падение напряжения, создаваемое током на зажимах рассматриваемого участка цепи. Тогда более целесообразно использовать зависимость вида (2-2).

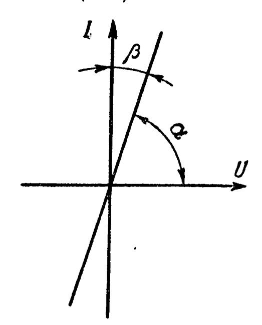


Рис. 2-3. Вольт-амперная характеристика I (U) пассивного элемента цепи.

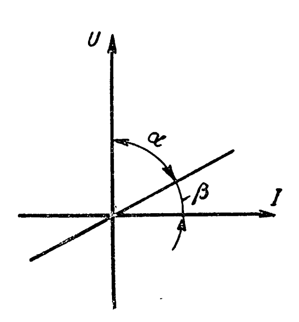


Рис. 2-4. Вольт-амперная характеристика U (I) пассивного элемента цепи.

Уравнение вольт-амперной характеристики представляет собой выражение закона Ома для участка цепи (1-29):

$$I = gU = \frac{U}{r}, \tag{2-3}$$

где r — сопротивление элемента;
g — его проводимость.

Мы условились рассматривать в этой главе линейные цепи постоянного тока. Это означает, что сопротивление любого участка цепи является величиной постоянной, не зависящей от тока, через него проходящего.

При этом уравнение (2-3) выражает линейную зависимость между напряжением и током и вольт-амперная характеристика элемента изображается прямой линией, проходящей через начало координат. В соответствии с (2-1) и (2-2) она может строиться или в системе координат $I = I$ (U) — рис. 2-3, или в обращенной системе $U = U$ (I) — рис. 2-4.

Углы, образуемые вольт-амперной характеристикой с координатными осями, определяются из выражений (при условии одинакового масштаба напряжений и токов):

$$\operatorname{tg} \alpha = g = \frac{1}{r}, \qquad \operatorname{tg} \beta = r = \frac{1}{g}.$$

2-3. Источник энергии (активный элемент цепи) и его эквивалентные схемы

Генератор, питающий цепь постоянного тока, независимо от его принципа действия и устройства, имеет два доступных зажима *а-а* (рис. 2-5), к которым может быть подключено сопротивление нагрузки *r*. При отключенной нагрузке, т. е. при холостом ходе (рис. 2-5, *а*), на зажимах источника развивается напряжение

$$U_{\text{х.х}} = E,$$

являющееся электродвижущей силой (э. д. с.) источника.

При нагрузке генератора на сопротивление *r* (рис. 2-5, *б*) напряжение на его зажимах уменьшается и тем в большей степени, чем

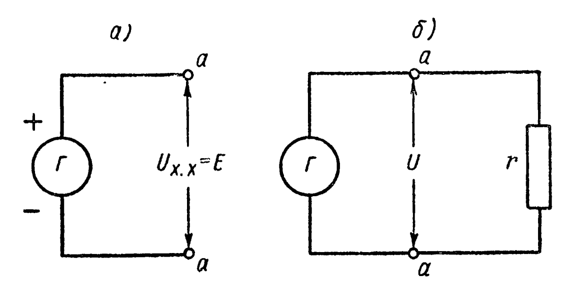


Рис. 2-5. Генератор, питающий цепь постоянного тока.

больше ток *I*. Это явление объясняется следующими энергетическими соображениями.

Мощность, отдаваемая генератором в нагрузку,

$$P = UI.$$

Если бы мы предположили, что с увеличением тока (уменьшением сопротивления нагрузки) напряжение остается неизменным, это означало бы, что источник способен сообщать нагрузке неограниченно большую мощность. В частности, при коротком замыкании генератора ток в цепи, а значит, и рассеиваемая мощность оказались бы бесконечно большими. Такое предположение, однако, противоречит закону сохранения энергии. Поэтому напряжение на зажимах генератора неизбежно падает с увеличением тока и при коротком замыкании ($r = 0$) становится в соответствии с законом Ома равным нулю.

Зависимость напряжения на зажимах источника от тока, им отдаваемого, называют его **внешней характеристикой**.

В зависимости от принципа действия и устройства генератора функция $U = F_{\text{г}}(I)$ может иметь тот или иной вид. В качестве примера на рис. 2-6 изображена (пунктиром) внешняя характеристика некоторого генератора. Если примем допущение о линей-

ности рассматриваемой цепи, то характеристика $U = F_г(I)$ будет прямой, как это показано сплошной линией на рис. 2-6. Здесь $U_{х.х} = E$ — напряжение холостого хода (при $I = 0$); $I_{к.з}$ — ток короткого замыкания (при $U = 0$); он определяется точкой пересечения спрямленной характеристики с осью абсцисс.

В зависимости от постановки задачи можно строить внешнюю характеристику или в координатах $U = F_г(I)$ — рис. 2-6, *а*, или в координатах $I = f_г(U)$ — рис. 2-6, *б*.

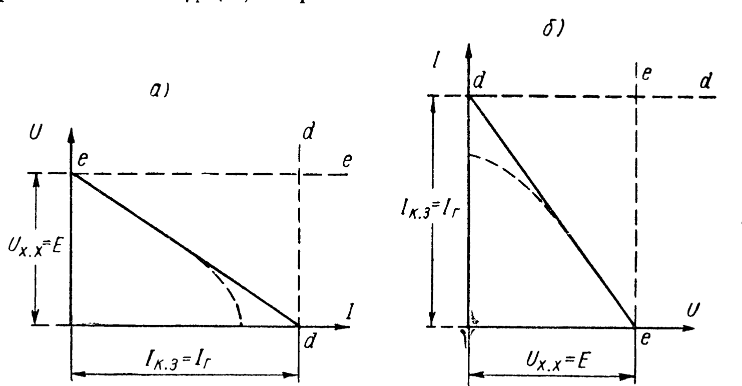


Рис. 2-6. Внешняя характеристика генератора.

Изучение и расчет электрических цепей существенно упрощается, если произвести замену реального генератора некоторой эквивалентной схемой. В последнюю должны входить такие по возможности простые расчетные (фиктивные) элементы, чтобы при включении между доступными точками *а-а* вместо действительного генератора его эквивалентной схемы в остальных (внешних по отношению к генератору) участках цепи режим остался неизменным.

Возможны две основные эквивалентные схемы генератора, к рассмотрению которых мы и перейдем.

а) Схема с генератором э. д. с.

Уравнение прямой, изображающей внешнюю характеристику источника, можно, исходя из рис. 2-6, *а*, записать в виде

$$U = U_{х.х} - aI. \tag{2-4}$$

Здесь постоянный коэффициент

$$a = \frac{U_{х.х}}{I_{к.з}}$$

имеет размерность сопротивления.

Величину

$$\frac{U_{х.х}}{I_{к.з}} = R_i$$

называют внутренним сопротивлением генератора. Экспериментально его можно определить, произведя два опыта: холостого хода (когда напряжение на зажимах генератора равно $U_{х.х}$) и короткого замыкания (когда ток генератора равен $I_{к.з}$). Таким образом, внутреннее сопротивление можно считать некоторым расчетным параметром генератора.

Подставив $a = R_i$ в уравнение (2-4), получим

$$U_{х.х} = E = U + IR_i = Ir + IR_i. \tag{2-5}$$

Ко всякой замкнутой электрической цепи, как известно, применим так называемый второй закон Кирхгофа, согласно которому *сумма э. д. с., действующих в замкнутом контуре электрической цепи, равна сумме падений напряжения на элементах контура.*

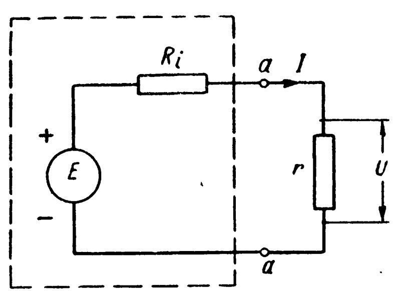


Рис. 2-7. Эквивалентная схема источника с генератором э. д. с.

Выражение (2-5), описывающее процессы в цепи с реальным генератором, вместе с тем является уравнением второго закона Кирхгофа для цепи, изображенной на рис. 2-7. Часть схемы, показанная левее точек *а-а* и отмеченная пунктирной линией, очевидно, и представляет собой эквивалентную схему генератора. Она состоит из двух последовательно включенных элементов: генератора э. д. с. $E = U_{х.х}$ и внутреннего сопротивления R_i.

Из всего сказанного следует, что генератор э. д. с. является таким воображаемым (фиктивным) источником энергии, напряжение на зажимах которого не зависит от тока, через него проходящего. Его внешняя характеристика имеет вид прямой *е-е* (см. рис. 2-6), т. е. этот воображаемый генератор обладает неограниченной мощностью.

Полезно еще раз напомнить, что доступными клеммами генератора являются точки *а-а*. Поэтому «подключиться» к генератору э. д. с., разумеется, невозможно. С другой стороны, если внутреннее сопротивление генератора многим меньше сопротивления внешней цепи, он по своим свойствам приближается к генератору э. д. с.

Из (2-5) следует, что ток в цепи

$$I = \frac{E}{r + R_i}. \tag{2-6}$$

Мы получили выражение закона Ома для замкнутой цепи постоянного тока.

Напряжение на нагрузке теперь может быть записано так:

$$U = Ir = \frac{Er}{r + R_i} = \frac{E}{1 + \frac{R_i}{r}}. \qquad (2\text{-}7)$$

Оно тем ближе к величине E, чем меньше отношение R_i/r.

б) Схема с генератором тока

Исходя из графика рис. 2-6, *б*, уравнение внешней характеристики генератора можно записать в ином виде, отличном от (2-4), а именно:

$$I = I_{к.з} - bU, \qquad (2\text{-}8)$$

где

$$b = \frac{I_{к.з}}{U_{х.х}}.$$

Коэффициент b, равный обратной величине введенного выше внутреннего сопротивления генератора, может быть назван в н у т р е н н е й п р о в о д и м о с т ь ю и обозначен

$$G_i = \frac{I_{к.з}}{U_{х.х}} = \frac{1}{R_i}.$$

Теперь (2-8) можем переписать так:

$$I_{к.з} = I_г = UG_i + I. \qquad (2\text{-}9)$$

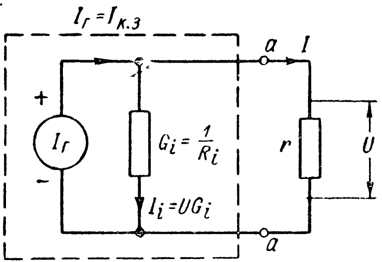


Рис. 2-8. Эквивалентная схема источника с генератором тока.

Если в некоторой точке (узле) электрическая цепь разветвляется, то к ней, как известно, применим п е р в ы й з а к о н К и р х г о ф а, согласно которому *сумма токов, притекающих к узлу, равна сумме токов, исходящих из него.*

Заметим, что уравнение (2-9), справедливое для цепи, питаемой реальным генератором, вместе с тем выражает первый закон Кирхгофа для схемы, показанной на рис. 2-8. Здесь ток $I_г = I_{к.з}$, генерируемый некоторым источником тока, разветвляется на 1) ток $I_i = UG_i$, проходящий через внутреннюю проводимость G_i, подключенную параллельно генератору тока, и 2) ток I, замыкающийся через проводимость нагрузки $g = \frac{1}{r}$.

Из сказанного видно, что часть схемы рис. 2-8, расположенная левее точек *а-а*, можно также рассматривать как эквивалентную схему генератора, которую принято называть с х е м о й с г е н е р а т о р о м т о к а. Последний является таким воображаемым (фиктивным) источником энергии, ток которого не зависит от на-

пряжения на его зажимах. Внешняя характеристика генератора тока имеет вид прямой *d-d* (см. рис. 2-6).

«Выделить» из схемы генератор тока так же практически невозможно, как нельзя изолировать генератор э. д. с. от схемы с генератором э. д. с., потому что к доступным зажимам *a-a* в эквивалентной схеме включены в параллель генератор $I_г$ и проводимость G_i. Однако, если внутреннее сопротивление очень велико (G_i мало) по сравнению с сопротивлением нагрузки r, то приближенно из схемы можно исключить ветвь G_i, тогда действительный генератор будет близок по своим свойствам к генератору тока.

Из (2-9) вытекает, что напряжение на нагрузке

$$U = \frac{I_г}{g + G_i}, \qquad (2\text{-}10)$$

а ток нагрузки

$$I = Ug = \frac{I_г g}{g + G_i} = \frac{I_г}{1 + \frac{G_i}{g}}. \qquad (2\text{-}11)$$

Если $G_i \ll g$, ток генератора тока приближенно равен току нагрузки ($I_г \approx I$).

Полученные зависимости имеют вид, совершенно аналогичный формулам закона Ома (2-6) и (2-7); только место напряжения теперь занял ток и, наоборот, напряжение заняло место тока; вместо сопротивлений написаны проводимости и вместо э. д. с. E ток $I_г$.

Обе рассмотренные схемы являются в одинаковой степени расчетными (фиктивными) и в то же время в равной мере справедливыми для расчета режима во внешних по отношению к генератору элементах цепи.

Какой из этих схем пользоваться, принципиально безразлично. Из того, что было отмечено ранее, следует, что в случае генератора с малым внутренним сопротивлением целесообразнее пользоваться схемой с генератором э. д. с., а если внутреннее сопротивление велико — схемой с генератором тока. К этому надо добавить, что если нагрузка составлена из ряда последовательно соединенных сопротивлений, удобнее производить расчет, базируясь на эквивалентной схеме с генератором э. д. с.; в случае же, когда нагрузка состоит из ряда параллельно соединенных элементов, оказывается более простым использование схемы с генератором тока.

2-4. Энергетические соотношения в цепи постоянного тока

В замкнутой цепи постоянного тока энергия источника питания частично расходуется в сопротивлении нагрузки, превращаясь здесь в какой-либо вид энергии, например, в тепло. Считая расходуемую в нагрузке энергию полезной, можно сформулировать основные энергетические положения для рассматриваемой цепи.

1. Величина полезной мощности P зависит от параметров генератора и свойств внешней по отношению к нему цепи. Желательно установить такие условия работы, при которых в сопротивлении нагрузки выделяется наибольшая возможная мощность.

2. Получение полезной мощности P достигается за счет затраты генератором некоторой мощности P_0, превышающей полезную:

$$P_0 = P + P_i,$$

где P_i — мощность, расходуемая внутри генератора, которую следует считать бесполезно потерянной.

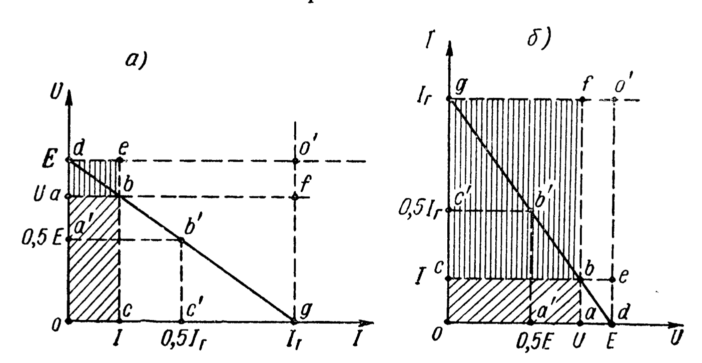


Рис. 2-9. К графическому расчету энергетических соотношений в цепи постоянного тока.

Эффективность отдачи энергии в цепь характеризуется к о э ф ф и ц и е н т о м п о л е з н о г о д е й с т в и я

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{P}{P + P_i}. \tag{2-12}$$

Очевидно, желательно, чтобы наряду с получением требуемой мощности P коэффициент полезного действия был достаточно велик.

Для того чтобы рассмотреть первое из приведенных требований, обратимся к рис. 2-9, на котором изображена внешняя характеристика генератора в системах координат: $U = F_г(I)$ — рис. 2-9, *а* — и $I = f_г(U)$ — рис. 2-9, *б*. При некотором токе I на сопротивлении нагрузки падает напряжение U, и полезная мощность $P = UI$ графически изображается площадью прямоугольника *oabc*. Если изменять сопротивление нагрузки, ток в цепи и напряжение на зажимах генератора изменяются так, что рабочая точка скользит по внешней характеристике. В соответствии с этим меняется величина площади *oabc*, т. е. полезная мощность P. Можно заметить, что при изменении тока от нуля до $I_г$ и соответственно напряжения от E до нуля площадь *oabc* увеличивается от нуля до некоторого максимального значения и затем уменьшается до нуля. Иными словами, при некоторых U и I, т. е. при некотором наивыгоднейшем сопротивлении

нагрузки ($r = r_{опт}$) полезная мощность достигнет максимального значения ($P = P_{макс}$).

Для того чтобы рассчитать величину $r_{опт}$, удобно заменить реальный генератор эквивалентной схемой. Как было отмечено ранее, для расчета режима во внешней относительно генератора цепи можно воспользоваться любой из двух известных нам эквивалентных схем генератора. Примем для расчета схему рис. 2-7, где источник энергии заменен схемой с генератором э. д. с.

Имея в виду формулу (2-6) для полезной мощности, выделяемой в сопротивлении r, получим

$$P = I^2 r = \frac{E^2 r}{(r + R_i)^2}. \qquad (2\text{-}13)$$

Это выражение показывает, что действительно имеется такое значение $r = r_{опт}$, при котором функция $P = f(r)$ достигает экстремального (максимального) значения. Наличие оптимальной величины сопротивления нагрузки можно объяснить тем, что, с одной стороны, мощность должна согласно закону Джоуля — Ленца расти пропорционально r; однако, с другой стороны, с увеличением r уменьшается ток в цепи, что влечет за собой уменьшение P.

Оптимальное значение сопротивления $r_{опт}$ найдем, продифференцировав (2-13) по r и приравняв производную нулю; найдем

$$\frac{\partial P}{\partial r} = E^2 \frac{(r + R_i)^2 - 2r(r + R_i)}{(r + R_i)^4} = 0,$$

откуда

$$r_{опт} = R_i. \qquad (2\text{-}14)$$

Наибольшая величина полезной мощности будет получена от данного источника энергии в том случае, если сопротивление нагрузки равно внутреннему сопротивлению генератора. Когда в цепи соблюдено равенство $r = R_i$, говорят, что нагрузка *согласована* с генератором, или что в цепи осуществлен *режим согласования*.

Если бы мы исходили из эквивалентной схемы источника с генератором тока (см. рис. 2-8), то получили бы

$$P = U^2 g = \frac{I^2_{г} g}{(g + G_i)^2}. \qquad (2\text{-}15)$$

Отсюда, продифференцировав P по g и приравняв производную нулю, получим условие максимума P:

$$g = G_i,$$

т. е. то же самое, что (2-14).

Максимальную величину мощности $P_{макс}$ в режиме согласования найдем, если условие (2-14) подставим в (2-13) или (2-15).

Тогда выражение для $P_{\text{макс}}$ можно будет записать в двух видах:

$$P_{\text{макс}} = \frac{E^2}{4R_i} \qquad (2\text{-}16)$$

или с учетом того, что

$$E = I_{\text{г}} R_i = \frac{I_{\text{г}}}{G_i},$$

$$P_{\text{макс}} = \frac{I^2}{4G_i} = \frac{I_{\text{г}}^2 R_i}{4}. \qquad (2\text{-}17)$$

Выражения (2-16) и (2-17) говорят о том, что величина $P_{\text{макс}}$ определяется свойствами источника энергии. Дальнейшего ее увеличения можно достичь только соответствующим изменением параметров генератора.

Так, если считать заданной величину э. д. с. источника E, то согласно (2-16) желательно всемерно уменьшать его внутреннее сопротивление с тем, чтобы внешняя характеристика (рис. 2-9, *а*) приближалась к прямой do'. Такой генератор имел бы почти неограниченную мощность, он обладал бы чрезвычайно большим током короткого замыкания $I_{\text{г}}$, и для режима согласования с ним потребовалось бы очень малое сопротивление нагрузки r, что не всегда возможно.

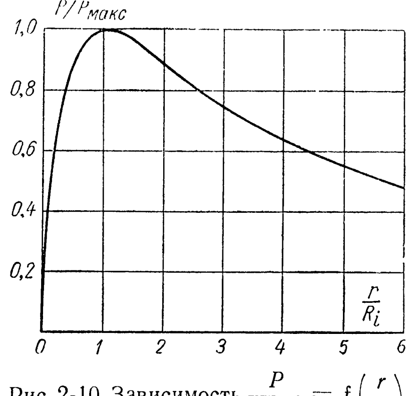


Рис. 2-10. Зависимость $\frac{P}{P_{\text{макс}}} = f\left(\frac{r}{R_i}\right)$.

Если полагать заданным ток $I_{\text{г}}$ источника, то согласно (2-17) для увеличения $P_{\text{макс}}$ необходимо увеличение внутреннего сопротивления (уменьшение G_i) для того, чтобы внешняя характеристика приближалась к прямой go' (рис. 2-9, *б*). Подобный генератор также обладал бы почти неограниченной мощностью, но его э. д. с. E была бы чрезвычайно велика, и для режима согласования с ним потребовалось бы очень большое сопротивление нагрузки r, что также не всегда удобно.

Полученную зависимость P от сопротивления нагрузки иллюстрирует рис. 2-10. По оси абсцисс отложено отношение r/R_i, а по оси ординат — отношение $P/P_{\text{макс}}$, которое достигает максимального значения $P/P_{\text{макс}} = 1$ при $r/R_i = 1$.

Обратимся к рассмотрению второго из сформулированных в начале данного параграфа энергетических требований, касающегося величины коэффициента полезного действия. С этой целью необходимо оценить мощность P_i, расходуемую внутри генератора в различных режимах его работы. Прежде всего возникает вопрос, допустимо ли для определения P_i пользоваться известными нам экви-

валентными схемами генератора и, если это возможно, одинаковый ли результат будет получен при использовании той или другой эквивалентной схемы.

Если источник энергии заменить схемой с генератором э. д. с. (см. рис. 2-7), то мощность, теряемая внутри генератора, т. е. в сопротивлении R_i, будет

$$P_i^{(э)} = I^2R_i = I(E - U). \qquad (2\text{-}18)$$

На рис. 2-9 она изобразится величиной площади *adeb*, которая в сумме с площадью *oabc* (полезной мощностью) представляет полную мощность EI, отдаваемую генератором э. д. с.

Если же источник энергии заменим схемой с генератором тока (см. рис. 2-8), то теряемую внутри генератора (т. е. в проводимости G_i) мощность должны будем представить так:

$$P_i^{(т)} = U^2G_i = U(I_г - I). \qquad (2\text{-}19)$$

Эта мощность на рис. 2-9 изобразится площадью *bcgf*, которая в сумме с площадью *oabc* составит полную мощность $I_гU$, отдаваемую генератором тока.

Как видно, в общем случае использование той или другой эквивалентной схемы приводит к разным величинам рассеиваемой в генераторе и полной мощностей; в частности, в рассмотренном частном случае площадь *bcgf* больше площади *adeb*.

Только в том случае, когда $U = 0{,}5E$ и $I = 0{,}5I_г$, т. е. когда прямоугольник *oabc* (полезная мощность) занимает положение *oa'b'c'*, мощность, теряемая внутри генератора, получается одинаковой как в одной, так и в другой схеме. В этом случае сопротивление нагрузки $r = \frac{U}{I} = \frac{E}{I_г} = R_i$, т. е. в цепи осуществляется режим согласования.

Для того чтобы решить, какая из схем отражает распределение мощностей для действительного генератора, рассмотрим два предельных режима источника питания: холостой ход и короткое замыкание.

При холостом ходе, когда $I = 0$, исходя из схемы с генератором э. д. с., получим внутренние потери [см. формулу (2-18)]

$$P_{i0}^{(э)} = 0,$$

а в схеме с генератором тока [см. (2-19)]

$$P_{i0}^{(т)} = \frac{I_г^2}{G_i} = EI_г.$$

При коротком замыкании, когда $U = 0$, для схемы с генератором э. д. с.

$$P_{iк}^{(э)} = \frac{E^2}{R_i} = EI_г,$$

а для схемы с генератором тока

$$P_{i\text{к}}^{(\text{т})} = 0.$$

Полученные результаты сведены в табл. 2-1.

Таблица 2-1

Мощность, теряемая внутри генератора

Эквивалентные схемы генераторов	Холостой ход	Короткое замыкание
Генератор э. д. с.	$P_{i0}^{(\text{э})} = 0$	$P_{i\text{к}}^{(\text{э})} = EI_\text{г}$
Генератор тока	$P_{i0}^{(\text{т})} = EI_\text{г}$	$P_{i\text{к}}^{(\text{т})} = 0$

Эти данные могут служить критерием выбора эквивалентной схемы для оценки распределения мощности генератора. Если свойства действительного генератора таковы, что при холостом ходе потери в нем отсутствуют, для оценки внутренних потерь следует пользоваться схемой с генератором э. д. с. Если же принцип действия и устройство реального генератора таковы, что в нем нет потерь энергии в режиме короткого замыкания, справедливой является эквивалентная схема с генератором тока. Наконец, для генератора, не удовлетворяющего ни одному из этих условий, ни одна из рассмотренных схем источника питания (с точки зрения расчета потерь внутри генератора) несправедлива.

Подавляющее большинство простейших реальных генераторов не имеют внутренних потерь в режиме холостого хода. Поэтому эквивалентной схемой для определения теряемой в генераторе мощности и его коэффициента полезного действия может служить схема с генератором э. д. с. Принимая для расчетов эту схему и имея в виду (2-13) и (2-18), получим, что к. п. д.

$$\eta = \frac{r}{r + R_i} = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{r}}. \qquad (2\text{-}20)$$

Его величина зависит только от соотношения сопротивлений R_i и r и растет с уменьшением внутреннего сопротивления генератора, асимптотически приближаясь к единице при $R_i \to 0$.

На рис. 2-11 нанесена кривая зависимости к. п. д. от r/R_i.

Как показывают полученные соотношения, при заданном R_i максимум полезной мощности и наилучший к. п. д. несовместимы.

В режиме согласования, когда $r = R_i$ и полезная мощность максимальна, к. п. д. равен лишь 50%, т. е. внутри генератора расходуется такая же мощность, какая выделяется в нагрузке,

а отдаваемая генератором мощность вдвое превосходит полезную. При $r > R_i$ полезная мощность падает с ростом r, в то время как к. п. д. продолжает расти, стремясь к единице.

В тех случаях, когда соображения экономичности являются решающими, следует выбирать режим цепи при $r > R_i$. Так поступают, например, в электротехнике в случаях преобразования или передачи на расстояние больших мощностей.

Могут быть и иные случаи, когда осуществление высокого к. п. д. не играет существенной роли, а основное требование заключается в получении возможно большей полезной мощности. С этим мы встречаемся в некоторых радиотехнических цепях при преобразованиях маломощных сигналов, тогда следует добиваться режима согласования в цепи.

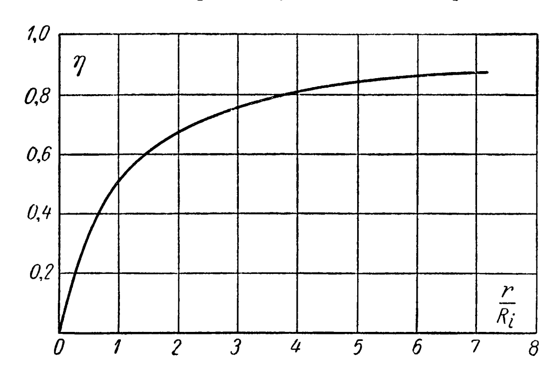


Рис. 2-11. Зависимость $\eta = f\left(\frac{r}{R_i}\right)$.

Если источник энергии, питающий цепь, не имеет внутренних потерь в режиме **короткого замыкания**, для определения к. п. д., как сказано выше, следует пользоваться схемой с генератором тока.

Учитывая (2-15) и (2-19), в этом случае для к. п. д. получим

$$\eta = \frac{g}{g + G_i} = \frac{1}{1 + \frac{G_i}{g}} = \frac{1}{1 + \frac{r}{R_i}}. \qquad (2\text{-}20а)$$

Сравнивая это выражение с (2-20), видим, что зависимость к. п. д. от соотношения r и R_i оказывается иной, чем в случае генератора э. д. с.: с увеличением сопротивления нагрузки к. п. д. уменьшается. Поэтому в случае генератора тока на графике рис. 2-11 по оси абсцисс следовало бы откладывать отношение R_i/r (а не r/R_i). Только в режиме согласования $\left(\frac{r}{R_i} = 1\right)$ значение η в обоих случаях одинаково и равно 0,5.

2-5. Линия передачи постоянного тока

Линия передачи представляет собой два проводника той или иной конфигурации длиной l (рис. 2-12, *а*), соединяющих источник энергии с сопротивлением нагрузки $r_н$. Напряжение в начале линии поддерживается постоянным, равным U. Соединительные про-

вода, включенные последовательно с сопротивлением нагрузки, имеют сопротивление

$$r_л = \rho \frac{2l}{s}, \qquad (2\text{-}21)$$

где ρ — удельное сопротивление материала проводов;

s — площадь поперечного сечения проводников;

$2l$ — полная длина проводов.

Обычно величины, входящие в формулу, измеряют: ρ в *ом·мм²/м*, l в *м*, s — в *мм²*.

Эквивалентная схема цепи может быть представлена в виде рис. 2-12, *б*, на котором линия заменена сопротивлением $r_л$.

Как видно, эта схема полностью совпадает с рис. 2-7. Роль генератора э. д. с. в ней выполняет напряжение питания U, а его внутреннего сопротивления — сопротивление линии $r_л$. Поэтому все соотношения, установленные ранее для схемы с генератором

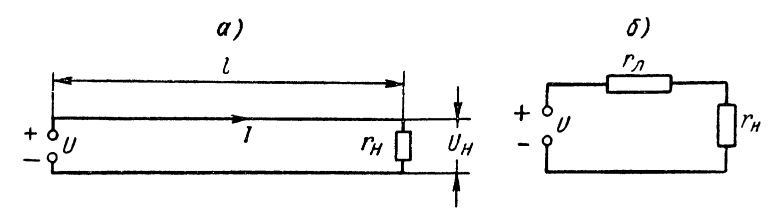


Рис. 2-12. Линия передачи постоянного тока (*а*) и ее схема (*б*).

э. д. с., справедливы и в рассматриваемом случае. Возникает вопрос, какое соотношение между $r_н$ и $r_л$ следует выбрать для изучаемой цепи с линией передачи.

Принимая во внимание назначение линии, можно сформулировать основные требования, которым она должна отвечать.

Напряжение на нагрузке $U_н$ должно по возможности мало отличаться от напряжения источника U, причем изменение тока нагрузки I должно мало влиять на величину напряжения на конце линии. Для выполнения этого требования сопротивление линии должно быть достаточно малым по сравнению с сопротивлением нагрузки [см. (2-7)].

К этому же выводу приходим и из энергетических соображений: чем меньше отношение $r_л/r_н$, тем меньше потери в линии и больше коэффициент полезного действия [см. (2-20)].

Таким образом, в изучаемой цепи следует стремиться к режиму, в котором $\frac{r_л}{r_н} \ll 1$ и коэффициент полезного действия близок к единице. Использование режима согласования $\left(\frac{r_л}{r_н} = 1\right)$ в этом случае нецелесообразно, так как оно привело бы к большим потерям энергии в линии: мощность потерь $P_л$ была бы равна полезной мощности $P_н$.

Отношение $r_л/r_н$, принимая во внимание, что $r_н = \frac{U_н^2}{P_н}$ можно выразить так:

$$\frac{r_л}{r_н} = \rho \frac{2l}{s} \cdot \frac{U_н^2}{P_н},$$

откуда

$$s = \rho 2l \frac{P_н}{U_н^2} \cdot \frac{r_н}{r_л}. \qquad (2\text{-}22)$$

Из этого выражения следует, что для передачи заданной мощности выгодно применять более высокие напряжения. Действительно, при большем напряжении $U_н$ (и заданной мощности) ток в цепи будет меньше, а значит меньшими будут потери в линии. Наоборот, при заданном соотношении потерянной и полезной мощностей (заданном $r_л/r_н$) можно в случае высокого напряжения допустить большее сопротивление проводов, т. е. меньшую величину их сечения. Формула (2-22) говорит о том, что площадь сечения проводов обратно пропорциональна квадрату напряжения. Применение высокого напряжения приводит к экономии веса проводов и, стало быть, их стоимости. Не следует забывать, однако, что с увеличением напряжения растут трудности изоляции линии.

2-6. Электромагнитное поле линии передачи постоянного тока

Процесс движения зарядов (ток) в линии, вызванный разностью потенциалов между проводами, неразрывно связан с наличием электромагнитного поля в пространстве диэлектрика, в котором линия расположена. Напряженность электрической составляющей этого поля E пропорциональна разности потенциалов между проводами, а напряженность магнитной составляющей H пропорциональна току в проводах.

Допустим сначала, что сопротивление проводов линии равно нулю, т. е. падение напряжения и потери энергии в ней отсутствуют.

Положим далее, что конструктивно линия выполнена в виде коаксиального кабеля, очень широко используемого в радиотехнических системах. Коаксиальный кабель (рис. 2-13) состоит из двух цилиндров, играющих роль проводов линии. В сечении кабель можно представить как две концентрические окружности радиусов a и b. Пространство между цилиндрами толщиной $d = b - a$ заполнено диэлектриком.

Электромагнитное поле такой линии полностью заключено в пространстве диэлектрика между жилами кабеля. Электрические силовые линии, начинаясь на внутренней стороне наружной оболочки, заканчиваются на внешней стороне внутренней жилы. Магнитные силовые линии представляют собой концентрические окружности, окружающие внутренний цилиндр.

Пусть толщина диэлектрического слоя d многим меньше диаметров $2a$ и $2b$ и, значит, многим меньше среднего диаметра $D_{ср} = a + b$:

$$d \ll D_{ср} \quad \text{и} \quad 2a \approx 2b \approx D_{ср}.$$

Тогда можно считать, что электромагнитное поле имеет структуру, аналогичную той, какая была бы между параллельными плоскостями, т. е. поле можно считать равномерным.

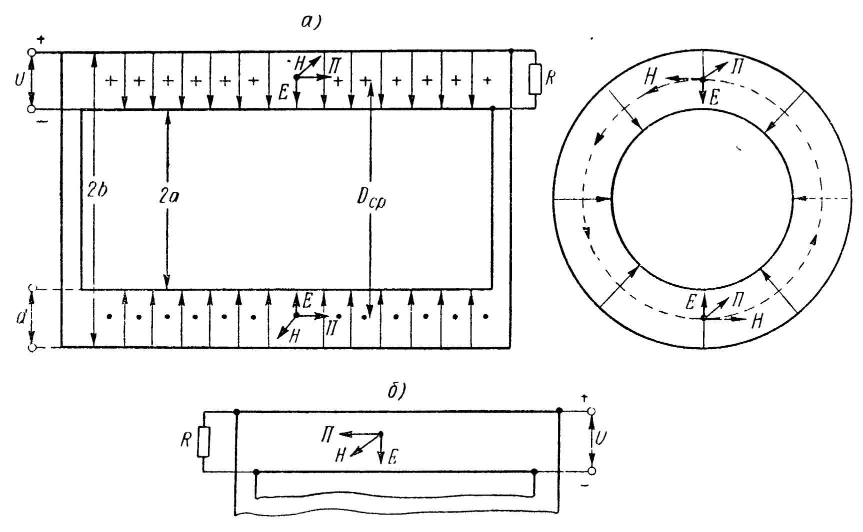


Рис. 2-13. Электромагнитное поле линии передачи постоянного тока при питании линии «слева» (a) и при питании ее «справа» ($б$).

Величина напряженности электрического поля согласно (1-28) будет

$$\mathrm{E} = \frac{U}{d}, \tag{2-23}$$

где U — напряжение между проводами (цилиндрами).

Напряженность магнитного поля находим по (1-6). Интегрирование производим по окружности диаметром $D_{ср}$. Тогда получим

$$I = \pi D_{ср} H$$

и

$$H = \frac{I}{\pi D_{ср}}. \tag{2-24}$$

Векторы $\overline{\mathrm{E}}$ и $\overline{H}$ показаны на рис. 2-13. Они взаимно перпендикулярны и образуют единое электромагнитное поле, движущееся перпендикулярно плоскости $\overline{\mathrm{E}}$ и $\overline{H}$ в направлении вектора Пойнтинга $\overline{\Pi}$, которое находим, вращая правооборотный винт по кратчайшему расстоянию от $\overline{\mathrm{E}}$ к $\overline{H}$. Поле движется от источника к нагрузке, вместе с ним перемещается и несомая им энергия.

Величина вектора $\overline{\Pi}$ определяет количество энергии, переносимой полем в 1 *сек* через 1 $м^2$ поверхности, перпендикулярной направлению движения.

Согласно (1-17)

$$\Pi = EH.$$

Подставляя сюда (2-23) и (2-24), получаем

$$\Pi = \frac{UI}{\pi d D_{\text{ср}}}. \qquad (2\text{-}25)$$

Полную мощность, передаваемую вдоль линии, найдем в соответствии с (1-19), умножив (2-25) на площадь поперечного сечения диэлектрика, заполняющего пространство между плоскостями, т. е. на $s = \pi D_{\text{ср}} d$:

$$P = \Pi s = UI. \qquad (2\text{-}26)$$

Таким образом, передаваемая мощность может быть рассчитана двояким путем: или через параметры электромагнитного поля, связанного с линией, т. е. через вектор Пойнтинга, или через напряжение и ток в линии. Численный результат обоих расчетов получается одинаковым; однако правильное отражение действительной природы процесса дает первое из этих представлений. Энергия переносится с громадной скоростью вдоль линии электромагнитным полем, а не зарядами, движущимися внутри проводов. Роль проводов заключается в концентрации поля в пространстве; они являются своего рода рельсами, вдоль которых происходит движение электромагнитного поля, или, как обычно говорят, «движение энергии». Что же касается движения зарядов в проводе, происходящего с неизмеримо меньшей скоростью, чем скорость перемещения электромагнитного поля, то оно определяет лишь потери энергии на тепло, которыми, как было указано, для простоты рассуждений мы пренебрегли. Несмотря на то, что заряды в одном и другом проводах движутся в разных направлениях, поле перемещается вдоль каждого из проводов в одну и ту же сторону — от генератора к потребителю.

Если мы изменим полярность приложенного напряжения на обратную, направление обоих векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ переменится, а вектор $\overline{\Pi}$, определяющий направление движения энергии, останется обращенным по-прежнему от источника к потребителю. Для того чтобы вектор $\overline{\Pi}$ изменил направление на обратное, надо, например, поменять местами генератор и нагрузку. Тогда (рис. 2-13, *б*) направление вектора $\overline{E}$ останется неизменным, а вектор $\overline{H}$ изменит направление на обратное, так как изменится направление тока в проводах. В результате вектор $\overline{\Pi}$ будет направлен справа налево, т. е. опять от генератора к нагрузке.

В действительности проводники линии обладают сопротивлением. Поэтому между концами каждого из проводов образуется падение напряжения ΔU, создающее составляющую электрического поля $\bar{E}_t$, которая направлена параллельно образующим цилиндров (рис. 2-14). Вдоль наружного цилиндра вектор $\bar{E}_t$ направлен слева направо, а вдоль внутреннего цилиндра — справа налево. Электромагнитное поле с составляющими $\bar{E}_t$ и $\bar{H}$ дает вектор $\bar{\Pi}_t$, направленный внутрь каждого из проводов. Вектор $\bar{\Pi}_t$ определяет энергию, поглощаемую проводом; она обращается в тепло.

Таким образом, в линии имеется два потока энергии: первый (основной), определяемый вектором $\bar{\Pi}$ и направленный от источника к потребителю, и второй, определяемый вектором $\bar{\Pi}_t$ и направленный внутрь провода.

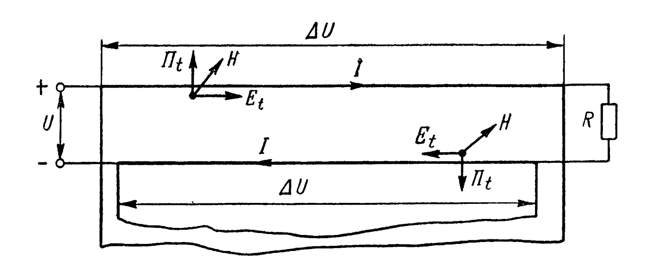


Рис. 2-14. Электромагнитное поле, определяющее потери в проводах линии.

Рассмотрение вопроса об электромагнитном поле линии передачи имеет большое принципиальное значение. Оно позволяет глубже уяснить механизм передачи и преобразования электромагнитной энергии в электрических цепях. Хотя действительная картина этих преобразований определяется явлениями в электромагнитном поле, связанном с цепью, энергетические расчеты оказываются в большинстве случаев более простыми, если в основу их положить не величины E и H, а напряжение U (пропорциональное E) и ток I (пропорциональный H). Так и будем поступать в дальнейшем, не забывая, однако, о действительном характере явлений.

Изучение электромагнитного поля линии лишний раз свидетельствует о том, что для транспортирования электромагнитной энергии на расстояние принципиально необязательно наличие проводов. Если располагать техническими средствами создания электромагнитного поля с соответственно направленными составляющими, поле будет перемещаться в желательном направлении без проводов. Такими средствами располагает современная радиотехника, использующая для этой цели переменные электромагнитные поля высокой частоты.

2-7. Сложные цепи. Расчет цепей постоянного тока

В общем случае электрическая цепь может представлять собой сложную систему, состоящую из ряда пассивных элементов и источников питания, так или иначе соединенных друг с другом.

Сложная цепь (или отдельный ее участок), имеющая два наружных зажима (полюса), к которым может быть подключен источник питания или другие элементы цепи, носит название двухполюсника (рис. 2-15, *а*).

Если цепь имеет ряд наружных зажимов, к которым могут быть подключены источники энергии или другие элементы цепи, она называется многополюсником. На рис. 2-15, *б* в качестве примера схематически показан шестиполюсник. Те полюса,

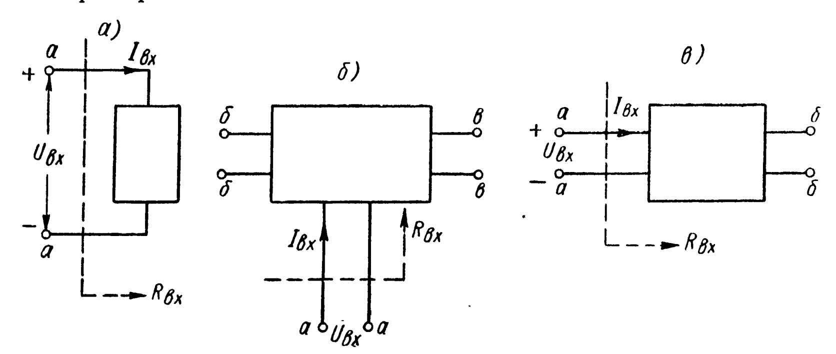


Рис. 2-15. Двухполюсник (*а*), шестиполюсник (*б*) и четырехполюсник (*в*).

к которым подключается питающий систему генератор, называют входными полюсами или, короче, входом многополюсника (зажимы *а-а* на рис. 2-15, *б*). Зажимы, с которых снимается напряжение для использования его в других элементах цепи, называют выходными зажимами, или выходом системы (точки *б-б* и *в-в* на рис. 2-15, *б*). Многополюсник может, вообще говоря, иметь несколько входов и выходов.

Особенно часто в электрических и радиотехнических цепях используются многополюсники, имеющие два входных и два выходных зажима, называемые четырехполюсниками (рис. 2-15, *в*)

При изучении режима на входе многополюсник со стороны своих входных зажимов может рассматриваться как двухполюсник (*а-а* на рис. 2-15, *б* и *в*).

Многополюсник (в частности двух-, четырехполюсник) называется пассивным, если в нем нет источников энергии. Если же он содержит внутри себя один или более источников энергии, его называют активным.

В элементах цепи проходят токи и расходуется энергия, если цепь (в частности многополюсник) подвергается внешнему воздей-

ствию в виде напряжения генератора э. д. с. или тока генератора тока. В системе возникает имеющий тот или иной характер отклик на это воздействие. Так, если на вход двухполюсника (*а-а* на рис. 2-15, *а*) воздействует напряжение, откликом на него является ток, потребляемый от источника. В многополюснике откликами на воздействие, приложенное к входу, являются напряжения (токи, мощности) на выходе. Воздействие на цепь может быть сложным, представляющим собой напряжения или токи внешних источников, подведенные к различным участкам системы. В свою очередь, цепь может давать ряд откликов, получаемых на выходах системы.

Задачи расчета электрических цепей могут быть разбиты на две основные группы: анализ цепей и их синтез.

Анализом называют определение откликов цепи (напряжений, токов) на заданные воздействия, если известны параметры всех элементов, образующих цепь. В некоторых случаях анализа цепей ставится обратная задача: нахождение воздействия по заданному отклику (при известных параметрах цепей).

Синтезом цепи именуют определение ее параметров, обеспечивающих получение заданных воздействия и откликов.

Чаще приходится решать задачи анализа цепей, для чего разработан ряд расчетных приемов.

Ниже будут рассмотрены основные методы анализа сложных цепей постоянного тока.

а) Входные сопротивления (проводимости). Коэффициенты передачи

Входным сопротивлением пассивного двухполюсника (или многополюсника) называется сопротивление между его входными зажимами (*а-а* на рис. 2-15). В соответствии с законом Ома входное сопротивление является отношением напряжения на входе двухполюсника $U_{вх}$ к току, им потребляемому, $I_{вх}$:

$$R_{вх} = \frac{U_{вх}}{I_{вх}}. \quad (2\text{-}27)$$

Если взамен рассматриваемой цепи подключить к источнику сопротивление, равное $R_{вх}$, режим в питающей цепи не изменится. На этом основании входное сопротивление часто называют эквивалентным.

Величина, обратная входному сопротивлению, — входная проводимость

$$G_{вх} = \frac{I_{вх}}{U_{вх}} = \frac{1}{R_{вх}}. \quad (2\text{-}28)$$

Если известно входное сопротивление (проводимость) цепи и задана величина воздействия, например, подводимое напряжение, то отклик (ток) может быть легко рассчитан. В этом заключается основной смысл введения понятия входного сопротивления.

Для характеристики свойств многополюсника, в частности четырехполюсника, кроме понятия о входном сопротивлении, вводят понятие **коэффициента передачи напряжения**.

Коэффициентом передачи называют отношение напряжения на выходе системы к напряжению на входных зажимах, т. е.

$$K = \frac{U_{вых}}{U_{вх}}. \tag{2-29}$$

Для того чтобы рассчитать параметры сложной цепи (входное сопротивление, коэффициент передачи), надо знать сопротивления каждого из элементов, ее составляющих.

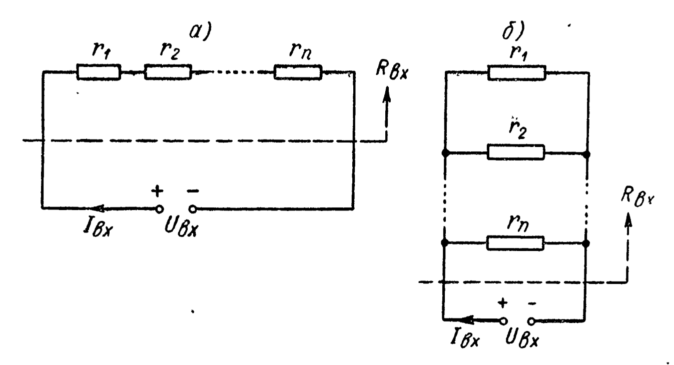


Рис. 2-16. Последовательное (*а*) и параллельное (*б*) соединение элементов цепи.

$$r_1 = \frac{1}{g_1};\ r_2 = \frac{1}{g_2};\ \ldots;\ r_n = \frac{1}{g_n}.$$

Простейшими сочетаниями элементов, образующих сложную цепь, являются их последовательное и параллельное соединение, которые уже встречались ранее. Назвав условно один из концов элемента (сопротивления) его **началом**, а другой — **концом**, мы можем **последовательное** соединение n элементов определить как такое соединение, при котором конец каждого из элементов соединяется с началом последующего. Начало первого и конец n-го элемента образуют входные зажимы цепи (рис. 2-16, *а*). Все участки последовательной цепи обтекаются одним и тем же током $I = I_{вх}$.

Согласно второму закону Кирхгофа

$$U_{вх} = I_{вх}R_{вх} = I_{вх}r_1 + I_{вх}r_2 + \ldots + I_{вх}r_n,$$

откуда

$$R_{вх} = r_1 + r_2 + \ldots + r_n, \tag{2-30}$$

т. е. входное сопротивление равно сумме сопротивлений последовательно соединенных элементов.

Что касается входной проводимости, то она будет

$$G_{вх}=\frac{1}{R_{вх}}=\frac{1}{r_1+r_2+\ldots+r_n}. \quad (2\text{-}30a)$$

В частности, если последовательно соединены два сопротивления,

$$G_{вх}=\frac{1}{r_1+r_2}=\frac{g_1g_2}{g_1+g_2}.$$

В случае параллельного соединения элементов все их начала соединяются вместе и образуют один из входных зажимов; все концы, также соединенные вместе, создают второй входной зажим (рис. 2-16, *б*). На всех параллельных элементах действует одно и то же напряжение $U=U_{вх}$.

Согласно первому закону Кирхгофа

$$I_{вх}=U_{вх}G_{вх}=U_{вх}g_1+U_{вх}g_2+\ldots+U_{вх}g_n,$$

откуда

$$G_{вх}=g_1+g_2+\ldots+g_n, \quad (2\text{-}31)$$

т. е. входная проводимость равна сумме проводимостей параллельно соединенных элементов.

Входное сопротивление

$$R_{вх}=\frac{1}{g_1+g_2+\ldots+g_n}. \quad (2\text{-}31a)$$

В частности, если параллельно соединены два элемента,

$$R_{вх}=\frac{1}{g_1+g_2}=\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}. \quad (2\text{-}32)$$

Смешанное соединение является более сложным сочетанием последовательно и параллельно соединенных сопротивлений. Одним из простейших примеров смешанного соединения может служить цепь, изображенная на рис. 2-17. Ее входное сопротивление

$$R_{вх}=r_1+r_{вх}=r_1+\frac{r_2r_3}{r_2+r_3},$$

где $r_{вх}=\frac{r_2r_3}{r_2+r_3}$ — входное сопротивление параллельного соединения r_2 и r_3.

Вариантом схемы рис. 2-17 является так называемый потенциометр (рис. 2-18), или делитель напряжения. Он представляет собой четырехполюсник, состоящий из сопротивления R, по которому может перемещаться движок *д*. Входное напряжение подводится ко всему сопротивлению R, а выходное снимается с его части r_2.

Назначением потенциометра является плавное изменение величины выходного напряжения (приложенного к сопротивлению нагрузки $r_н$) в пределах от $U_{вых}=0$ (когда движок стоит в крайнем нижнем положении) до $U_{вых}=U_{вх}$ (когда движок перемещен в крайнее верхнее положение). Желательно при этом, чтобы неза-

висимо от сопротивления нагрузки выходное напряжение изменялось по определенному закону в функции отношения сопротивлений r_2 и R. Желательно также, чтобы входное сопротивление всей системы мало зависело от положения движка. Известны линейные, логарифмические и другие потенциометры. В соответствии с (2-7) коэффициент передачи напряжения потенциометра

$$K=\frac{r'}{r_1+r'},$$

где $r'=\frac{r_2 r_н}{r_2+r_н}$ — сопротивление параллельного разветвления r_2 и $r_н$.

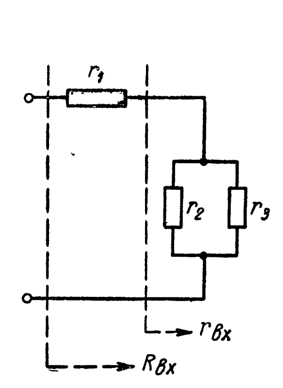


Рис. 2-17. Смешанное соединение элементов цепи.

Рис. 2-18. Схема потенциометра.

Подставляя значение r' в формулу для K и имея в виду, что при любом положении движка $R = r_1 + r_2$, после несложных преобразований получим

$$K=\frac{r_2}{R+\frac{r_1 r_2}{r_н}}. \qquad (2\text{-}33)$$

Отсюда видно, что при $r_н \to \infty$ (при холостом ходе четырехполюсника) коэффициент передачи

$$K_0=\frac{r_2}{R}=\frac{r_2}{r_1+r_2},$$

т. е. прямо пропорционален сопротивлению r_2.

Для того чтобы приблизиться к этому же соотношению при нагрузке выхода на конечное сопротивление $r_н$, последнее должно удовлетворять неравенству

$$\frac{r_1 r_2}{r_н} \ll R$$

или, иначе,

$$r_н \gg \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2}.$$

Так как $r_1 = R - r_2$, неравенство можно записать так:

$$r_н \gg \left(r_2 - \frac{r_2^2}{R}\right).$$

Правая часть этого выражения достигает максимального значения при $r_2 = 0{,}5R$, т. е. когда движок поставлен в середине потенциометра. При этом правая часть неравенства равна $^1/_4 R$.

Таким образом, малая зависимость коэффициента передачи от сопротивления нагрузки получится, если

$$r_н \gg \frac{1}{4} R.$$

Что касается второго требования — возможного постоянства входного сопротивления $R_{вх}$, то для удовлетворения его необходимо, чтобы

$$r_н \gg R.$$

Действительно, наибольшее шунтирующее действие $r_н$ оказывает на величину $R_{вх}$, когда движок стоит в крайнем верхнем положении, т. е. когда $r_н$

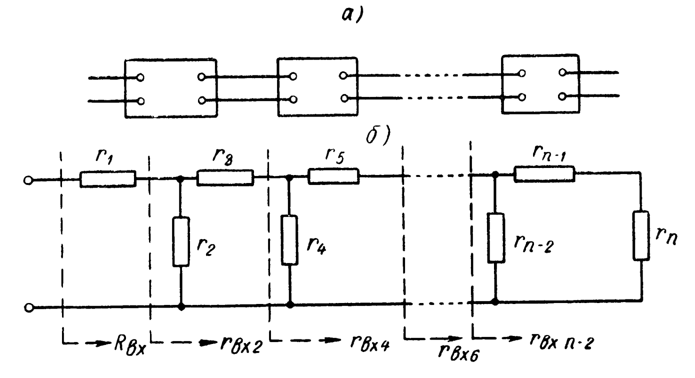


Рис. 2-19. Цепочечная схема.

$$r_2 = \frac{1}{g_2};\ r_4 = \frac{1}{g_4};\ \ldots;\ r_{n-2} = \frac{1}{g_{n-2}};\ r_n = \frac{1}{g_n}.$$

оказывается подключенным параллельно всему сопротивлению R. Поэтому чем больше будет $r_н$ по сравнению с R, тем точнее будет выполняться при любом положении движка равенство

$$R_{вх} \approx R.$$

Среди сложных цепей, используемых в радиотехнической практике, существенное значение имеют цепочечные схемы.

Ц е п о ч е ч н а я   с х е м а представляет собой ряд четырехполюсников, включенных так, что выход одного оказывается соединенным с входом последующего (рис. 2-19, *а*). По своему внутреннему устройству (схеме) четырехполюсники могут отличаться друг от друга. В качестве примера на рис. 2-19, *б* показана цепочечная схема, каждая из ячеек которой напоминает букву Г и поэтому называется Г-образной. На выходе всей системы включено сопро-

тивление нагрузки r_n, а на входе — последовательное сопротивление r_1.

При анализе входного сопротивления такой цепи удобно вести расчеты, идя от выходных зажимов к входным. Как показано на рис. 2-19, *б*, последовательно рассчитываются частичные входные сопротивления:

$$r_{\text{вх}\,n-2}=\frac{r_{n-2}\,(r_{n-1}+r_n)}{r_{n-1}+r_{n-2}+r_n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_{\text{вх}\,4}=\frac{r_4\,(r_5+r_{\text{вх}\,6})}{r_4+r_5+r_{\text{вх}\,6}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и т. д. вплоть до входного сопротивления $R_{\text{вх}}$.

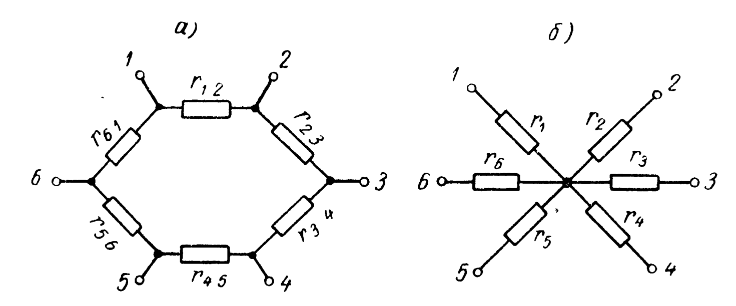


Рис. 2-20. Схемы многоугольника (*а*) и многолучевой звезды (*б*).

Можно представить входное сопротивление цепочечной схемы и в виде непрерывной дроби:

$$R_{\text{вх}}=r_1+\cfrac{1}{g_2+\cfrac{1}{r_3+\cfrac{1}{g_4}+\cdots}}$$

$$\cdots+\cfrac{1}{r_{n-1}+\cfrac{1}{g_n}}.$$

Одной из простейших схем многополюсника является так называемый м н о г о у г о л ь н и к (рис. 2-20, *а*). Здесь элементы цепи соединяются последовательно, образуя замкнутый контур. Внешними зажимами служат точки соединения конца предыдущего и начала последующего элементов.

Другой вариант схемы многополюсника изображен на рис. 2-20, *б*. Такое соединение носит название м н о г о л у ч е в о й   з в е з д ы. Оно характеризуется тем, что все начала элементов объединяются в одну общую точку, а оставшиеся свободными концы образуют полюсы многополюсника.

Несколько подробнее рассмотрим схемы соединения т р е у г о л ь н и к о м (рис. 2-21, *а*) и   т р е х л у ч е в о й   з в е з д о й (рис. 2-21, *б*). В сложных схемах, содержащих треугольник, расчеты могут быть существенно облегчены, если произвести замену треугольника на эквивалентную звезду. Эквивалент-

ность должна состоять в том, чтобы входные сопротивления звезды между полюсами *1-2*; *2-3* и *3-1* были равны соответствующим входным сопротивлениям треугольника.

Рассчитаем величины сопротивлений r_1, r_2 и r_3, которые должны быть включены в схему звезды для того, чтобы последняя была эквивалентна треугольнику с элементами $r_{1\,2}$, $r_{2\,3}$, $r_{3\,1}$.

Входная проводимость треугольника между точками *1-2*

$$g_{\text{вх}\,1\,2} = \frac{1}{r_{1\,2}} + \frac{1}{r_{2\,3} + r_{3\,1}};$$

соответственно входное сопротивление

$$R_{\text{вх}\,1\,2} = \frac{r_{1\,2}(r_{2\,3} + r_{3\,1})}{r_{1\,2} + r_{3\,1} + r_{2\,3}}.$$

С другой стороны, для эквивалентной звезды

$$R_{\text{вх}\,1\,2} = r_1 + r_2.$$

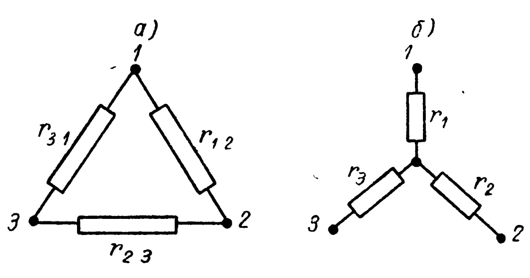


Рис. 2-21. Схемы треугольника (*а*) и трехлучевой звезды (*б*).

Приравняв эти два выражения, получим одно из уравнений для определения искомых параметров звезды:

$$\frac{r_{1\,2}(r_{2\,3} + r_{3\,1})}{r_{1\,2} + r_{3\,1} + r_{2\,3}} = r_1 + r_2.$$

Остальные два уравнения находятся в результате приравнивания входных сопротивлений треугольника и звезды между точками *2-3* и *3-1*.

Решение полученной системы уравнений дает следующие выражения для параметров звезды:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \frac{r_{1\,2}r_{3\,1}}{r_{1\,2} + r_{2\,3} + r_{3\,1}}, \\ r_2 &= \frac{r_{2\,3}r_{1\,2}}{r_{1\,2} + r_{2\,3} + r_{3\,1}}, \\ r_3 &= \frac{r_{2\,3}r_{3\,1}}{r_{1\,2} + r_{2\,3} + r_{3\,1}}. \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}34)$$

Иногда желательно произвести обратный переход — от звезды к эквивалентному треугольнику. Параметры эквивалентного треугольника определяются из той же системы уравнений, если ее решить относительно $r_{1\,2}$; $r_{2\,3}$ и $r_{3\,1}$. Получим:

$$\left.\begin{aligned} r_{1\,2} &= r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2}{r_3}, \\ r_{2\,3} &= r_2 + r_3 + \frac{r_2 r_3}{r_1}, \\ r_{3\,1} &= r_3 + r_1 + \frac{r_3 r_1}{r_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}35)$$

б) Расчет сложных цепей на основе законов Кирхгофа

Сложная электрическая цепь состоит из ряда узлов и ветвей. У з л ы — это такие точки схемы, в которых соединяется не менее трех двухполюсников, содержащих только последо-

вательно соединенные элементы. Количество узлов в схеме обозначим q.

Ветвями называются пассивные или активные двухполюсники, включенные между двумя узлами и составленные из последовательно соединенных пассивных элементов и (если таковые имеются в ветви) источников энергии. Число ветвей, составляющих исследуемую цепь, обозначим p.

На рис. 2-22 изображена схема цепи, содержащая пять пассивных элементов (сопротивлений) и два генератора э. д. с. E_1 и E_2. Сопротивления r_1 и r_5 могут рассматриваться как внутренние сопротивления генераторов.

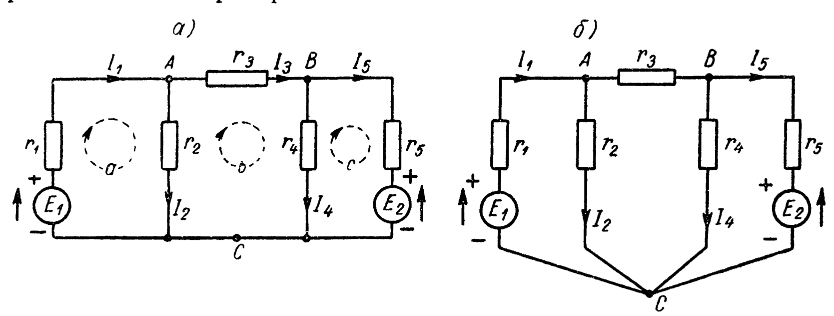


Рис. 2-22. Две эквивалентные схемы сложной цепи постоянного тока, питаемой генераторами э. д. с.

Число ветвей этой схемы $p = 5$. Так как соединительные провода в схемах рассматриваются как не имеющие сопротивления, то схемы рис. 2-22, *а* и *б* в электрическом отношении одинаковы. Число узлов схемы $q = 3$.

Задача расчета цепи заключается в определении токов во всех пяти ветвях. Для этого необходимо располагать системой из пяти, а вообще из p уравнений.

Необходимые уравнения можно составить, пользуясь классическим методом, основанным на использовании законов Кирхгофа, сформулированных в § 2-3. Напомним, что первый закон Кирхгофа относится к узлам схемы. Согласно этому закону алгебраическая сумма k токов, сходящихся в узле,

$$\sum_{i=1}^{k} I_i = 0;$$

причем токи, направленные к узлам, берутся с одним (например, положительным) знаком, а токи, направленные от узлов, — с противоположным (например, отрицательным) знаком.

Первоначально направления токов можно задать произвольно. Если в результате расчета для каких-либо токов получатся отрицательные значения, это будет означать, что их действительное направление противоположно заданному.

При составлении системы уравнений надо помнить, что для того чтобы уравнения были линейно независимыми, достаточно, чтобы каждое последующее уравнение содержало по крайней мере на одну неизвестную больше, чем предшествующие.

Обратившись к рис. 2-22, напишем уравнения первого закона Кирхгофа:

для узла A

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0; \tag{2-36}$$

для узла B

$$I_3 - I_5 - I_4 = 0; \tag{2-37}$$

для узла C

$$I_2 + I_4 - I_1 + I_5 = 0.$$

Последнее уравнение не содержит новых неизвестных по сравнению с первыми двумя. Поэтому первый закон Кирхгофа для исследуемой схемы дает два независимых уравнения, например (2-36) и (2-37).

Вообще при наличии q узлов число независимых уравнений (число «независимых узлов»)

$$m = q - 1, \tag{2-38}$$

так как в последнем из узлов всегда сходятся токи, величины которых уже участвовали в других узлах.

Второй закон Кирхгофа относится к замкнутым контурам схемы (§ 2-3). Согласно этому закону

$$\sum_{k=1}^{M} I_\text{к} r_\text{к} = \sum_{k=1}^{N} E_\text{к},$$

где M — число сопротивлений, входящих в состав контура;
N — число э. д. с., действующих в контуре.

Направление обхода контура можно выбрать произвольно. В тех случаях, когда направление тока (падения напряжения) или э. д. с. совпадает с направлением обхода, соответствующее слагаемое берется с одним (например, положительным) знаком; если не совпадает — с обратным знаком.

При этом следует иметь в виду, что падение напряжения направлено всегда так же, как и ток: от более высокого потенциала (плюса) к более низкому (минусу). Что касается э. д. с., то ее, наоборот, надо считать направленной от минуса генератора к плюсу. В том случае, когда направления э. д. с. и тока через генератор совпадают, последний о т д а е т энергию; если же они противоположны, то данный генератор п о т р е б л я е т энергию (работает в «двигательном режиме»).

При выборе замкнутого контура следует руководствоваться тем, чтобы каждый последующий контур отличался от предыдущих

хотя бы одной новой ветвью. Тогда будет соблюдено правило о независимости уравнений, составляющих систему.

Обращаясь к рис. 2-22, можем выбрать контуры a, b и c. Каждый из них содержит одну или две новые ветви по сравнению с остальными, т. е. эти три контура являются независимыми. Направление обхода примем по стрелке часов.

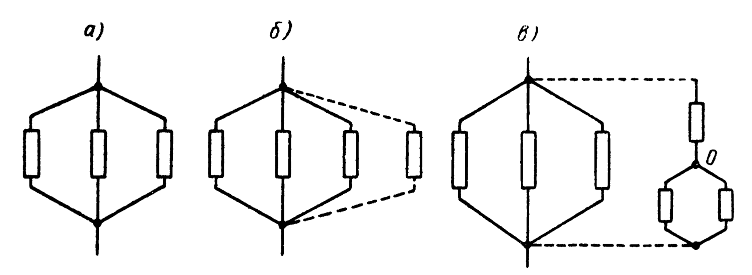


Рис. 2-23. К расчету числа независимых контуров сложной схемы.

Применив второй закон Кирхгофа, получим для контура a

$$I_1r_1 + I_2r_2 = E_1; \tag{2-39}$$

для контура b

$$I_3r_3 + I_4r_4 - I_2r_2 = 0; \tag{2-40}$$

для контура c

$$I_5r_5 - I_4r_4 = -E_2. \tag{2-41}$$

Получено три независимых уравнения, а всего — вместе с (2-36) и (2-37) — пять уравнений, т. е. столько же, сколько искомых величин.

Вообще же число независимых контуров, равное числу независимых уравнений второго закона Кирхгофа,

$$n = p - q + 1 = p - m. \tag{2-42}$$

Для доказательства обратимся к рис. 2-23, a, где изображена цепь из трех параллельных ветвей, т. е. $p = 3$; $q = 2$. Число независимых контуров соответствует (2-42), а именно, $n = 3 - 2 + 1 = 2$.

Если мы, не меняя числа узлов, увеличим число ветвей, т. е. подключим еще, например, одну ветвь (пунктир на рис. 2-23,*б*), число независимых контуров увеличится на один (а вообще — на число подключаемых ветвей). Это же вытекает из (2-42).

Пусть дальнейшее усложнение цепи заключается в добавлении нового узла (точка O на рис. 2-23, *в*). Это дает две новые ветви, но число независимых контуров увеличивается на один. К тому же приводит и (2-42), так как p увеличивается на два, q — на один и n возрастает на единицу.

Этими рассуждениями подтверждается справедливость (2-42) для любой цепи.

Итак, применение законов Кирхгофа к m узлам и n контурам дает всего

$$m+n=m+p-m=p$$

независимых уравнений для нахождения p неизвестных.

Таким образом, на базе законов Кирхгофа может быть произведен полный расчет сколь угодно сложной цепи. Однако при большом значении p расчет оказывается чрезмерно громоздким.

в) Методы контурных токов и узловых напряжений

Расчет сложной цепи можно существенно упростить, применив один из двух методов, предложенных Максвеллом и названных методами контурных токов и узловых напряжений.

Рассмотрим первый из них. Он основан на введении некоторых новых расчетных понятий, которые можно уяснить, обратившись к изученной выше цепи (рис. 2-22) и выделив в ней три независимых контура, например, a, b и c (хотя можно было бы выбрать и другие три контура).

Назовем **контурными токами** те токи, которые проходили бы в каждом из контуров, если бы контуры не имели общих ветвей, т. е. были изолированы друг от друга.

В соответствии с этим контурный ток I_a мыслится обтекающим цепь E_1, r_1, r_2; контурный ток I_b — цепь r_2, r_3, r_4 и, наконец, контурный ток I_c — цепь r_4, r_5, E_2.

Примем одинаковое направление всех контурных токов, например по часовой стрелке.

Величины действительных токов совпадают с контурными (расчетными) только во внешних элементах цепи, а именно:

$$I_1=I_a, \quad I_3=I_b, \quad I_5=I_c.$$

Что касается токов через общие для двух смежных контуров элементы, то они легко определяются через контурные токи:

$$I_2=I_1-I_3=I_a-I_b,$$
$$I_4=I_3-I_5=I_b-I_c.$$

Таким образом, вместо определения пяти действительных токов можно поставить задачу нахождения трех контурных (расчетных) токов, после чего без труда рассчитать все токи в цепи.

Вторым новым понятием, которое мы введем, является понятие о **контурных сопротивлениях**, т. е. о суммарных сопротивлениях каждого из контуров, опять в предположении, что контуры рассматриваются изолированно друг от друга.

Имеем:

$$r_a=r_1+r_2, \quad r_b=r_2+r_3+r_4, \quad r_c=r_4+r_5.$$

Наконец, взаимными сопротивлениями назовем общие сопротивления, которые входят в состав каждого из двух соседних контуров. В рассматриваемой цепи имеем два взаимных сопротивления:

$$r_{ab} = r_2 \quad \text{и} \quad r_{bc} = r_4.$$

Теперь уравнение второго закона Кирхгофа для контура a (2-39) можно переписать так:

$$I_a r_1 + (I_a - I_b) r_2 = E_1$$

или, приняв во внимание введенные понятия о контурных и взаимных сопротивлениях,

$$I_a r_a - I_b r_{ab} = E_1. \qquad (2\text{-}43)$$

Уравнение (2-40), составленное для контура b, в новых величинах запишется следующим образом:

$$I_b r_3 + (I_b - I_c) r_4 - (I_a - I_b) r_2 = 0$$

или

$$I_b r_b - I_a r_{ab} - I_c r_{bc} = 0. \qquad (2\text{-}44)$$

Наконец, аналогичные преобразования можем произвести с уравнением (2-41), составленным для контура c; получим

$$I_c r_5 - (I_b - I_c) r_4 = -E_2$$

или

$$I_c r_c - I_b r_{bc} = -E_2. \qquad (2\text{-}45)$$

Получено три независимых уравнения (2-43), (2-44) и (2-45), из которых находятся искомые контурные токи: I_a, I_b и I_c. Вместо решения системы из пяти уравнений, как этого требует рассмотренный в § 2-7, п. «б» метод, можно достичь желаемого результата гораздо проще: решив систему из трех уравнений.

На основании изложенного можно сформулировать общее правило составления каждого из уравнений контурных токов. При обходе всех контуров в одном направлении, совпадающем с выбранным положительным направлением контурного тока, в левой части уравнения для данного контура суммируются: с положительным знаком — падение напряжения, создаваемое контурным током на контурном сопротивлении, и с отрицательным знаком — падения напряжения, создаваемые смежными контурными токами на взаимных сопротивлениях, если контурные токи в этих сопротивлениях направлены навстречу друг другу. В правой части уравнения записывается алгебраическая сумма действующих в контуре э. д. с. (контурных э. д. с.), причем э. д. с., направление которых совпадает с направлением обхода, считаются положительными.

В общем виде система уравнений контурных токов может быть записана в таком виде:

$$\left.\begin{array}{l} I_a r_a - I_b r_{ab} - I_c r_{ac} - \ldots = \sum E_a, \\ I_b r_b - I_b r_{ab} - I_c r_{bc} - \ldots = \sum E_b, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (2\text{-}46)$$

Число необходимых для решения задачи уравнений в данном методе, очевидно, равно числу независимых контуров, т. е.

$$n = p - q + 1 = p - m.$$

Для того чтобы изучить метод узловых напряжений, преобразуем прежде всего входящие в схему (см. рис. 2-22) генераторы э. д. с. в генераторы тока, полагая, что сопротивления

$$r_1 = \frac{1}{g_1} \quad \text{и} \quad r_5 = \frac{1}{g_5}$$

являются внутренними сопротивлениями генераторов. Все входящие в схему сопротивления выразим через соответствующие про-

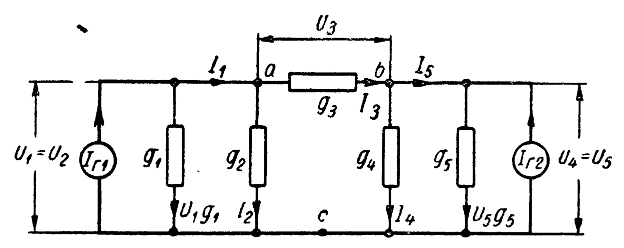


Рис. 2-24. Сложная цепь постоянного тока, питаемая генераторами тока.

водимости. Буквами a, b и c обозначим теперь узлы схемы. В результате получим схему рис. 2-24, в которой ток первого генератора тока $I_{г1} = E_1 g_1$ и ток второго генератора тока $I_{г2} = E_2 g_5$.

Все напряжения (разности потенциалов), действующие в цепи, будем определять относительно потенциала одного из узлов, например, узла c, который назовем опорным и потенциал которого будем считать равным нулю.

После этих предварительных замечаний ознакомимся с новыми расчетными величинами, вводимыми в рассмотрение в методе узловых напряжений.

Узловыми напряжениями называются потенциалы (напряжения) относительно опорного узла. В рассматриваемой схеме имеется два узловых напряжения: U_a и U_b.

Действительные напряжения на зажимах ветвей совпадают с узловыми только для внешних ветвей (подключенных к опорному узлу); как видно из схемы рис. 2-24,

$$U_1 = U_2 = U_a, \qquad U_4 = U_5 = U_b.$$

Что касается напряжений на ветвях, включенных между узлами, то они выражаются через узловые напряжения. В нашей схеме есть одна такая ветвь — g_3. Напряжение

$$U_3 = U_a - U_b.$$

Зная токи источников тока и напряжения на ветвях, можно непосредственно найти все токи. Действительно,

$$I_1 = I_{г1} - U_1 g_1 = I_{г1} - U_a g_1,$$
$$I_2 = U_2 g_2 = U_a g_2,$$
$$I_3 = U_3 g_3 = (U_a - U_b) g_3,$$
$$I_4 = U_4 g_4 = U_b g_4,$$
$$I_5 = U_5 g_5 - I_{г2} = U_b g_5 - I_{г2}.$$

Таким образом, вместо того чтобы находить пять токов во всех ветвях, можно поставить задачу нахождения всего лишь двух узловых напряжений: U_a и U_b. После этого напряжения на всех ветвях и токи через них рассчитываются без труда.

Вторым расчетным понятием, которое вводится в методе узловых напряжений, является понятие об узловых проводимостях, под которыми понимают суммы проводимостей, сходящихся в каждом (за исключением опорного) узлов. В нашей схеме имеются две узловых проводимости:

$$g_a = g_1 + g_2 + g_3 \quad \text{и} \quad g_b = g_3 + g_4 + g_5.$$

Наконец, взаимными проводимостями называют проводимости, включенные между двумя соседними (за исключением опорного) узлами. В нашей схеме имеется только одна взаимная проводимость

$$g_{ab} = g_3.$$

Теперь уравнение первого закона Кирхгофа (2-36) для узла a можно записать так:

$$I_{г1} - U_a g_1 - U_a g_2 - (U_a - U_b) g_3 = 0$$

или, принимая во внимание введенные величины узловых и взаимных проводимостей,

$$U_a g_a - U_b g_{ab} = I_{г1}. \qquad (2\text{-}47)$$

Уравнение (2-37) для узла b в новых величинах можно выразить следующим образом:

$$I_{г2} - U_b g_5 - U_b g_4 + (U_a - U_b) g_3 = 0$$

или

$$U_b g_b - U_a g_{ab} = I_{г2}. \qquad (2\text{-}48)$$

Получена система двух независимых уравнений (2-47) и (2-48), из которых находятся искомые узловые напряжения U_a и U_b. Вместо того чтобы решать систему из пяти уравнений, как того требует классический метод, оказывается возможным произвести тот же расчет значительно более простым путем, решив систему из двух уравнений.

Теперь можно сформулировать общее правило составления каждого из уравнений метода узловых напряжений. При отсчете напряжений всех узлов относительно опорного узла в левой части уравнения для данного узла суммируются: с положительным знаком — произведение узлового напряжения на узловую проводи-

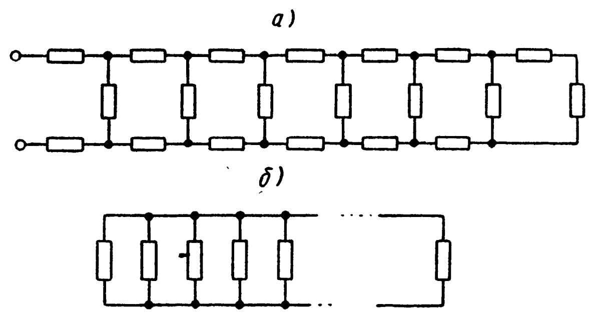


Рис. 2-25. Варианты схем сложных цепей.

мость и с отрицательным знаком — произведения узловых напряжений смежных узлов на соответствующие взаимные проводимости. В правой части уравнения записывается алгебраическая сумма токов источников тока, подключенных к узлу; причем токи, подходящие к узлу, берутся со знаком плюс, а отходящие от узла — со знаком минус.

В общем виде система уравнений метода узловых напряжений может быть записана так:

$$\left.\begin{aligned} U_a g_a - U_b g_{ab} - U_c g_{ac} - \ldots &= \sum I_{\text{г}a}, \\ U_b g_b - U_a g_{ab} - U_c g_{bc} - \ldots &= \sum I_{\text{г}b}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}49)$$

Число уравнений системы, очевидно, на единицу меньше числа узлов, т. е.

$$m = q - 1.$$

Из всего сказанного видно, что методологическая основа обоих способов расчета идентична. Только место контурных токов одного метода занимают узловые напряжения другого; вместо сопротивлений в одном методе видим проводимости в другом. Наконец, сумма э. д. с., включенных в контур, заменяется суммой токов источников, подключенных к узлу.

Целесообразность применения того или иного метода определяется количеством уравнений, которые надо решить.

Если цепь содержит большое число контуров при небольшом количестве узлов, т. е. если $n > m$ или, иначе, $p > 2\,(q - 1)$, очевидно, разумнее производить расчет по методу узловых напряжений. При этом все источники энергии должны быть заменены эквивалентными схемами с генераторами тока.

Если же схема содержит относительно небольшое число независимых контуров, т. е. $n < m$ или, иначе, $p < 2\,(q - 1)$, целесообразнее применять метод контурных токов. При этом все источники энергии должны быть представлены эквивалентными схемами с генераторами э. д. с.

В схеме рис. 2-25, *а*, где $n = 7$, $m = 11$ ($p = 18$; $q = 12$), рационально применить метод контурных токов, а в схеме рис. 2-25, *б*, имеющей только два узла ($q = 2$; $m = 1$) и большое число параллельных ветвей ($p \gg 1$; $n \gg 1$), — метод узловых напряжений.

г) Метод эквивалентного генератора (теорема Тевенена об активном двухполюснике)

Представим себе двухполюсник *А* (рис. 2-26), в состав которого, кроме сопротивлений (пассивных элементов), входят один или несколько источников энергии. Если при холостом ходе (рис. 2-26, *а*)

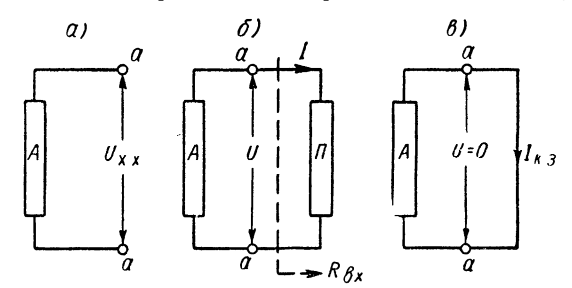


Рис. 2-26. Активный двухполюсник.

на зажимах двухполюсника наблюдается напряжение $U_{х.х}$, развиваемое внутренними источниками, такой двухполюсник является активным.

Подключим к активному двухполюснику некоторую пассивную цепь *П* (рис. 2-26, *б*). Тогда в цепи будет проходить ток *I*. С увеличением этого тока напряжение на зажимах активного двухполюсника должно неизбежно уменьшаться. Если бы напряжение оставалось неизменным при любом токе, это означало бы, что мощность источника, питающего цепь, бесконечно велика. Зависимость $U\,(I)$ является внешней характеристикой активного двухполюсника. Так как цепь линейна, эта характеристика выражается прямой линией (рис. 2-27).

Уравнение внешней характеристики может быть записано в виде

$$U = U_{х.х} - \frac{U_{х.х}}{I_{к.з}} I, \qquad (2\text{-}50)$$

где $I_{к.з}$ — ток короткого замыкания активного двухполюсника (рис. 2-26, *в*).

Если введем обозначения:

$$\frac{U_{х.х}}{I_{к.з}} = R_{iэ}, \qquad (2\text{-}51)$$

$$U_{х.х} = E_э, \qquad (2\text{-}52)$$

то на основании (2-50) получим

$$E_э = U + R_{iэ} I.$$

Так как $U = IR_{вх}$, где $R_{вх}$ — входное сопротивление пассивного двухполюсника, то

$$I = \frac{E_э}{R_{вх} + R_{iэ}}. \qquad (2\text{-}53)$$

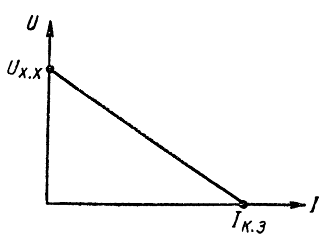


Рис. 2-27. Внешняя характеристика активного двухполюсника.

Приведенные здесь рассуждения и выводы подобны тем, к которым мы пришли при рассмотрении вопроса о генераторах и их эквивалентных схемах (§ 2-3). Уравнение (2-53), выражающее закон Ома, дает основание утверждать, что активный двухполюсник (т. е. весь участок сложной цепи, расположенный левее точек *а-а*) может быть заменен эквивалентной схемой, изображенной (внутри пунктирной рамки) на рис. 2-28, *а*. Она представляет собой не что иное, как схему с генератором э. д. с. $E_э$.

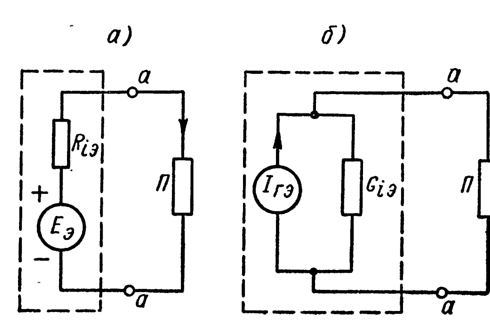


Рис. 2-28. Схемы эквивалентных генераторов.

Величина $R_{iэ} = \frac{E_э}{I_{к.з}}$ является внутренним сопротивлением эквивалентного генератора, обладающего э. д. с. $E_э$. Как видно из рис. 2-28, *а*, внутреннее сопротивление равно сопротивлению между зажимами *а-а* при холостом ходе активного двухполюсника и при замкнутом накоротко генераторе э. д. с.

Теперь мы можем сформулировать весьма важную т е о р е м у о б э к в и в а л е н т н о м г е н е р а т о р е э. д. с., называемую иногда теоремой Тевенена. Ток через пассивный двухполюсник сложной электрической цепи равен электродвижущей силе остальной части схемы (которая рассматривается как схема с генерато-

ром э. д. с.), поделенной на сумму внутреннего сопротивления активного двухполюсника и входного сопротивления пассивного двухполюсника (нагрузки). При этом э. д. с. активного двухполюсника равна напряжению на его зажимах при холостом ходе, а внутреннее сопротивление равно отношению напряжения холостого хода к току короткого замыкания или, иначе, оно равно сопротивлению между полюсами при замкнутых накоротко генераторах э. д. с., входящих в схему активного двухполюсника.

От эквивалентной схемы с генератором э. д. с. можно перейти к схеме с генератором тока, показанной на рис. 2-28, *б*. Здесь ток эквивалентного генератора тока определяется как

$$I_{г.\,э}=\frac{E_э}{R_{iэ}}=E_эG_{iэ},$$

т. е. он равен току короткого замыкания активного двухполюсника: $I_{г.э}=I_{к.з}$.

В соответствии с (2-10) напряжение на зажимах нагрузки

$$U=\frac{I_{г.\,э}}{G_{iэ}+G_{вх}}, \qquad (2\text{-}54)$$

где

$$G_{вх}=\frac{1}{R_{вх}}.$$

Формула (2-54) выражает теорему об эквивалентном генераторе тока: напряжение на пассивном двухполюснике сложной электрической цепи равно току эквивалентного генератора тока, которым заменяется остальная часть цепи (левее *а-а*), поделенному на сумму внутренней проводимости активного двухполюсника и проводимости нагрузки. При этом ток генератора тока равен выходному току активного двухполюсника в режиме короткого замыкания, а внутренняя проводимость равна отношению тока короткого замыкания к напряжению холостого хода или, иначе, равна проводимости между его полюсами при отключенных (разомкнутых) генераторах тока.

Пусть в изученной ранее схеме (см. рис. 2-22) требуется рассчитать ток $I_3=I$ через сопротивление $r_3=R$. Такая задача может быть легко решена применением теоремы об эквивалентном генераторе. Участки цепи левее точек *а-а* (рис. 2-29, *а*) и правее точек *б-б* рассматриваем как активные двухполюсники. Так как сопротивление R включено последовательно с активными двухполюсниками, из двух возможных эквивалентных схем целесообразнее использовать схему с эквивалентными генераторами э. д. с. Активный двухполюсник *а-а* заменяем схемой с генератором э. д. с. $E_{э1}$, а двухполюсник *б-б* — схемой с генератором э. д. с. $E_{э2}$ (рис. 2-29, *б*).

В соответствии с выведенной теоремой найдем параметры эквивалентных генераторов.

Электродвижущая сила эквивалентного генератора $E_{э1}$ равна напряжению холостого хода между точками *а-а* (т. е. при разомкнутом k_1). Имеем

$$E_{э1}=\frac{r_2}{r_1+r_2}E_1.$$

Ток короткого замыкания этого же эквивалентного генератора (при замкнутом k_2):

$$I_{г.\,э1}=\frac{E_1}{r_1}.$$

Внутреннее сопротивление

$$R_{iэ1}=\frac{E_{э1}}{I_{г.\,э1}}=\frac{r_1 r_2}{r_1+r_2}.$$

Эту же величину получили бы, если бы определяли ее как входное сопротивление влево от точек *а-а* (k_1 и k_2 разомкнуты, k_3 замкнут).

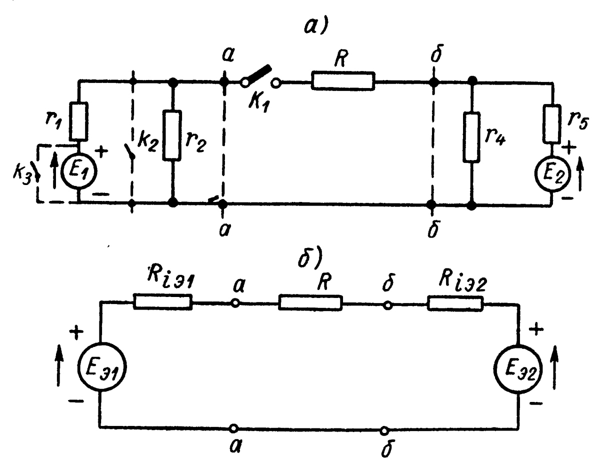


Рис. 2-29. Схема цепи (*а*) и заменяющая ее схема с эквивалентными генераторами э. д. с. (*б*).

Аналогично находятся параметры второго эквивалентного генератора:

$$E_{э2}=\frac{r_4}{r_4+r_5}E_2,$$

$$I_{г.\,э2}=\frac{E_2}{r_5},$$

$$R_{iэ2}=\frac{r_4 r_5}{r_4+r_5}.$$

Теперь согласно схеме рис. 2-29, *б* искомый ток

$$I=\frac{E_{э1}+E_{э2}}{R_{iэ1}+R_{iэ2}+R}. \qquad (2\text{-}55)$$

При суммировании эквивалентных э. д. с. надо, разумеется, учитывать их знаки. В частности, в примере схемы рис. 2-29 они направлены навстречу друг другу (имеют противоположные знаки).

Таким образом, использование теоремы об эквивалентном генераторе позволяет, не прибегая к решению громоздкой системы уравнений, найти ток в заданном пассивном элементе цепи.

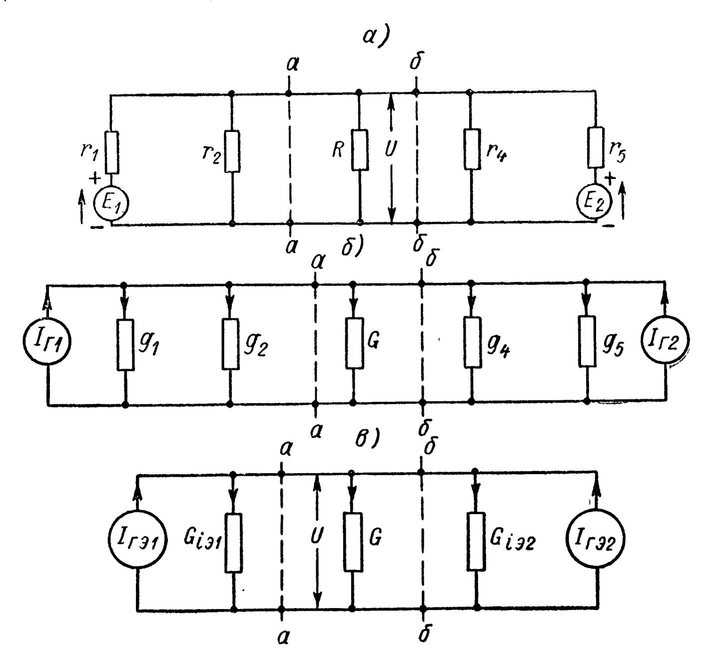


Рис. 2-30. Схемы цепи (*а* и *б*) и заменяющая их схема с эквивалентными генераторами тока (*в*).

Рассмотрим еще вариант схемы рис. 2-30, *а*, в которой, в отличие от схемы рис. 2-29, сопротивление $R=\frac{1}{G}$ включено параллельно точкам *а-а*. Для расчета напряжения U на сопротивлении R в этом случае удобнее применить теорему об эквивалентном генераторе тока.

С этой целью прежде всего заменим генераторы э. д. с. E_1 (с внутренним сопротивлением r_1) и E_2 (с внутренним сопротивлением r_5) генераторами тока $I_{г1}$ и $I_{г2}$ (рис. 2-30, *б*).

После этого нетрудно составить схему (рис. 2-30, *в*) с эквивалентными генераторами тока, в которой токи этих источников

$$I_{г.\,э1}=E_1 g_1, \qquad I_{г.\,э2}=E_2 g_5;$$

внутренние проводимости

$$G_{iэ1}=\frac{1}{R_{iэ1}}=g_1+g_2, \qquad G_{iэ2}=\frac{1}{R_{iэ2}}=g_4+g_5.$$

Искомое напряжение

$$U = \frac{I_{г.э1} + I_{г.э2}}{G_{iэ1} + G_{iэ2} + G}. \qquad (2\text{-}56)$$

Здесь следует также учитывать знаки (направления) токов $I_{г.э1}$ и $I_{г.э2}$.

Для определения режима пассивного двухполюсника (тока, напряжения, расходуемой мощности) обе рассмотренные эквивалентные схемы совершенно равноценны. Выбор той или другой определяется только соображениями простоты расчета.

Однако для расчета мощности, теряемой во внутренних элементах активного двухполюсника, в общем случае ни одна из двух эквивалентных схем непригодна. Как это было показано в § 2-3, только в некоторых частных случаях возможен расчет потерь внутри активного двухполюсника, основанный на полученных эквивалентных схемах.

Так, если потери во внутренних элементах активного двухполюсника отсутствуют при х о л о с т о м х о д е его, расчет потерь и коэффициента полезного действия может быть произведен на основе схемы с генератором э. д. с. Применительно к левому активному двухполюснику схемы рис. 2-29 это справедливо, когда $r_2 \to \infty$ $\left(\frac{r_2}{r_1} \gg 1;\ \frac{r_2}{R} \gg 1\right)$. Тогда $R_{iэ1} \approx r_1$ и мощность, теряемая внутри четырехполюсника, $P_i = I^2 r_1 = I^2 R_{iэ1}$, а к. п. д. при том условии, что этот генератор работает на нагрузку R,

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{r_1}{R}}.$$

Если же внутренних потерь нет при к о р о т к о м з а м ы к а н и и выхода активного четырехполюсника, расчет можно производить на основе схемы с генератором тока. Применительно к схеме рис. 2-29 такие соотношения наблюдаются в том случае, когда $r_2 \to 0$ $\left(\frac{r_1}{r_2} \gg 1;\ \frac{r_1}{R} \gg 1\right)$. Тогда $G_{iэ1} \approx g_2 = \frac{1}{r_2}$ и мощность внутренних потерь $P_i = U^2 g_2 = U^2 G_{iэ1}$, а к. п. д. при условии работы этого генератора на нагрузку G

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{g_2}{G}}.$$

д) Принцип наложения (суперпозиции)

Вернемся к сложной линейной цепи (рис. 2-29, *а*), в состав которой входят два источника энергии. Применяя теорему об эквивалентном генераторе, мы определили ток через сопротивление R на основе эквивалентной схемы рис. 2-29, *б* [см. формулу (2-55)].

Представим себе, что цепь содержит только один генератор э. д. с. E_1, а второй отсутствует (короткозамкнут). Тогда придем к схеме рис. 2-31, *а*. Для расчета тока I', который будет проходить через сопротивление R в этих условиях, опять воспользуемся теоре-

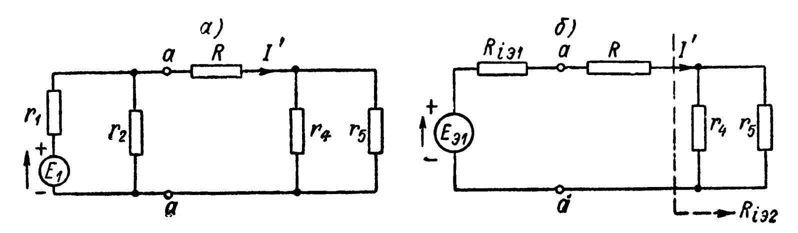


Рис. 2-31. К расчету тока I'.

мой об эквивалентном генераторе э. д. с., чему соответствует схема рис. 2-31, *б*. Здесь внутреннее сопротивление

$$R_{iэ1}=\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}; \tag{2-57}$$

ток

$$I'=\frac{E_{э1}}{R_{iэ1}+R+R_{iэ2}}. \tag{2-58}$$

В формуле (2-58)

$$R_{iэ2}=\frac{r_4r_5}{r_4+r_5}.$$

Предположим далее, что в состав цепи входит только второй генератор э. д. с. E_2, а отсутствует (короткозамкнут) первый гене-

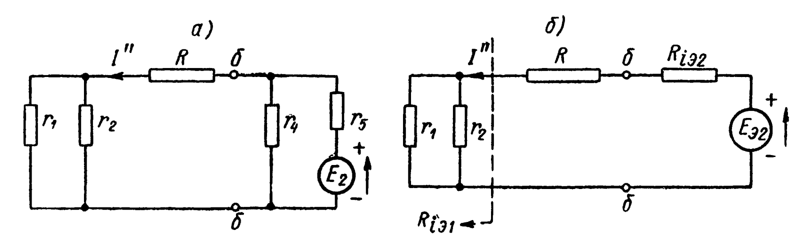


Рис. 2-32. К расчету тока I''.

ратор, т. е. что схема имеет вид рис. 2-32, *а*. Она также на основании теоремы об эквивалентном генераторе может быть заменена эквивалентной схемой рис. 2-32, *б*. Ток, который в этих условиях проходил бы через сопротивление R,

$$I''=\frac{E_{э2}}{R_{iэ2}+R+R_{iэ1}}. \tag{2-59}$$

Сопоставляя (2-55) с выражениями (2-58) и (2-59), приходим к выводу, что

$$I = I' + I'', \tag{2-60}$$

т. е. ток, создаваемый в сопротивлении R совместным действием обоих источников, равен сумме токов, вызываемых каждым из источников в отдельности. [1]

К аналогичному заключению можно прийти из рассмотрения схемы рис. 2-30, в которой источники подключены параллельно сопротивлению нагрузки $R = \frac{1}{G}$.

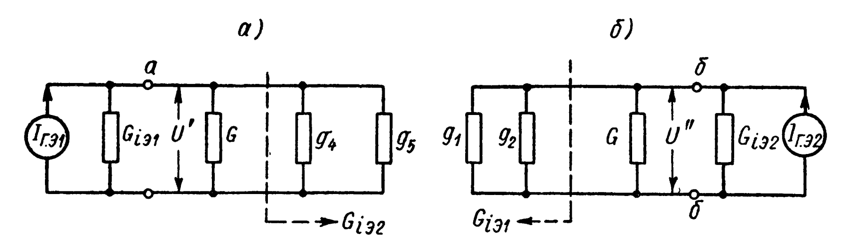


Рис. 2-33. К расчету схемы рис. 2-30 методом наложения.

Предполагая, что в цепи действует только один (левый) источник, а правый отключен, получим в соответствии с эквивалентной схемой рис. 2-33, *а*, что он создает на нагрузке напряжение

$$U' = \frac{I_{г.э1}}{G_{iэ1} + G + G_{iэ2}}, \tag{2-61}$$

где $G_{iэ1} = g_1 + g_2$ — внутренняя проводимость генератора тока $I_{г.э1}$; $G_{iэ2} = g_4 + g_5$ — проводимость разветвления $g_4 - g_5$.

Если в цепи действует только второй (правый) источник, а левый отключен (разомкнут), на нагрузке, как это следует из эквивалентной схемы рис. 2-33, *б*, создается напряжение

$$U'' = \frac{I_{г.э2}}{G_{iэ2} + G + G_{iэ1}}. \tag{2-62}$$

При совместном же действии обоих генераторов напряжение на нагрузке определяется формулой, аналогичной (2-56):

$$U = \frac{I_{г.э1} + I_{г.э2}}{G_{iэ1} + G + G_{iэ2}}.$$

Таким образом,

$$U = U' + U'', \tag{2-63}$$

---

[1] При этом суммировании надо, конечно, учитывать направления (знаки) составляющих токов. В частности, в рассматриваемой схеме токи I' и I'' имеют разные знаки.

т. е. напряжение, создаваемое на сопротивлении $R = \frac{1}{G}$ совместным действием обоих источников, равно сумме напряжений, вызванных каждым источником в отдельности.

Полученные важные выводы справедливы, очевидно, только при условии, что параметры цепи (сопротивления, проводимости) остаются неизменными как при действии каждого из генераторов в отдельности, так и при их совместном воздействии на цепь, т. е. если параметры цепи не зависят от токов и напряжений, что свойственно линейным цепям.

Результат, полученный для цепи, в которой действуют два источника, может быть, по-видимому, распространен на общий случай линейной цепи, находящейся под сложным воздействием многих источников энергии. Для такой цепи может быть сформулирован принцип наложения (суперпозиции): *отклик линейной цепи (системы) на сложное воздействие нескольких источников энергии равен сумме откликов на воздействие каждого источника в отдельности.*

Принцип суперпозиции называют также принципом независимости действия, так как он базируется на том, что каждое слагаемое сложного воздействия на линейную цепь вызывает свой отклик независимо от того, действуют ли в системе другие слагаемые.

Источники воздействия на цепь могут быть заданы или в виде генераторов э. д. с., или в виде генераторов тока. В первом случае при расчете тока (отклика), создаваемого одним из источников, остальные должны быть заменены своими внутренними сопротивлениями, т. е. остальные генераторы э. д. с. должны быть замкнуты накоротко. В том случае, когда источники заданы в виде генераторов тока, напряжение, создаваемое одним из источников, рассчитывают в предположении, что остальные источники заменены своими внутренними проводимостями. Иначе говоря, остальные генераторы тока должны быть отключены (разомкнуты).

Принцип суперпозиции играет очень большую роль в исследовании и расчете линейных систем вообще и линейных радиотехнических цепей в частности.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ (ОБЩАЯ ТЕОРИЯ)

3-1. Общие сведения о гармонических колебаниях

Колебательный процесс называется гармоническим, если мгновенное значение величины u, характеризующей рассматриваемое явление, изменяется во времени по закону

$$u = U\cos(\omega t + \psi) \tag{3-1}$$

или

$$u = U\sin(\omega t + \psi'). \tag{3-2}$$

Обе записи гармонического колебания — (3-1) и (3-2) — равнозначны и иллюстрируются кривыми одинакового вида, отличающимися лишь положением начала координат (началом отсчета времени). Можно перейти от (3-2) к (3-1), полагая $\psi' = \frac{\pi}{2} + \psi$, и, наоборот, от (3-1) к (3-2), считая $\psi = \psi' - \frac{\pi}{2}$. Поэтому гармоническое колебание иначе называют **синусоидальным** (или **косинусоидальным**).

В дальнейшем будем пользоваться преимущественно записью (3-1).

Смысл и значение величин, входящих в (3-1), можно установить, если обратиться к графическому изображению этой зависимости, показанному на рис. 3-1 и называемому **временнóй диаграммой** колебания.

Гармоническое колебание является периодической функцией времени. На рис. 3-1 отмечены **амплитуда** U (максимальный размах) колебания и его **период** $T = \frac{1}{f}$, где f — частота колебания.

Величина

$$\theta_t = \omega t + \psi, \tag{3-3}$$

входящая в (3-1), носит название **текущей фазы** или, короче, **фазы** колебания и представляет собой некоторый угол, величина которого пропорциональна времени t. Постоянная величина ψ называется **начальной фазой**.

Пользуясь (3-3), промежутки времени можно выражать через соответствующие им текущие фазы (углы) и, наоборот, от текущих фаз переходить к значениям времени

$$t = \frac{\theta_t - \psi}{\omega}. \qquad (3\text{-}4)$$

Промежуткам времени T; $2T$ ...; nT (n — любое целое число), очевидно, должны соответствовать углы (текущие фазы), при которых значения функции косинуса периодически повторяются, т. е.

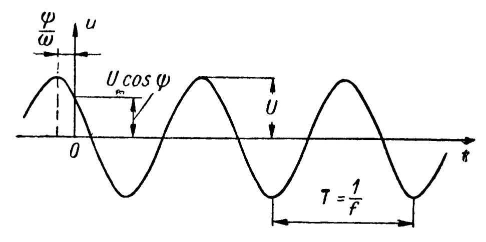


Рис. 3-1. Гармоническое колебание.

$$\cos[\omega(t + nT) + \psi] = \cos[\omega t + \psi + 2n\pi],$$

откуда

$$n\omega T = 2n\pi$$

и

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f. \qquad (3\text{-}5)$$

Величина ω, как видно, пропорциональна частоте f; она носит название угловой частоты.

Из формулы (3-3) следует, что угловая частота является скоростью изменения текущей фазы, т. е.

$$\omega = \frac{d\theta_t}{dt}, \qquad (3\text{-}6)$$

и измеряется в радианах (или градусах) в секунду [*рад/сек*].

Принимая во внимание (1-3), нетрудно выразить угловую частоту через длину волны λ. Получим

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}. \qquad (3\text{-}7)$$

Надо подчеркнуть, что, строго говоря, гармоническим можно считать лишь такое колебание, длительность которого бесконечно велика. Действительно, если при некотором значении времени t' колебание прекращается, то в этот момент условие периодичности $f(t) = f(t + nT)$ нарушается и процесс уже не может считаться периодическим, а стало быть, и гармоническим. Физически осуществимый процесс не может быть бесконечно длительным и поэтому может лишь приближенно рассматриваться как гармонический.

Высказанные соображения свидетельствуют о том, что начало координат временно́й диаграммы или, иначе, начало отсчета вре-

мени $t = 0$ следует понимать в том смысле, что в этот момент начинается наблюдение за процессом, который возник бесконечно давно и будет существовать в последующие моменты времени. Отсюда следует, что начало отсчета времени является в известной мере произвольным.

Из формулы (3-1) и временно́й диаграммы рис. 3-1 видно, что начальное значение функции при $t = 0$ определяется величиной начальной фазы ψ:

$$u_{t=0} = U \cos \psi.$$

Поэтому выбор момента начала наблюдения за процессом (положения начала координат) означает, иными словами, выбор начальной фазы колебания.

Если пользоваться записью (3-1), куда ψ входит со знаком плюс, то положительный знак начальной фазы ($\psi > 0$) означает, что наблюдение за процессом начинается с опозданием на время $t_0 = \frac{\psi}{\omega}$ относительно момента прохождения косинусоиды через положительный максимум. Иначе говоря, при $\psi > 0$ косинусоида (ее положительный максимум) смещена влево от начала координат на угол $|\psi|$. Наоборот, если $\psi < 0$, это означает, что косинусоида сдвинута вправо от начала координат.

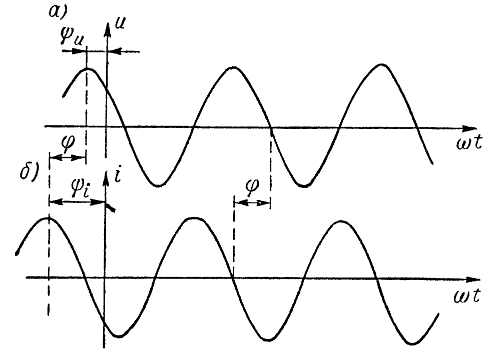


Рис. 3-2. Два сдвинутых по фазе гармонических колебания.

Допустим, что в некоторой системе происходят одновременно два колебания с одинаковой частотой. Первое из них u изменяется по временной диаграмме рис. 3-2, *а*, имея начальную фазу ψ_u, а второе i — согласно рис. 3-2, *б* с начальной фазой ψ_i. Как видно, любая текущая фаза колебания i (в частности, фаза, соответствующая положительному максимуму) наступает раньше, чем та же фаза колебания u. Говорят, что i опережает по фазе u (или u отстает по фазе от i).

Сдвиг фаз φ этих двух колебаний равен разности их начальных фаз:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i. \tag{3-8}$$

При наблюдении за двумя колебаниями можно произвольно выбирать начальную фазу только одного из них. Начальная фаза второго определяется сдвигом фаз между ними.

Положим, что на линейную цепь воздействует несколько гармонических колебаний с одинаковой частотой, но, вообще говоря, с различными начальными фазами.

Обозначая, как это было принято в § 1-4, функцию воздействия через $x(t)$, получим

$$x(t) = X_1 \cos(\omega t + \psi_1) + X_2 \cos(\omega t + \psi_2) + \ldots \quad (3\text{-}9)$$

Для нахождения отклика цепи на это воздействие $y(t)$ надо располагать уравнением, описывающим режим работы системы. В зависимости от устройства цепи это линейное уравнение может быть или алгебраическим, или дифференциальным.

В первом случае получим уравнение вида

$$ay = X_1 \cos(\omega t + \psi_1) + X_2 \cos(\omega t + \psi_2) + \ldots, \quad (3\text{-}10)$$

где a — постоянный коэффициент.

Как известно, линейная комбинация нескольких косинусоидальных величин с одной и той же частотой есть также косинусоидальная величина той же частоты, т. е. решение уравнения (3-9) представляет собой гармоническое колебание

$$y = Y \cos(\omega t + \psi). \quad (3\text{-}11)$$

Если поведение цепи описывается дифференциальным уравнением, то оно в общем случае имеет вид линейного дифференциального уравнения n-го порядка со свободным членом:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)} y}{dt^{(n-1)}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y =$$
$$= X_1 \cos(\omega t + \psi_1) + X_2 \cos(\omega t + \psi_2) + \ldots \quad (3\text{-}12)$$

Здесь a_1, a_2, ..., a_n, a_0 — постоянные коэффициенты.

Стационарному режиму, т. е. режиму, при котором $y(t)$ является периодической функцией времени, соответствует частное решение уравнения (3-12). Как известно из теории дифференциальных уравнений, это решение имеет вид гармонического колебания, выражаемого опять (3-11).

Колебания гармонической формы обладают следующей замечательной особенностью: *если воздействие на линейную систему имеет вид одного или суммы нескольких гармонических колебаний одинаковой частоты, то в стационарном режиме отклики на это воздействие также имеют характер гармонических колебаний той же частоты.*

Это важное свойство линейных систем существенно облегчает расчет цепей, находящихся под гармоническим воздействием. Настоящая глава посвящается специальному изучению таких цепей.

Напряжения и токи, величины которых меняются во времени, можно назвать п е р е м е н н ы м и. Часто под переменным током понимают такой ток, при котором его среднее значение за период равно нулю, т. е.

$$\frac{1}{T} \int_0^T i \, dt = 0.$$

Наконец, иногда, говоря о переменных токах и напряжениях, имеют в виду токи и напряжения, изменяющиеся во времени по гармоническому закону.

Переменные напряжения и токи периодически изменяют свое направление. Одно из направлений напряжения (и соответственно тока) условно считают положительным, а другое — отрицательным.

В электротехнике и радиотехнике применяются различные методы генерирования колебаний синусоидальной формы. Некоторые из них будут рассмотрены ниже, в главе пятнадцатой.

3-2. Векторные диаграммы. Основы символического метода

Гармонические колебания могут быть графически представлены в виде временны́х диаграмм, рассмотренных в предыдущем параграфе. Однако пользование ими во многих случаях малоудобно, особенно если надо представить на графике несколько сдвинутых по фазе колебаний. Значительно проще и удобнее пользоваться так называемыми **векторными диаграммами**.

Представим себе некоторый условный (символический) вектор (рис. 3-3, *а*), величина которого в известном масштабе равна амплитуде изучаемого колебания U. Вектор этот вращается в плоскости чертежа против часовой стрелки с неизменной угловой скоростью ω. Если за исходное положение вектора будем принимать его горизонтальное расположение, то в некоторый произвольный момент t вектор составит с горизонталью угол $\theta_t = \omega t$. Проекция его на горизонталь

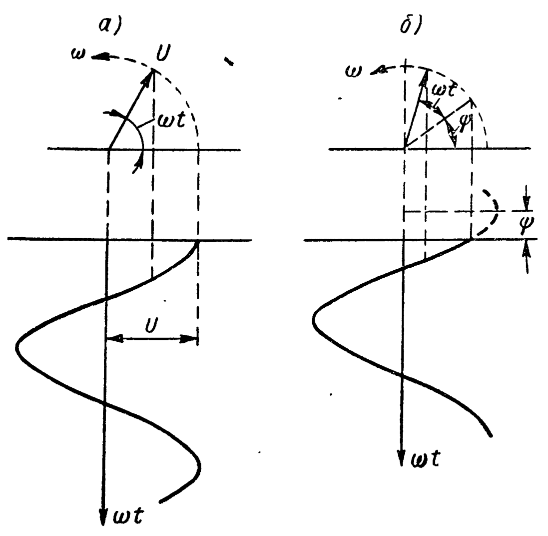


Рис. 3-3. Связь между временны́ми и векторными диаграммами.

$$u = U \cos \omega t,$$

т. е. равна мгновенному значению величины, изменяющейся во времени по закону косинуса.

Если исходное направление вектора составляет угол ψ с горизонталью, то, как видно из рис. 3-3, *б*, угол $\theta_t = \omega t + \psi$ и мгновенная проекция вектора на горизонталь будет

$$u = U \cos(\omega t + \psi),$$

что соответствует мгновенному значению косинусоидального колебания с начальной фазой ψ.

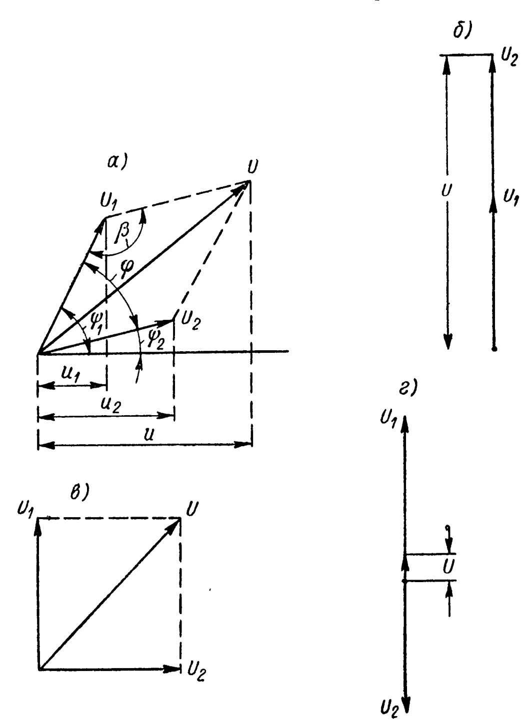


Рис. 3-4. Векторные диаграммы суммы двух гармонических колебаний.

Пусть требуется сложить два гармонических колебания одинаковой частоты с различными начальными фазами ψ_1 и ψ_2, т. е. сдвинутых между собой по фазе на некоторый угол φ. Для этого надо сложить мгновенные проекции на горизонталь двух векторов, соответствующих этим колебаниям. Однако сумма проекций двух векторов равна проекции их геометрической суммы. Поэтому (рис. 3-4, *а*) для сложения двух колебаний u_1 и u_2 сперва находим геометрическую сумму векторов U_1 и U_2; получаем вектор U, величина которого

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 - 2U_1U_2 \cos \beta} = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2 \cos \varphi}, \quad (3\text{-}13)$$

где $\varphi = \psi_1 - \psi_2$ — угол сдвига фаз.

Проекция вектора U на горизонталь в каждый момент времени дает мгновенное значение u. В том частном случае, когда $\varphi = 0$ (рис. 3-4, *б*),

$$U = U_1 + U_2,$$

т. е. амплитуда результирующего колебания равна арифметической сумме амплитуд составляющих колебаний.

Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то (рис. 3-4, *в*)

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2}.$$

При $\varphi = \pi$ (рис. 3-4, *г*)

$$U = U_1 - U_2;$$

амплитуда результирующего колебания равна арифметической разности амплитуд слагающих колебаний.

Итак, вместо изображения временных диаграмм процесса, можно пользоваться условными вращающимися векторами, величины которых пропорциональны амплитудам колебаний, а взаимное расположение соответствует фазовому сдвигу между ними. Можно мысленно представить себе, что сам наблюдатель вращается против часовой стрелки с угловой скоростью ω; тогда все векторы будут представляться ему неподвижными.

Построения и расчеты на векторных диаграммах можно производить чисто графическим путем. Но графические расчеты всегда оказываются трудоемкими и недостаточно точными. Имеется возможность расчеты, базирующиеся на векторных диаграммах, производить аналитически, не сопровождая их обязательными графическими построениями.

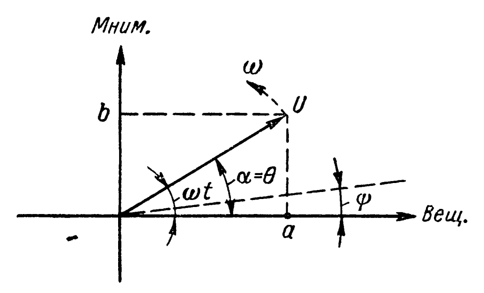


Рис. 3-5. Вращающийся символический вектор на комплексной плоскости.

С этой целью надо представить себе, что символический вектор U расположен на комплексной плоскости (рис. 3-5). Как известно, всякая точка на комплексной плоскости, в частности точка конца нашего вектора, может быть математически условно представлена (символизирована) комплексным числом $u_к$, которому соответствует вектор U.

Комплексное число можно записать в трех формах.

Первая форма записи — алгебраическая:

$$u_к = a + jb, \tag{3-14}$$

где $j = \sqrt{-1}$.

Вещественная часть комплексного числа a представляет собой проекцию вектора U на ось вещественных величин, т. е.

$$a = U \cos \alpha = \mathrm{Re}\,(u_к).$$

Символ Re происходит от латинского слова Real, что означает «действительный» (вещественный).

Коэффициент при j мнимой части комплексного числа b равен проекции вектора U на ось мнимых величин, т. е.

$$b = U \sin \alpha = \mathrm{Im}\,(u_к).$$

Символ Im происходит от слова Imaginare, что означает «мнимый».

Из приведенных соотношений следует вторая — тригонометрическая — форма записи комплексного числа:

$$u_к = U(\cos\alpha + j\sin\alpha). \tag{3-15}$$

Наконец, если мы примем во внимание формулу Эйлера

$$\cos\alpha + j\sin\alpha = e^{j\alpha},$$

получим третью — показательную — форму записи комплексного числа:

$$u_к = Ue^{j\alpha}. \tag{3-16}$$

Величина, или модуль, вектора U находится как

$$U = \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{3-17}$$

а аргумент α определяется одним из трех выражений:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{a}{U}, \\ \sin\alpha &= \frac{b}{U}, \\ \operatorname{tg}\alpha &= \frac{b}{a}. \end{aligned}\right\} \tag{3-18}$$

Вектор U, условно изображающий гармонически изменяющуюся во времени величину $u = U\cos(\omega t + \psi)$, не остается неподвижным, а вращается на комплексной плоскости против часовой стрелки с угловой скоростью ω. Это означает, что аргумент комплексного числа α является функцией времени:

$$\alpha = \theta_t = \omega t + \psi,$$

так же, как и сам комплекс $u_к = u_к(t)$.

Поэтому число, символизирующее вращающийся вектор, выразится так:
если применить показательную форму записи,

$$u_к(t) = Ue^{j(\omega t + \psi)} = Ue^{j\psi}e^{j\omega t}, \tag{3-19}$$

а если применить тригонометрическую форму записи,

$$u_к(t) = U\cos(\omega t + \psi) + jU\sin(\omega t + \psi). \tag{3-20}$$

Величину $u_к(t)$ называют текущим, или мгновенным, комплексом. Она является условным, символическим изображением мгновенного значения гармонического колебания.

Комплексное число

$$\dot{U} = Ue^{j\psi} \tag{3-21}$$

является постоянной величиной, не зависящей от времени; ее называют комплексной амплитудой. Она изображается

неподвижным вектором, численно равным амплитуде U и расположенным на комплексной плоскости под углом ψ к вещественной оси (рис. 3-6). Таким образом, модуль комплексной амплитуды равен действительной амплитуде: $|\boldsymbol{U}| = U$.

В частном случае начальная фаза ψ может быть равна нулю ($\psi = 0$) и тогда комплексная амплитуда $\boldsymbol{U} = U$, т. е. вектор $\boldsymbol{U}$ направлен вдоль оси вещественных значений.

С учетом (3-21) выражение текущего комплекса можно представить в виде

$$u_к(t) = \boldsymbol{U}e^{j\omega t}. \qquad (3\text{-}22)$$

Для того чтобы от мгновенного комплекса перейти к действительному мгновенному значению u, выражаемому косинусоидальной функцией времени (3-1), надо спроектировать вращающийся вектор на вещественную ось; тогда

$$u = \mathrm{Re}[u_к(t)] = \mathrm{Re}[\boldsymbol{U}e^{j\omega t}] \qquad (3\text{-}23)$$

или, иначе [см. (3-20)],

$$u = U\cos\alpha = U\cos(\omega t + \psi).$$

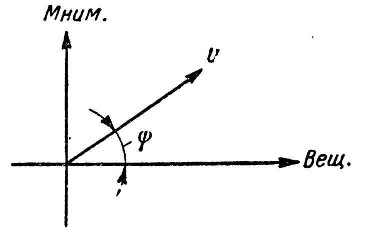


Рис. 3-6. Вектор $\boldsymbol{U}$ на комплексной плоскости.

Как было отмечено в § 3-1, иногда гармоническое колебание представляют в виде синусоидальной (а не косинусоидальной) функции времени [см. (3-2)]. Тогда мгновенное значение колебания будет равно проекции вращающегося вектора на мнимую, а не на вещественную ось, т. е.

$$u = \mathrm{Im}[u_к(t)] = U\sin(\omega t + \psi'). \qquad (3\text{-}24)$$

Из сказанного следует, что было бы, разумеется, неверным приравнивать мгновенное значение u мгновенному комплексу $u_к(t)$, так как последний есть комплексное число, которое условно изображает гармонически изменяющуюся величину и не может быть ей равным. Однако переход от действительных мгновенных значений к текущим комплексам и обратно может быть легко выполнен на основе приведенных соотношений. Все необходимые для расчета цепи вычисления могут быть произведены над комплексными числами. После этого полученный в символическом виде результат можно вновь представить в виде действительных мгновенных значений гармонических величин, используя выражение (3-23) или (3-24). Такой прием, как увидим, существенно упрощает расчеты цепей при гармоническом воздействии.

В связи с этим полезно рассмотреть некоторые основные расчетные операции, которые приходится производить над комплексными числами при исследовании цепей переменного тока.

1. Если требуется произвести сложение (или вычитание) двух гармонических колебаний:

$$u_1 = U_1 \cos(\omega t + \psi_1) \quad \text{и} \quad u_2 = U_2 \cos(\omega t + \psi_2),$$

то прежде всего действительные мгновенные значения u_1 и u_2 заменяем мгновенными комплексами

$$u_{к1} = \boldsymbol{U}_1 e^{j\omega t} = U_1 e^{j\psi_1} e^{j\omega t}$$

и

$$u_{к2} = \boldsymbol{U}_2 e^{j\omega t} = U_2 e^{j\psi_2} e^{j\omega t},$$

после чего находим сумму

$$u_{к1} + u_{к2} = (\boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{U}_2) e^{j\omega t}.$$

Таким образом, в результате сложения (или вычитания) получаем новое гармоническое колебание, символическое изображение (текущий комплекс) которого будет

$$u_к = \boldsymbol{U} e^{j\omega t} = (\boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{U}_2) e^{j\omega t}. \tag{3-25}$$

Отсюда видно, что результирующее колебание имеет ту же частоту ω, что и составляющие, а комплексная амплитуда его равна сумме (или разности) комплексных амплитуд $\boldsymbol{U}_1$ и $\boldsymbol{U}_2$:

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{U}_2. \tag{3-26}$$

Сложение векторов, символизирующих числа $\boldsymbol{U}_1$ и $\boldsymbol{U}_2$, производится геометрически, как это показано на рис. 3-4, *а*, так что модуль $|\boldsymbol{U}|$, т. е. амплитуда колебания,

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2\cos\varphi}, \tag{3-27}$$

где $\varphi = \psi_1 - \psi_2$.

Чтобы найти начальную фазу ψ результирующего колебания, комплексные амплитуды $\boldsymbol{U}_1$ и $\boldsymbol{U}_2$ следует представить в тригонометрической форме:

$$\boldsymbol{U}_1 = U_1 \cos\psi_1 + jU_1 \sin\psi_1,$$
$$\boldsymbol{U}_2 = U_2 \cos\psi_2 + jU_2 \sin\psi_2;$$

тогда

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{U}_2 = U_1\cos\psi_1 + U_2\cos\psi_2 + j[U_1\sin\psi_1 + U_2\sin\psi_2]$$

и в соответствии с (3-18)

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{U_1\sin\psi_1 + U_2\sin\psi_2}{U_1\cos\psi_1 + U_2\cos\psi_2}. \tag{3-28}$$

Таким образом, мгновенное значение суммарного колебания согласно (3-23) будет

$$u = \operatorname{Re}[\boldsymbol{U} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[U e^{j(\omega t + \psi)}] = U\cos(\omega t + \psi),$$

где U определяется из (3-27), а угол ψ из (3-28).

Из сказанного следует, что при сложении мгновенных комплексов множитель $e^{j\omega t}$ можно опускать и производить все операции над комплексными амплитудами, что дает возможность получить амплитуду и фазу результирующего колебания. После этого возможно рассчитать и мгновенное значение u, использовав (3-23).

2. Умножение текущего комплекса $u_к$ на постоянное вещественное число A дает

$$Au_к = AUe^{j\omega t} = AUe^{j(\omega t+\psi)}, \qquad (3\text{-}29)$$

т. е. приводит к новому колебанию, комплексная амплитуда которого увеличена в A раз (рис. 3-7, *а*). Это означает, что частота и начальная фаза колебания остаются неизменными, а амплитуда его увеличивается в A раз.

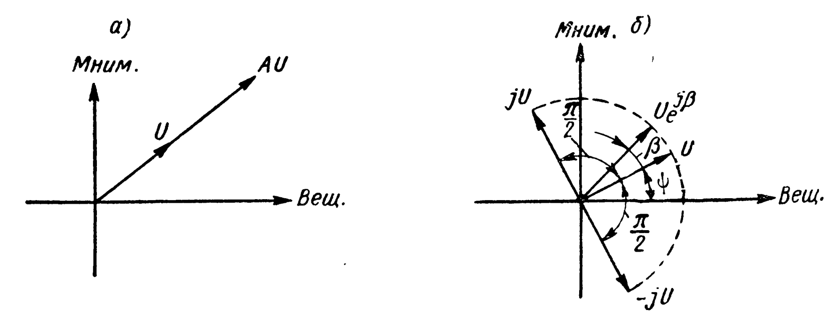


Рис. 3-7. Умножение символического вектора на постоянное число.

Согласно формуле Эйлера

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j\sin\frac{\pi}{2} = j.$$

Поэтому, умножив мгновенный комплекс на $j = \sqrt{-1}$, получим

$$ju_к = jUe^{j\omega t} = Ue^{j\left(\psi+\frac{\pi}{2}\right)}e^{j\omega t}. \qquad (3\text{-}30)$$

Вектор комплексной амплитуды, оставаясь неизменным по величине, поворачивается на $\pi/2$ в сторону опережения (против часовой стрелки), как показано на рис. 3-7, *б*. Результирующее колебание при неизменной частоте и амплитуде имеет начальную фазу на угол $\pi/2$ бóльшую, нежели исходная.

Умножение комплекса на $-j$ означает поворот вектора U по стрелке часов на угол $\pi/2$ (рис. 3-7, *б*).

Если $u_к$ умножается на $e^{j\beta}$, то это означает операцию поворота вектора U на угол β, что тоже показано на рис. 3-7, *б*.

Наконец, умножение текущего комплекса на постоянное комплексное число $Ce^{j\beta}$ приводит к комплексу, символизирующему

новое колебание той же частоты, амплитуда которого в C раз больше, а начальная фаза увеличена на угол β.

Как видно, при умножении текущего комплекса на постоянное (в общем случае — комплексное) число все операции так же, как в случае сложения, можно производить над комплексными амплитудами, т. е. отбрасывать при расчетах величину $e^{j\omega t}$, вводя ее в качестве множителя в конечный результат.

3. Пусть требуется найти производную по времени u' гармонической функции

$$u = U\cos(\omega t + \psi) = \operatorname{Re}[u_\text{к}].$$

Так как

$$u' = \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}[\operatorname{Re}(u_\text{к})] = \operatorname{Re}\left[\frac{du_\text{к}}{dt}\right],$$

найдем сначала производную текущего комплекса $du_\text{к}/dt$; вещественная часть полученной таким путем комплексной величины равна мгновенному значению u'. Дифференцируя $u_\text{к}$ по времени, получим

$$\frac{du_\text{к}}{dt} = \frac{d}{dt}[\boldsymbol{U}e^{j\omega t}] = j\omega \boldsymbol{U}e^{j\omega t} = \boldsymbol{U}'e^{j\omega t}, \qquad (3\text{-}31)$$

т. е. для нахождения производной исходный текущий комплекс следует у м н о ж и т ь н а $j\omega$.

Комплексная амплитуда производной по времени от гармонической функции $\boldsymbol{U}' = j\omega \boldsymbol{U}$ символизируется вектором, в ω раз бо́льшим исходного и повернутым относительно него на угол $\pi/2$ против часовой стрелки.

Аналогично решается задача интегрирования по времени гармонической функции

$$u = \operatorname{Re}[\boldsymbol{U}e^{j\omega t}].$$

Имеем

$$u_i = \int u\,dt = \int \operatorname{Re}[\boldsymbol{U}e^{j\omega t}]\,dt = \operatorname{Re}\left[\int \boldsymbol{U}e^{j\omega t}dt\right] = \operatorname{Re}\left[\int u_\text{к}\,dt\right].$$

Находим символическое изображение интеграла (полагаем постоянную интегрирования $C = 0$)

$$\int u_\text{к}\,dt = \int \boldsymbol{U}e^{j\omega t}dt = \frac{1}{j\omega}\boldsymbol{U}e^{j\omega t} = \boldsymbol{U}_i e^{j\omega t}. \qquad (3\text{-}32)$$

Таким образом, для нахождения интеграла исходный мгновенный комплекс надо р а з д е л и т ь н а $j\omega$. Вещественная часть полученной таким путем комплексной величины равна искомому значению u_i.

Комплексная амплитуда интеграла гармонической функции

$$\boldsymbol{U}_i = \frac{1}{j\omega}\boldsymbol{U} = -j\frac{\boldsymbol{U}}{\omega}$$

изображается вектором, в ω раз меньшим исходного и повернутым на угол $\pi/2$ по часовой стрелке.

Итак, благодаря применению символического метода, т. е. представлению гармонических величин их условными комплексными изображениями, оказывается возможным заменить операции дифференцирования и интегрирования умножением и делением мгновенного комплекса на оператор $j\omega$. В этом заключается большое достоинство рассматриваемого метода, позволяющее алгебраизировать интегро-дифференциальные уравнения и тем самым существенно упрощать их решение.

Заметим, что операции дифференцирования и интегрирования можно производить над комплексными амплитудами, опуская временной множитель $e^{j\omega t}$ и вводя его, если это требуется, в конечный результат.

4. Рассмотренные правила расчетных операций не могут быть распространены на случаи умножения и деления мгновенных комплексов, так как

$$\operatorname{Re}(\boldsymbol{U}_1 e^{j\omega t})\operatorname{Re}(\boldsymbol{U}_2 e^{j\omega t}) \neq \operatorname{Re}(\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_2 e^{j2\omega t})$$

и

$$\frac{\operatorname{Re}(\boldsymbol{U}_1 e^{j\omega t})}{\operatorname{Re}(\boldsymbol{U}_2 e^{j\omega t})} \neq \operatorname{Re}\left(\frac{\boldsymbol{U}_1 e^{j\omega t}}{\boldsymbol{U}_2 e^{j\omega t}}\right).$$

Однако в практике использования символического метода для расчета электрических цепей приходится часто производить умножение и деление постоянных комплексных чисел. При выполнении этих операций удобно пользоваться показательной формой записи комплексных чисел.

Так, умножение двух комплексных чисел

$$\boldsymbol{A} = Ae^{j\alpha} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{B} = Be^{j\beta}$$

дает

$$\boldsymbol{AB} = ABe^{j(\alpha+\beta)} = Ce^{j\gamma}, \tag{3-33}$$

т. е. в результате получается число, которое символизируется вектором, имеющим величину $C = AB$ и фазовый угол $\gamma = \alpha + \beta$.

В случае деления

$$\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}} = \frac{A}{B} e^{j(\alpha-\beta)} = De^{j\nu} \tag{3-34}$$

вектор, условно изображающий частное $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B}$, имеет величину $D = \frac{A}{B}$ и фазовый угол $\nu = \alpha - \beta$.

В заключение полезно напомнить, что два комплексных числа называются **сопряженными**, если их вещественные части равны, а мнимые отличаются только знаком или, иначе говоря, если их модули одинаковы, а фазовые углы равны по величине, но противоположны по знаку:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= B + jC = Ae^{j\psi}, \\ \hat{\boldsymbol{A}} &= B - jC = Ae^{-j\psi}. \end{aligned}\right\} \tag{3-35}$$

Произведение двух сопряженных комплексных чисел

$$A\hat{A}=A^2, \tag{3-36}$$

т. е. представляет собой число, равное квадрату модуля комплексного числа.

3-3. Элементарные цепи переменного тока

Одна из важнейших задач теории электрических цепей заключается в нахождении отклика цепи на заданное воздействие. Последнее в случае цепей переменного тока обычно задается в виде гармонически изменяющегося во времени напряжения, амплитуда, частота и начальная фаза которого известны. Искомыми откликами являются в зависимости от постановки задачи либо токи в участках цепи, либо напряжения на отдельных ее элементах. При гармоническом воздействии на линейную цепь все токи и напряжения, как было показано в § 3-1, также имеют форму гармонических колебаний. Поэтому задача расчета цепи сводится к нахождению амплитуд и начальных фаз этих колебаний.

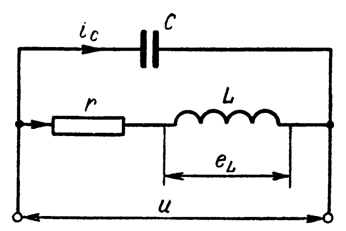


Рис. 3-8. Схема участка цепи.

В отличие от стационарного режима цепей постоянного тока, при анализе процессов в цепях переменного тока принципиально необходимо учитывать не только сопротивления, но также емкости и индуктивности, входящие в состав цепи.

Действительно, обращаясь к рассмотренной в § 1-4 схеме участка цепи (рис. 3-8), можем отметить, что в случае переменного тока

$$\frac{di}{dt}\neq 0 \quad \text{и} \quad \frac{du}{dt}\neq 0.$$

Поэтому э. д. с. самоиндукции, индуктируемая переменным магнитным полем в индуктивности L,

$$e_L=-L\frac{di}{dt}\neq 0$$

и ток смещения через емкость C, определяемый переменным электрическим полем,

$$i_C=C\frac{du}{dt}\neq 0.$$

Отсюда следует, что индуктивность и емкость оказывают существенное влияние на режим цепи переменного тока.

Однако в некоторых случаях влияние переменного магнитного (или электрического) поля на режим цепи оказывается незначи-

тельным. Тогда приближенно этим влиянием можно пренебречь и, стало быть, не принимать во внимание индуктивность (или соответственно емкость) цепи.

Будем называть э л е м е н т а р н ы м и цепями переменного тока такие идеализированные цепи, схемы которых состоят из источника гармонических колебаний и одного из трех элементов: сопротивления r, емкости C или индуктивности L.

Пользуясь первой из этих схем, пренебрегаем влиянием переменного электромагнитного поля на процессы в цепи, но учитываем потери энергии, связанные с прохождением тока проводимости; во второй учитываем только влияние электрического поля на явления в цепи и делаем допущение об отсутствии потерь энергии в цепи; наконец, в третьей схеме предполагаем отсутствие потерь энергии и учитываем только действие переменного магнитного поля на процессы в цепи.

а) Элементарная цепь активного сопротивления

К сопротивлению r (рис. 3-9) подведено напряжение, изменяющееся во времени по гармоническому закону

$$u = U \cos(\omega t + \psi_u).$$

Так как в рассматриваемой схеме переменные электрическое и магнитное поля не учитываются, процесс в цепи может рассматриваться как серия следующих во времени «стационарных» режимов

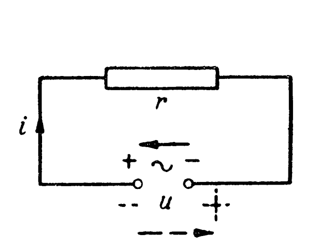


Рис. 3-9. Элементарная цепь активного сопротивления.

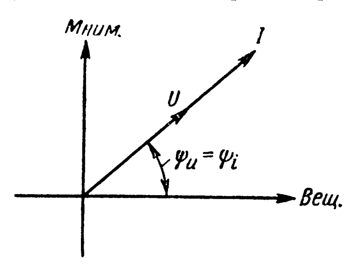


Рис. 3-10. Векторная диаграмма цепи активного сопротивления.

постоянного тока, каждый из которых соответствует мгновенному значению приложенного напряжения. Поэтому для каждого момента времени справедлив закон Ома [см. (1-29)] и мгновенное значение тока в цепи

$$i = \frac{u}{r} = \frac{U}{r} \cos(\omega t + \psi_u) = I \cos(\omega t + \psi_i). \qquad (3\text{-}37)$$

Направление тока и полярность напряжения при гармонических колебаниях изменяются много раз в секунду. Поэтому стрелки и знаки (плюс, минус), проставляемые на схемах, условны; направ-

ления, ими указываемые, называются условно положительными.

При выбранных на схеме рис. 3-9 условно положительных направлениях напряжение $u = ir$. Если же одно из направлений (например, полярность напряжения) изменить на обратное (пунктир на рис. 3-9), то следует считать $u = -ir$.

Из (3-37) видно, что амплитуда тока

$$I = \frac{U}{r}, \tag{3-38}$$

а начальные фазы тока ψ_i и напряжения ψ_u равны между собой:

$$\psi_i = \psi_u = \psi;$$

разность фаз между напряжением и током

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 0,$$

т. е. напряжение и ток совпадают по фазе. Это положение иллюстрируется векторной диаграммой рис. 3-10.

Произведем теперь тот же расчет, пользуясь символическим методом.

Мгновенные комплексы напряжения и тока

$$u_к = \boldsymbol{U} e^{j\omega t} \quad \text{и} \quad i_к = \boldsymbol{I} e^{j\omega t}.$$

Здесь $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{I}$ — комплексные амплитуды напряжения и тока;

$$\boldsymbol{U} = U e^{j\psi_u}, \quad \boldsymbol{I} = I e^{j\psi_i} = \frac{U}{r} e^{j\psi_i}.$$

Отношение комплексных амплитуд напряжения и тока носит наименование комплексного сопротивления и обозначается буквой Z;

$$Z = \frac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{I}} = \frac{U e^{j\psi_u}}{I e^{j\psi_i}} = z e^{j\varphi}. \tag{3-39}$$

Здесь $\frac{U}{I} = z$ — модуль комплексного сопротивления;

$\varphi = \psi_u - \psi_i$ — его аргумент (фазовый угол), равный углу сдвига фаз между напряжением и током.

Сопротивление Z, являющееся отношением двух комплексных чисел, вообще говоря, величина комплексная. Однако в рассматриваемой цепи углы ψ_u и ψ_i равны между собой. Поэтому в данном частном случае Z — величина вещественная, равная сопротивлению r, т. е.

$$Z = \frac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{I}} = r. \tag{3-40}$$

Величина, обратная комплексному сопротивлению, называется комплексной проводимостью и обозначается Y;

$$Y=\frac{1}{Z}=\frac{I}{U}=\frac{Ie^{j\psi_i}}{Ue^{j\psi_u}}=ye^{j\varphi_y}=ye^{-j\varphi}.$$

Здесь $\frac{I}{U}=y$ — модуль комплексной проводимости;

$\varphi_y=-\varphi$ — ее аргумент.

Для изучаемой простейшей цепи проводимость вещественна:

$$Y=\frac{I}{U}=\frac{1}{r}=g. \qquad (3\text{-}41)$$

Комплексные величины Z и Y символизируются векторами. В рассматриваемом случае оба они направлены вдоль вещественной оси (рис. 3-11).

На рис. 3-12 приведены временны́е диаграммы, иллюстрирующие процессы в цепи с сопротивлением. Синусоидальные функции, изображающие мгновенные значения напряжения u и тока i, совпадают по фазе (рис. 3-12, *а*).

В сопротивлении r необратимо расходуется энергия. Мгновенная скорость поступления энергии в цепь, т. е. мгновенная мощность

$$p=ui. \qquad (3\text{-}42)$$

Подставляя сюда (3-37), получим

$$p=I^2r\cos^2(\omega t+\psi)=$$
$$=\frac{I^2r}{2}[1+\cos 2(\omega t+\psi)]. \qquad (3\text{-}43)$$

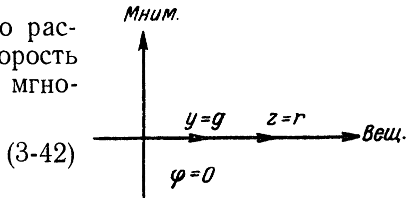


Рис. 3-11. Диаграмма сопротивления и проводимости.

Мгновенная мощность изменяется во времени с частотой 2ω.

На рис. 3-12, *б* показана кривая изменения мгновенной мощности p в функции времени. Мощность остается неизменно положительной, достигая максимального значения

$$I^2r=P_{\text{макс}}. \qquad (3\text{-}44)$$

Найдем среднее значение мощности за период. Для этого надо рассчитать интеграл

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T i^2r\,dt. \qquad (3\text{-}45)$$

Подставляя сюда вместо p его значение из (3-43), получим

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T \frac{I^2r}{2}[1+\cos 2(\omega t+\psi)]\,dt=\frac{I^2r}{2}.$$

Среднее значение расходуемой мощности называют **активной мощностью**

$$P = \frac{P_{\text{макс}}}{2} = \frac{I^2 r}{2} = \frac{UI}{2}. \qquad (3\text{-}46)$$

Для лучшего уяснения энергетических процессов в изучаемой цепи рассмотрим электромагнитное поле между зажимами *а-а* генератора, питающего сопротивление *r* (рис. 3-12, *в*).[1] В течение того полупериода, когда *u* и *i* имеют положительный знак, силовые линии электрического поля E в пространстве между зажимами *а-а* направлены слева направо, а магнитные силовые линии *H* из-за плоскости чертежа. Вектор Пойнтинга П направлен сверху вниз, т. е. к нагрузке. Скорость же изменения переносимой электромагнитным полем энергии, т. е. мощность, непрерывно меняется от нуля до максимума и вновь до нуля.

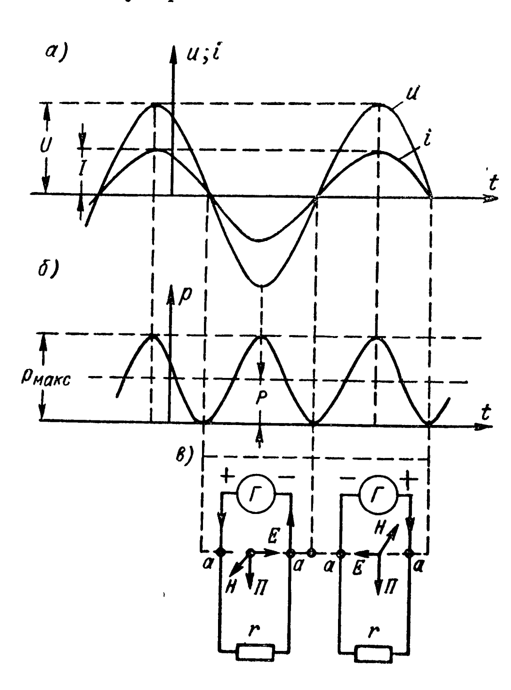


Рис. 3-12. Режим цепи активного сопротивления.

В следующий полупериод как напряжение, так и ток одновременно меняют направление на обратное. Поэтому и направления векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ также изменяются. Однако вектор $\overline{П}$ остается направленным по-прежнему от генератора к сопротивлению нагрузки.

Таким образом, в цепи с сопротивлением происходит непрерывное движение электромагнитного поля всегда в одном направлении от генератора к нагрузке, где энергия поля необратимо расходуется.

При расчете цепей переменного тока пользуются понятием **действующего** значения тока.

Действующим (или эффективным) значением переменного тока $I_д$ называется величина такого постоянного тока, который выделяет в данном сопротивлении ту же мощность, какая в нем расходуется при прохождении переменного тока.

[1] Влияние электрического и магнитного полей других участков цепи на процессы в системе по-прежнему не учитываем.

Нетрудно установить связь между амплитудой переменного гармонического тока I и его действующим значением $I_д$.[1] Для этого следует приравнять мощность $I_д^2 r$, выделяемую постоянным током $I_д$ в сопротивлении r, и среднюю (активную) мощность переменного тока [см. (3-46)]. Получим

$$I_д^2 r = \frac{I^2 r}{2},$$

откуда

$$I_д = \frac{I}{\sqrt{2}}. \qquad (3\text{-}47)$$

Из определения понятия действующего значения тока следует, что энергия, выделяемая в сопротивлении r за период,

$$I_д^2 r T = \int_0^T i^2 r \, dt,$$

откуда

$$I_д = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 \, dt}. \qquad (3\text{-}48)$$

На этом основании действующее значение тока называют среднеквадратичным. Если мы применим формулу (3-48) к гармоническому току, т. е. подставим в подынтегральное выражение вместо i его значение (3-37), то опять получим соотношение (3-47).

Наряду с действующим значением тока пользуются понятием действующего значения напряжения, которое связано с амплитудой напряжения соотношением

$$U_д = \frac{U}{\sqrt{2}}. \qquad (3\text{-}49)$$

Имея в виду (3-47) и (3-49), активную мощность можно выразить через действующие значения тока и напряжения:

$$P = I_д^2 r = U_д I_д = \frac{U_д^2}{r}. \qquad (3\text{-}50)$$

Сопротивление r участка цепи переменному току называют активным сопротивлением. Ему можно на основании (3-50) и (3-46) дать определение, аналогичное тому, которое было дано в главе первой [формула (1-22)].

Активным сопротивлением цепи называется отношение расходуемой в ней средней (активной) мощности к квадрату действующего значения переменного тока, проходящего в цепи:

$$r = \frac{P}{I_д^2} = \frac{2P}{I^2}. \qquad (3\text{-}51)$$

[1] Иногда пользуются иными обозначениями: амплитуды тока, напряжения и др. обозначают I_m, U_m и т. п., а их действующие значения I, U.

б) Активное сопротивление на высоких частотах

Активное сопротивление проводника превышает его же сопротивление постоянному току, которое в отличие от активного называется омическим сопротивлением и определяется формулой (1-25). Разница в величинах активного и омического сопротивлений данного проводника зависит от частоты переменного тока и при высоких частотах может быть весьма значительной. Это объясняется тремя основными причинами.

1. Одна из причин кроется в явлении поверхностного эффекта. На рис. 3-13 показано поперечное сечение прямолинейного уединенного провода. Хотя в настоящем рассмотрении мы пренебрегали влиянием магнитного поля на процессы в цепи, однако в действительности с проводником при прохождении тока связано магнитное поле, силовые линии которого имеют вид концентрических окружностей, изображенных пунктиром на рис. 3-13. Магнитный поток состоит из внешнего потока, силовые линии которого замыкаются в пространстве вне провода, и внутреннего, заключенного внутри сечения провода.

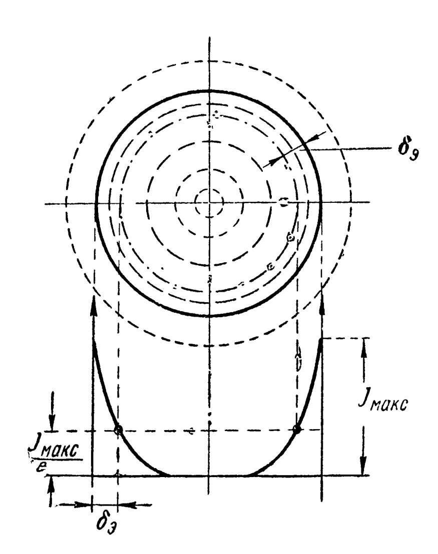


Рис. 3-13. Распределение плотности тока по сечению провода.

При переменном токе магнитное поле тоже переменно, в силу чего в толще проводника индуктируются э. д. с., под действием которых возникают токи, стремящиеся согласно закону Ленца противодействовать вызвавшей их причине, т. е. уменьшающие первоначальный ток.

«Нити тока», параллельные оси провода и расположенные на его наружной поверхности, окружены только силовыми линиями внешнего потока, в то время как по мере углубления внутрь провода нити, параллельные его оси, оказываются связанными (сцепленными) не только с силовыми линиями внешнего потока, но и с частью силовых линий внутреннего потока. Наконец, с осью провода связан весь магнитный поток. Отсюда следует, что наведенные э. д. с., а значит, и вызванные ими токи, будут бо̀льшими в точках, расположенных ближе к центру поперечного сечения проводника, чем к периферии. Поэтому плотность результирующего тока у поверхности проводника больше, чем в центре его поперечного сечения, т. е. ток распределяется по сечению неравномерно. Неравномерность

эта, естественно, возрастает с частотой, так как при больших частотах велика производная магнитного потока по времени и, стало быть, велика индуктированная э. д. с. При радиочастотах в центральной части сечения ток почти полностью отсутствует. В этом и заключается явление поверхностного эффекта.

Плотность тока j по мере удаления от поверхности проводника убывает. На рис. 3-13 характер распределения плотности тока по площади поперечного сечения показан в виде кривых j в функции расстояния от поверхности проводника δ. Можно условно назвать эквивалентной глубиной проникновения $\delta_э$ такое расстояние от поверхности провода, на котором плотность тока составляет $1/e$-ю (e — основание натуральных логарифмов) долю от своего максимального значения $j_{макс}$.

Строгая теория поверхностного эффекта дает в случае плоского проводника для величины $\delta_э$ значение

$$\delta_э = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \ [м], \qquad (3\text{-}52)$$

где $\omega = 2\pi f$ — угловая частота, $1/сек$;

μ — магнитная проницаемость, $гн/м$;

σ — удельная проводимость материала провода, $1/ом \cdot м$.

Приближенно эта формула может быть применена и к проводнику круглого сечения.

Характер зависимости $\delta_э$ от входящих в формулу (3-52) величин должен быть вполне понятен. О влиянии частоты ω уже говорилось выше. С возрастанием магнитной проницаемости материала проводника увеличивается разница в величинах наружного и внутреннего магнитных потоков; с увеличением σ растет величина противодействующих токов; и то, и другое влечет за собой более резкое проявление поверхностного эффекта, т. е. уменьшение $\delta_э$.

Для медного провода ($\sigma = 5{,}7 \cdot 10^7$ $1/ом \cdot м$; $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$ $гн/м$)

$$\delta_э = \frac{6{,}67}{\sqrt{f}} \ [см].$$

Если, например, $f = 10^6$ $гц$, то $\delta_э = 0{,}0667$ $мм$, т. е. ничтожно малая величина.

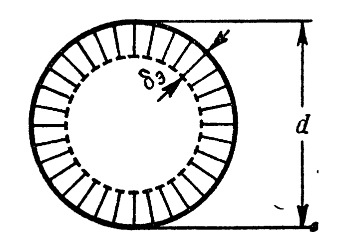


Рис. 3-14. К расчету сопротивления провода при переменном токе.

Явление поверхностного эффекта приводит к увеличению активного сопротивления, так как полезным сечением, через которое проходит ток, можно считать площадь кольцевого слоя шириной $\delta_э$, примыкающего к поверхности провода.

Исходя из этого, для сопротивления переменному току провода длиной l, имеющего круглое сечение диаметром d (рис. 3-14), получим

$$r_f = \frac{l}{\pi\sigma d\delta_э} = \frac{l}{\sqrt{2}\pi d}\sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}. \qquad (3\text{-}53)$$

Отсюда видно, что сопротивление растет пропорционально корню квадратному из частоты. Для уменьшения сопротивления следует увеличивать диаметр,

т. е. периметр сечения провода (а не площадь сечения, как это имеет место при постоянном токе).

Найдем соотношение сопротивлений одного и того же провода постоянному току r и переменному току r_f. Так как

$$r = \frac{4l}{\sigma\pi d^2},$$

то

$$\frac{r_f}{r} = \frac{1}{4} \cdot \frac{d}{\delta_э}.$$

Подставляя сюда $\delta_э = \frac{6,67}{\sqrt{f}}$, получим для медного провода

$$\frac{r_f}{r} = 0,0385 d \sqrt{f}.$$

При частоте $f = 10^6$ *гц* найдем $\frac{r_f}{r} = 38,5d$; если, например, $d = 0,3$ *см*, то $\frac{r_f}{r} = 11,6$, т. е. активное сопротивление провода превышает его омическое сопротивление в 11,6 раз.

2. Всякая электрическая цепь в реальных условиях работы неизбежно оказывается помещенной в большей или меньшей близости

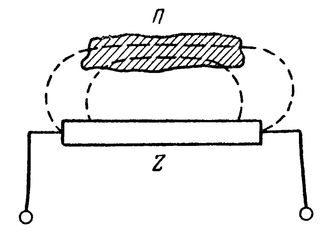


Рис. 3-15. Влияние посторонних предметов на параметры цепи.

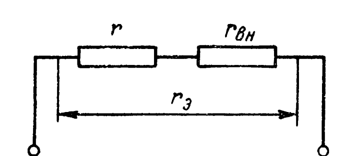


Рис. 3-16. Эквивалентная схема цепи с учетом влияния внешних объектов.

к окружающим предметам: проводникам, диэлектрикам, другим электрическим цепям и т. п.

Допустим, что поблизости от некоторого сопротивления Z (рис. 3-15) помещен проводящий предмет $П$. При прохождении переменного тока через сопротивление Z в пространстве, его окружающем, создается переменное магнитное поле, часть силовых линий которого пересекает проводник $П$. В нем индуктируется э. д. с., под действием которой в проводнике $П$ проходит ток и, стало быть, расходуется некоторая мощность $P_п$. Мощность, расходуемая в окружающих предметах, доставляется, разумеется, тем же источником энергии, который питает исследуемую цепь. Появление мощности потерь $P_п$ равносильно увеличению полной активной мощности, расходуемой в цепи (контуре), а это означает, что в выражении (3-51), определяющем активное сопротивление цепи, под ве-

личиной P следует понимать суммарную мощность, включающую в себя мощность, теряемую в собственном сопротивлении цепи $P_к$, и мощность, теряемую в окружающих предметах, т. е.

$$P = P_к + P_п,$$

а полное (эквивалентное) сопротивление

$$r_э = \frac{P_к + P_п}{I_д^2} = \frac{P_к}{I_д^2} + \frac{P_п}{I_д^2}. \qquad (3\text{-}54)$$

Иными словами, кроме «собственного» сопротивления

$$r = \frac{P_к}{I_д^2}$$

в цепи при наличии потерь в окружающих предметах появляется новое, «вносимое» сопротивление

$$r_{вн} = \frac{P_п}{I_д^2}. \qquad (3\text{-}55)$$

Полное сопротивление цепи увеличивается, и эквивалентная схема приобретает вид рис. 3-16.

Потери в окружающих предметах, а значит, и вносимое сопротивление, резко возрастают (при прочих равных условиях) с увеличением частоты, так как с повышением частоты возрастает индуктированная э. д. с. и вызванный ею ток. При радиочастотах вносимое сопротивление может оказаться значительно бо́льшим собственного сопротивления ($r_{вн} \gg r$). В этих условиях эквивалентное активное сопротивление может значительно превосходить собственное активное сопротивление цепи и тем более ее омическое сопротивление.

Из сказанного следует также, что при высоких частотах активное сопротивление зависит не только от устройства самих элементов цепи, но и от их пространственного расположения относительно окружающих предметов и от электрических свойств последних.

3. В § 1-1 было отмечено, что при прохождении по проводнику тока высокой частоты провод интенсивно излучает в пространство энергию электромагнитного поля. Излучение электромагнитной энергии проводом при переменном токе является таким же его неотъемлемым свойством, как и свойство поглощать энергию, превращая ее в тепло.

В теории электромагнитного поля доказывается, что если длина провода $l \ll \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$, то излучаемая им мощность

$$P_\Sigma = k\omega^2 l^2 I^2, \qquad (3\text{-}56)$$

т. е. пропорциональна второй степени частоты ω, длины провода l и амплитуды тока в нем I.

Мощность, излучаемую проводом, можно также представить в виде

$$P_\Sigma = \frac{1}{2} r_\Sigma I^2. \tag{3-57}$$

Входящая в это выражение величина r_Σ имеет размерность сопротивления и называется сопротивлением излучения. Если через сопротивление r_Σ проходит переменный ток амплитуды I, в этом сопротивлении расходуется мощность, равная той мощности, которая излучается проводом.

Сопротивление излучения, как видно из сопоставления (3-56) и (3-57), пропорционально произведению $\omega^2 l^2$; имея в виду, что $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, получим

$$r_\Sigma = A \frac{l^2}{\lambda^2}, \tag{3-58}$$

где A — постоянный коэффициент.

Из формулы (3-58) следует, что сопротивление излучения зависит от соотношения длины провода и длины волны колебаний. При низких частотах сопротивление излучения пренебрежимо мало, однако при высокой частоте оно может быть одного порядка и даже превосходить сопротивление, определяющее потери в проводе.

Итак, полная мощность, расходуемая в цепи, складывается из мощностей: теряемой в проводе $P_к$, излучаемой в окружающее пространство P_Σ и теряемой в окружающих предметах $P_п$, в связи с чем эквивалентное активное сопротивление в соответствии с (3-51)

$$r_э = \frac{P_к + P_\Sigma + P_п}{I_д^2} = r + r_\Sigma + r_{вн}. \tag{3-59}$$

в) Элементарная емкостная цепь

Рассмотрим цепь, схема которой (рис. 3-17) состоит из источника гармонического напряжения

$$u = U \cos(\omega t + \psi_u)$$

и сосредоточенной емкости C.

Принимая такую схему цепи, пренебрегаем необратимыми потерями (сопротивлением r) и не учитываем магнитного поля (индуктивности L).

Выберем условно положительные направления тока и напряжения, показанные на рис. 3-17.

Тогда положительному значению тока $\left(\frac{dq}{dt} > 0\right)$ будет соответствовать увеличение напряжения $\left(\frac{du}{dt} > 0\right)$ и выражение для тока должно быть записано в виде

$$i = +\frac{dq}{dt} = +C\frac{du}{dt}.$$

Если же изменить одно из условно положительных направлений на обратное, то в выражении для тока знак должен быть изменен на обратный, т. е.

$$i = -\frac{dq}{dt} = -C\frac{du}{dt}.$$

Полагая начальную фазу напряжения $\psi_u = 0$, получим

$$i = C\frac{du}{dt} = -\omega CU\sin\omega t = \omega CU\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

или

$$i = I\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (3\text{-}60)$$

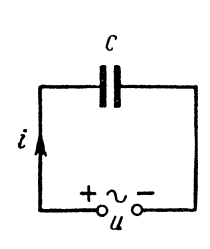


Рис. 3-17. Элементарная емкостная цепь.

Рис. 3-18. Векторная диаграмма емкостной цепи.

Таким образом, амплитуда тока в цепи

$$I = \frac{U}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{U}{x_C}. \qquad (3\text{-}61)$$

Величина

$$x_C = \frac{1}{\omega C} \qquad (3\text{-}62)$$

имеет размерность сопротивления и носит наименование емкостного сопротивления.

Как видно из (3-60), начальная фаза тока в рассматриваемой цепи

$$\psi_i = \frac{\pi}{2}.$$

Под сдвигом фаз между током и напряжением принято понимать величину

$$\varphi = \psi_u - \psi_i. \qquad (3\text{-}63)$$

Поэтому, если $\psi_u > \psi_i$, угол φ считают положительным, если же $\psi_u < \psi_i$, угол φ отрицателен.

В рассматриваемой цепи $\psi_u < \psi_i$, а, значит,

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

Ток опережает по фазе напряжение на емкости, что иллюстрируется векторной диаграммой рис. 3-18.

На рис. 3-19, *а* приведены временные диаграммы тока и напряжения, представляющие собой две синусоидальные функции сдвинутые во времени на $T/4$.

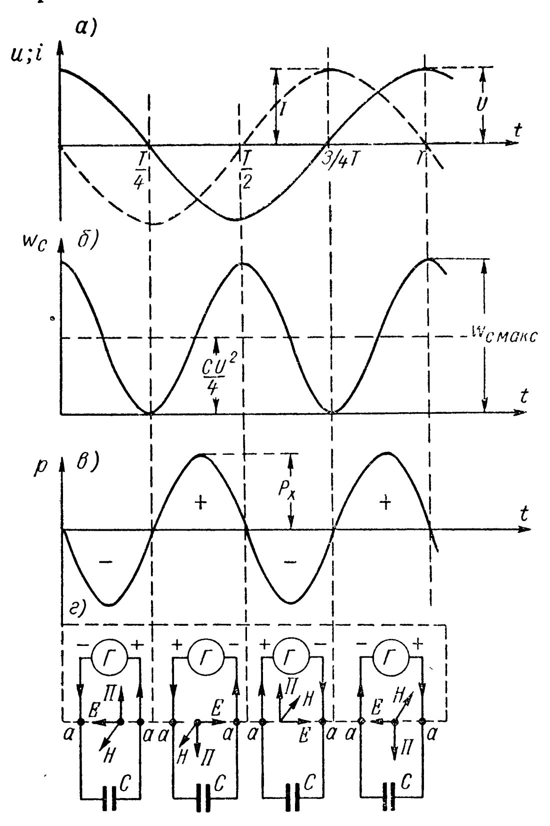


Рис. 3-19. К анализу процессов в элементарной емкостной цепи.

Емкость C является энергоемким элементом цепи. В электрическом поле, сосредоточенном в емкости C, запасается энергия, мгновенное значение которой в соответствии с (1-48)

$$w_C = \frac{Cu^2}{2} = \frac{CU^2}{2}\cos^2\omega t = \frac{CU^2}{4}(1+\cos 2\omega t). \qquad (3\text{-}64)$$

На рис. 3-19, *б* представлена кривая изменения во времени запасенной в электрическом поле энергии. Величина w_C изменяется

с двойной частотой 2ω, периодически достигая максимального значения

$$W_{C\,\text{макс}} = \frac{CU^2}{2}. \qquad (3\text{-}65)$$

Понимая под мгновенной мощностью p произведение мгновенных значений напряжения и тока, получим

$$p = ui = -UI\cos\omega t \sin\omega t = -\frac{UI}{2}\sin 2\omega t. \qquad (3\text{-}66)$$

График зависимости $p(t)$ приведен на рис. 3-19, *в*.

Среднее значение мощности

$$P = \frac{1}{T}\int\limits_0^T p\,dt = 0,$$

т. е., как и следовало ожидать, активной (необратимо расходуемой) мощности в изучаемой цепи нет.

Найдем скорость изменения запасаемой в электрическом поле энергии

$$p_x = \frac{\partial w_C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Cu^2}{2}\right) = uC\frac{du}{dt} = ui,$$

т. е. в рассматриваемой цепи мгновенная мощность представляет собой не что иное, как скорость изменения запасаемой в поле энергии

$$p = ui = p_x = \frac{\partial w_C}{\partial t}.$$

Максимальное значение этой скорости, как это следует из (3-66),

$$P_x = \frac{UI}{2} \qquad (3\text{-}67)$$

и называется реактивной мощностью.

С целью более детального изучения энергетических процессов в цепи с емкостью рассмотрим электромагнитное поле между зажимами *а-а* генератора *Г*, питающего емкость C (рис. 3-19, *г*).

В течение первой четверти периода $\left(\text{от } t = 0 \text{ до } t = \frac{T}{4}\right)$ мгновенные значения напряжения и тока имеют разные знаки, в соответствии с чем расставлены знаки напряжения и направление тока на рис. 3-19, *г*. Напряжение по величине своей уменьшается, стало быть, уменьшается и запасенная в поле энергия w_C (рис. 3-19, *б*). Вектор электрического поля $\overline{E}$ направлен в пространстве между зажимами справа налево, а вектор $\overline{H}$ — перпендикулярно плоскости чертежа к наблюдателю. В соответствии с этим вектор Пойнтинга $\overline{\Pi}$ направлен снизу вверх, т. е. к источнику энергии. Это означает, что энергия, запасенная в поле к начальному моменту вре-

мени, $W_{C\,\text{макс}}$ возвращается источнику; происходит разряд емкости. Скорость изменения энергии p (рис. 3-19, *в*) отрицательна, что свидетельствует об отдаче энергии емкостью, по абсолютной величине p возрастает от нуля до максимума, равного P_x, и вновь падает до нуля.

В момент $t = \frac{T}{4}$ происходит изменение знака напряжения, а направление тока остается неизменным. В течение второй четверти периода $\left(\text{от } t = \frac{T}{4} \text{ до } t = \frac{T}{2}\right)$ напряжение по величине своей возрастает, а ток уменьшается. В поле накапливается энергия, величина которой достигает значения $W_{C\,\text{макс}}$. Происходит заряд емкости. Скорость накопления энергии положительна и в середине рассматриваемого промежутка времени становится равной максимальному значению P_x. Направления векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ указывают на то, что электромагнитное поле и несомая им энергия перемещаются сверху вниз, т. е. источник отдает энергию в цепь.

Предлагается читателю проследить ход явлений в последующие моменты и убедиться в том, что в моменты времени от $t = \frac{T}{2}$ до $t = \frac{3}{4}T$ происходит разряд емкости, а в течение последней четверти периода емкость вновь заряжается.

Итак, в изучаемой цепи энергия то накапливается в электрическом поле, то возвращается генератору, не превращаясь в другие виды энергии.

Введенному выше понятию емкостного сопротивления можно дать энергетическое определение.

Подставив в (3-67) вместо U его значение из (3-61), получим

$$P_x = \frac{I^2 x_C}{2} = I_д^2 x_C, \qquad (3\text{-}68)$$

откуда

$$x_C = \frac{P_x}{I_д^2} = \frac{2P_x}{I^2}. \qquad (3\text{-}69)$$

Таким образом, емкостное сопротивление представляет собой отношение реактивной мощности емкостной цепи к квадрату действующего значения тока.

Полезно представить x_C и в несколько ином виде. Если в (3-67) вместо I подставим его значение из (3-61), получим выражение реактивной мощности через максимально запасаемую энергию

$$P_x = \frac{U^2}{2x_C} = \frac{U^2 \omega C}{2} = \omega W_{C\,\text{макс}}, \qquad (3\text{-}70)$$

а подставив это значение P_x в (3-68), найдем

$$x_C = \frac{\omega W_{C\,\text{макс}}}{I_д^2} = \frac{2\omega W_{C\,\text{макс}}}{I^2}. \qquad (3\text{-}71)$$

Теперь произведем расчет емкостной цепи, пользуясь символическим методом.

Мгновенные комплексы напряжения и тока

$$u_к = \dot{U}e^{j\omega t} = Ue^{j\psi_u}e^{j\omega t},$$
$$i_к = \dot{I}e^{j\omega t} = Ie^{j\psi_i}e^{j\omega t}.$$

Так как

$$i_к = C\frac{du_к}{dt},$$

то

$$\dot{I}e^{j\omega t} = j\omega C\dot{U}e^{j\omega t},$$

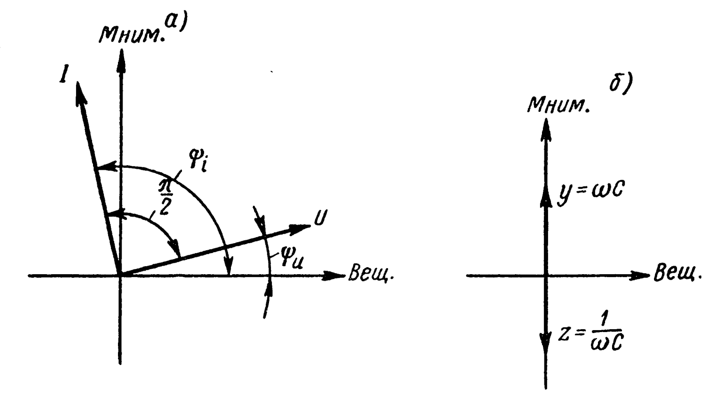


Рис. 3-20. Векторные диаграммы.

т. е. комплексные амплитуды тока и напряжения связаны между собой зависимостью

$$\dot{I} = j\omega C\dot{U}$$

или

$$Ie^{j\psi_i} = \omega CUe^{j\left(\psi_u + \frac{\pi}{2}\right)}. \qquad (3\text{-}72)$$

Начальная фаза тока $\psi_i = \psi_u + \frac{\pi}{2}$. Вектор $\dot{I}$ повернут относительно вектора $\dot{U}$ в сторону, обратную стрелке часов, на угол $\pi/2$, т. е. ток опережает по фазе напряжение на угол $\pi/2$ (рис. 3-20, *а*).

Комплексное сопротивление емкостной цепи

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I}e^{j(\psi_u - \psi_i)} = \frac{U}{I}e^{-j\frac{\pi}{2}} \qquad (3\text{-}73)$$

является чисто мнимой величиной и может быть записано так:

$$Z = jx. \qquad (3\text{-}74)$$

Множитель x при j в выражении комплексного сопротивления носит название реактивного сопротивления.

Из (3-72) следует, что $Z = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$ и, значит,

$$x = -\frac{1}{\omega C} = -x_C. \qquad (3\text{-}75)$$

Таким образом, для емкостной цепи реактивное сопротивление отрицательно и по абсолютной величине равно x_C.

Комплексное сопротивление символизируется вектором (рис. 3-20, *б*), фазовый угол которого согласно (3-73) $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, а модуль $z = \frac{U}{I} = x_C$.

Комплексная проводимость емкости

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{U}e^{j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{jx} \qquad (3\text{-}76)$$

также является чисто мнимой величиной и может быть выражена так:

$$Y = -j\frac{1}{x} = -jb, \qquad (3\text{-}77)$$

где b — реактивная проводимость, равная обратной величине реактивного сопротивления, т. е.

$$b = \frac{1}{x} = -\frac{1}{x_C} = -\omega C = -b_C. \qquad (3\text{-}78)$$

Следует обратить внимание на то, что в выражении (3-77), которое условимся считать общей записью комплексной проводимости, перед величиной b стоит знак минус. Для емкостной цепи согласно (3-78) реактивная проводимость (так же, как и реактивное сопротивление) отрицательна, а по абсолютной величине равна емкостной проводимости $b_C = \omega C$. Поэтому в соответствии с (3-77) $Y = -j(-\omega C) = +j\omega C$.

Иногда в отличие от (3-77) пользуются выражением комплексной проводимости в виде

$$Y = -j\frac{1}{x} = +jb. \qquad (3\text{-}77а)$$

При такой форме записи следует под реактивной проводимостью понимать

$$b = -\frac{1}{x} = \frac{1}{x_C} = \omega C = +b_C, \qquad (3\text{-}78а)$$

т. е. знаки реактивной проводимости и сопротивления оказываются противоположными. В этом недостаток записи (3-77а).

Комплексная проводимость символизируется вектором (рис. 3-20, *б*), фазовый угол которого согласно (3-76) — $\varphi_y = +\frac{\pi}{2}$, а модуль

$$y = \frac{I}{U} = \frac{1}{x_C}.$$

Из всего сказанного должно быть ясно, что процессы в емкостной цепи в сильной степени зависят от частоты источника. Поэтому представляет интерес изобразить в виде графиков **частотные характеристики** цепи, т. е. зависимости величин, характеризующих процессы в цепи, от частоты.

На рис. 3-21 приведены частотные характеристики емкостного сопротивления $x_C(\omega)$ и емкостной проводимости $b_C = \frac{1}{x_C} = b_C(\omega)$.

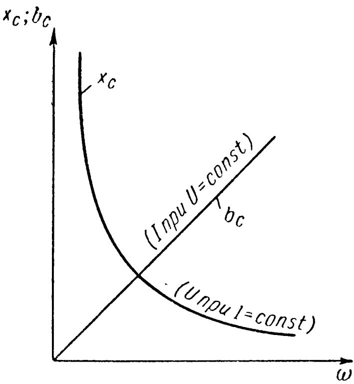


Рис. 3-21. Частотные характеристики емкостной цепи.

Первая из них иллюстрирует одновременно зависимость от частоты амплитуды напряжения при неизменной амплитуде тока, так как $U = Ix_C$; вторая — частотную зависимость амплитуды тока при неизменной амплитуде напряжения, так как $I = Ub_C$.

Ввиду того, что с увеличением частоты емкостное сопротивление падает, при очень высоких частотах оно становится весьма малым и приближается по своим свойствам к короткому замыканию. Наоборот, для постоянного тока ($\omega = 0$) емкостное сопротивление бесконечно велико, т. е. равноценно разрыву цепи.

г) Элементарная индуктивная цепь

Если мы пренебрежем потерями энергии и не будем учитывать влияния электрического поля на процессы в цепи, то придем к схеме (рис. 3-22), состоящей из сосредоточенной индуктивности L, находящейся под воздействием гармонического напряжения

$$u = U\cos(\omega t + \psi_u).$$

Рис. 3-22. Элементарная индуктивная цепь.

Прохождение переменного тока через индуктивность связано с наведением э. д. с. самоиндукции

$$e_L = -L\frac{di}{dt}.$$

Применяя второй закон Кирхгофа к замкнутому контуру, образованному цепью, получим

$$u + e_L = 0$$

или

$$u = L\frac{di}{dt}.$$

Отсюда

$$i = \frac{1}{L} \int u\,dt.$$

Такой форме записи выражений для тока и напряжения соответствуют условно положительные направления, показанные на рис. 3-22.

Принимая начальную фазу приложенного напряжения $\psi_u = 0$ и постоянную интегрирования равной нулю, получим

$$i = \frac{U}{\omega L} \sin \omega t = \frac{U}{\omega L} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

или

$$i = I \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (3\text{-}79)$$

Постоянная интегрирования принята равной нулю, так как при гармоническом воздействии на пассивную линейную цепь с постоянными параметрами стационарный ток имеет также синусоидальную форму и не может содержать постоянной слагающей [см. формулу (3-11)].

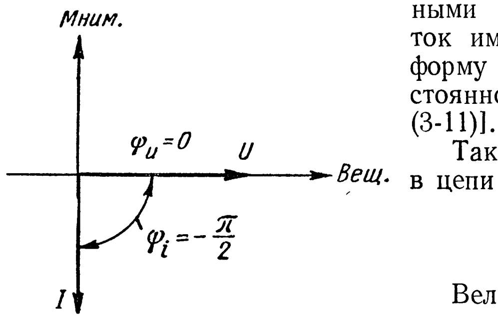


Рис. 3-23. Векторная диаграмма элементарной индуктивной цепи.

Таким образом, амплитуда тока в цепи

$$I = \frac{U}{\omega L} = \frac{U}{x_L}. \qquad (3\text{-}80)$$

Величина

$$x_L = \omega L, \qquad (3\text{-}81)$$

имеющая размерность сопротивления, носит наименование и н д у к т и в н о г о   с о п р о т и в л е н и я.

Из (3-79) видно, что начальная фаза тока

$$\psi_i = -\frac{\pi}{2}.$$

Поэтому согласно (3-63) угол сдвига фаз между напряжением и током положителен, т. е.

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Ток о т с т а е т по фазе от напряжения, что иллюстрируется векторной диаграммой рис. 3-23.

На рис. 3-24, *а* приведены временны́е диаграммы напряжения и тока; они представляют собой две синусоидальные функции, сдвинутые во времени на $T/4$.

Индуктивность является энергоемким элементом цепи. В магнитном поле, которое мы считаем сосредоточенным в индуктивности L, запасается энергия, величина которой в каждый момент времени согласно (1-39)

$$w_L = \frac{Li^2}{2} = \frac{LI^2}{2}\sin^2\omega t = \frac{LI^2}{4}(1-\cos 2\omega t). \tag{3-82}$$

Запасаемая энергия w_L изменяется во времени с частотой 2ω, как показано графически на рис. 3-24, *б*. Она периодически достигает максимальной величины

$$W_{L\,\text{макс}} = \frac{LI^2}{2} \tag{3-83}$$

в те моменты, когда ток проходит через амплитудные значения.

Мгновенная мощность изменяется во времени по закону

$$p = ui = UI\cos\omega t\sin\omega t = \frac{UI}{2}\sin 2\omega t, \tag{3-84}$$

что иллюстрируется графиком рис. 3-24, *в*.

Рис. 3-24. К анализу процессов в элементарной индуктивной цепи.

Необратимые потери энергии в изучаемой цепи отсутствуют:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = 0.$$

Скорость изменения запасаемой энергии

$$p_x = \frac{\partial w_L}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(L\frac{i^2}{2}\right) = iL\frac{di}{dt},$$

равна мгновенной мощности:

$$p_x = p = ui. \tag{3-85}$$

Максимальное значение мгновенной мощности, т. е. реактивная мощность цепи,

$$P_x = \frac{UI}{2} = U_д I_д. \qquad (3\text{-}86)$$

Если рассмотреть электромагнитное поле между зажимами *а-а* генератора *Г*, питающего индуктивность, то процессы в системе могут быть иллюстрированы графиками рис. 3-24, *г*. Изучение этих графиков показывает, что направление движения электромагнитного поля и несомой им энергии (направление вектора Пойнтинга $\overline{П}$) периодически меняется.

В течение первой четверти периода, когда ток в цепи увеличивается, происходит з а р я д индуктивности, т. е. накопление энергии в ее магнитном поле. Мгновенная мощность при этом положительна.

В течение второй четверти периода происходит уменьшение тока, связанное с р а з р я д о м индуктивности: накопленная энергия возвращается источнику, мгновенная мощность отрицательна. Далее процесс периодически повторяется. Таким образом, в энергетическом отношении индуктивная цепь аналогична цепи емкостной.

Если в выражение реактивной мощности (3-86) подставим вместо U его значение из (3-80), получим

$$P_x = \frac{I^2 x_L}{2} = I_д^2 x_L, \qquad (3\text{-}87)$$

откуда

$$x_L = \frac{P_x}{I_д^2} = \frac{2P_x}{I^2}, \qquad (3\text{-}88)$$

т. е. индуктивное сопротивление является отношением реактивной мощности индуктивной цепи к квадрату действующего значения тока.

Подставив в (3-88) x_L из (3-81), получим выражение реактивной мощности через величину максимально запасаемой энергии

$$P_x = \frac{I^2 \omega L}{2} = \omega W_{L\,макс}. \qquad (3\text{-}89)$$

Индуктивное сопротивление также может быть записано через $W_{L\,макс}$:

$$x_L = \frac{\omega W_{L\,макс}}{I_д^2} = \frac{2\omega W_{L\,макс}}{I^2}. \qquad (3\text{-}90)$$

Применим символический метод для расчета цепи с индуктивностью.

Мгновенные комплексы напряжения и тока

$$u_к = \boldsymbol{U} e^{j\omega t} = U e^{j\psi_u} e^{j\omega t},$$
$$i_к = \boldsymbol{I} e^{j\omega t} = I e^{j\psi_i} e^{j\omega t}.$$

Так как

$$u_к = L\frac{di_к}{dt},$$

то

$$Ue^{j\omega t} = j\omega LIe^{j\omega t}.$$

Значит,

$$U = j\omega LI \tag{3-91}$$

или

$$Ue^{j\psi_u} = \omega LIe^{j\left(\psi_i + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Отсюда следует, что начальная фаза тока $\psi_i = \psi_u - \frac{\pi}{2}$; ток отстает от напряжения на угол $\pi/2$ (рис. 3-25, *а*).

Комплексное сопротивление рассматриваемой цепи является чисто мнимой величиной

$$Z = \frac{U}{I}e^{j(\psi_u - \psi_i)} = \frac{U}{I}e^{+j\frac{\pi}{2}} = jx. \tag{3-92}$$

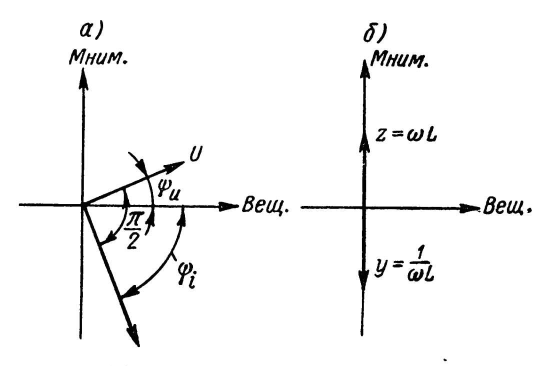


Рис. 3-25. Векторные диаграммы цепи с индуктивностью.

Как это видно из (3-91), реактивное сопротивление

$$x = \omega L = x_L, \tag{3-93}$$

т. е. реактивное сопротивление индуктивной цепи положительно, а по абсолютной величине равно индуктивному сопротивлению x_L, в то время как для рассмотренной ранее емкостной цепи реактивное сопротивление отрицательно.

Комплексное сопротивление может быть изображено вектором на комплексной плоскости, аргумент которого согласно (3-92) $\varphi = \frac{\pi}{2}$, а модуль

$$z = \frac{U}{I} = x_L = \omega L.$$

Комплексная проводимость рассматриваемой цепи также является чисто мнимой величиной

$$Y = -j\frac{1}{x} = -jb.$$

Так как в соответствии с (3-93) $x = \omega L$, то $b = \frac{1}{\omega L} = b_L$,

т. е. реактивная проводимость индуктивной цепи (так же, как и реактивное сопротивление) положительна и численно равна индуктивной проводимости b_L.

В принятой нами общей записи комплексной проводимости перед величиной b стоит знак минус. Поэтому для индуктивной цепи

$$Y = -j\left(+\frac{1}{\omega L}\right) = -j\frac{1}{\omega L}.$$

Если для комплексной проводимости пользоваться записью $Y = +jb$, то под реактивной проводимостью индуктивности следует понимать величину $b = -\frac{1}{\omega L} = -b_L$, и знак ее оказывается противоположным знаку реактивного сопротивления.

Так как для рассматриваемой цепи $Y = \frac{I}{U}e^{-j\frac{\pi}{2}}$, комплексная проводимость символизируется на комплексной плоскости вектором, величина которого $y = \frac{1}{\omega L}$, а фазовый угол $-\varphi_y = -\frac{\pi}{2}$ (рис. 3-25, *б*).

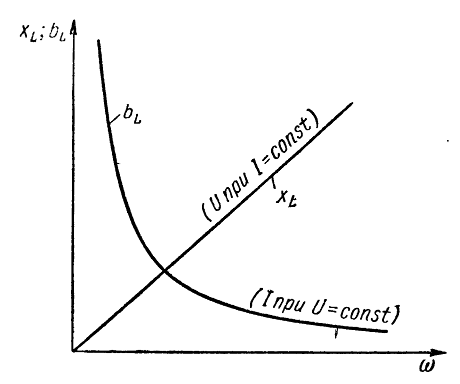


Рис. 3-26. Частотные характеристики индуктивной цепи.

В заключение рассмотрим частотные характеристики цепи с индуктивностью (рис. 3-26).

Частотная характеристика индуктивного сопротивления $x_L(\omega)$ изображается прямой, проходящей через начало координат. Эта же прямая в ином масштабе представляет частотную зависимость амплитуды напряжения на индуктивности при неизменной амплитуде тока, так как $U = Ix_L$.

Частотная характеристика $b_L(\omega)$ изображается ветвью гиперболы. Эта кривая в другом масштабе представляет частотную зависимость амплитуды тока в цепи при неизменной амплитуде напряжения, так как $I = Ub_L$. Для постоянного тока ($\omega = 0$) индуктивность равноценна короткому замыканию ($x_L = 0$), а для очень высоких частот $x_L \to \infty$, т. е. индуктивное сопротивление по своим свойствам эквивалентно разрыву цепи.

3-4. Смешанные цепи переменного тока

Смешанными цепями переменного тока будем называть цепи, составленные из активного r и реактивного x сопротивлений.

Роль реактивного сопротивления цепи может выполнять индуктивность или емкость. В первом случае получаем а к т и в н о - и н д у к т и в н у ю (r, L) цепь; во втором случае — а к т и в н о - е м к о с т н у ю (r, C) цепь.

а) Последовательная смешанная цепь

Рассмотрим линейную электрическую цепь, в которой активное и реактивное сопротивления соединены между собой последовательно (рис. 3-27).

Задача заключается в нахождении тока в цепи i при воздействии на нее гармонического напряжения u.

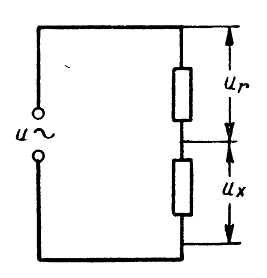


Рис. 3-27. Последовательная смешанная цепь.

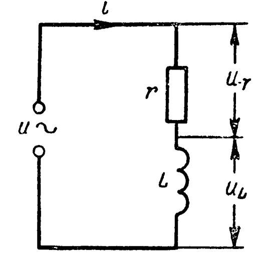


Рис. 3-28. Цепь r, L.

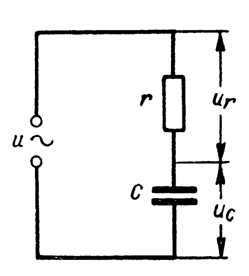


Рис. 3-29. Цепь r, C.

Решение будем искать параллельно для двух схем: активно-индуктивной (r, L — рис. 3-28) и активно-емкостной (r, C — рис. 3-29).

В любой момент для исследуемых цепей должен соблюдаться второй закон Кирхгофа: сумма мгновенных падений напряжения на элементах цепи должна быть равна мгновенному значению приложенного напряжения. Имеем:

Цепь r, L

$$u_r + u_L = u$$

или

$$ri + L\frac{di}{dt} = u. \qquad (3\text{-}94)$$

Цепь r, C

$$u_r + u_C = u$$

или

$$ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = u. \qquad (3\text{-}94а)$$

Получены неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Для их решения применим символический метод.

С этой целью запишем уравнения для текущих комплексов $u_к = Ue^{j\omega t}$ и $i_к = Ie^{j\omega t}$:

$$ri_к + L\frac{di_к}{dt} = u_к$$

или

$$rIe^{j\omega t} + j\omega LIe^{j\omega t} = Ue^{j\omega t}.$$

$$ri_к + \frac{1}{C}\int i_к\,dt = u_к$$

или

$$rIe^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C}Ie^{j\omega t} = Ue^{j\omega t}.$$

Разделив обе части уравнений на $e^{j\omega t}$, сведем задачу к нахождению комплексной амплитуды тока $\boldsymbol{I}$ при заданной комплексной амплитуде напряжения $\boldsymbol{U}$:

$$r\boldsymbol{I} + j\omega L\boldsymbol{I} = \boldsymbol{U} \qquad (3\text{-}95)$$

или

$$\boldsymbol{U}_r + \boldsymbol{U}_L = \boldsymbol{U},$$

где $\boldsymbol{U}_r = r\boldsymbol{I}$; $\boldsymbol{U}_L = j\omega L\boldsymbol{I}$;

$$r\boldsymbol{I} + \frac{1}{j\omega C}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{U} \qquad (3\text{-}95а)$$

или

$$\boldsymbol{U}_r + \boldsymbol{U}_C = \boldsymbol{U},$$

где $\boldsymbol{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\boldsymbol{I}$

— комплексные амплитуды напряжений на активном сопротивлении, индуктивности и емкости.

Построим векторные диаграммы напряжений и токов, приняв в качестве исходного вектор тока I и направив его по горизонтали.

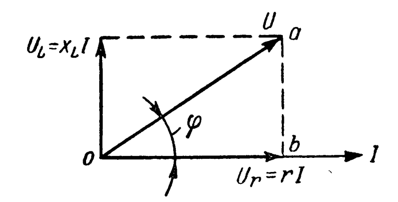


Рис. 3-30. Векторная диаграмма последовательной цепи r, L.

Рис. 3-31. Векторная диаграмма последовательной цепи r, C.

Для цепи r, L получим диаграмму, изображенную на рис. 3-30; для цепи r, C — на рис. 3-31. Напряжение U_r совпадает по фазе с током; U_L опережает ток на $\pi/2$; U_C отстает от тока на $\pi/2$.

Вектор приложенного напряжения равен геометрической сумме векторов U_r и U_L.

Ток отстает по фазе от приложенного напряжения на угол φ, который определяется из выражения

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x_L}{r}. \qquad (3\text{-}96)$$

Вектор приложенного напряжения равен геометрической сумме векторов U_r и U_C.

Ток опережает по фазе приложенное напряжение на угол φ, который определяется из выражения

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{x_C}{r}. \qquad (3\text{-}96а)$$

Треугольник oab называют **треугольником напряжений**.

Решая (3-95) относительно $\boldsymbol{I}$, находим

$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{U}}{r + j\omega L}. \qquad (3\text{-}97)$$

Решая (3-95а) относительно $\boldsymbol{I}$, находим

$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{U}}{r - j\frac{1}{\omega C}}. \qquad (3\text{-}97а)$$

Комплексным входным (или эквивалентным) сопротивлением называется отношение комплексных амплитуд напряжения и тока на входе цепи:

$$Z_{вх}=\frac{U}{I}.$$

Из (3-97) получаем

$$Z_{вх}=r+j\omega L=r+jx_L. \quad (3\text{-}98)$$

Модуль входного сопротивления

$$z_{вх}=\sqrt{r^2+x_L^2}.$$

Из (3-97а) получаем

$$Z_{вх}=r-j\frac{1}{\omega C}=r-jx_C. \quad (3\text{-}98а)$$

Модуль входного сопротивления

$$z_{вх}=\sqrt{r^2+x_C^2}.$$

Обобщая полученные важные соотношения, можно записать выражение для комплексного входного сопротивления цепи r, x (см. рис. 3-27) в виде

$$Z_{вх}=r+jx. \quad (3\text{-}99)$$

В случае цепи r, L реактивное сопротивление положительно: $x=x_L=\omega L$; в случае цепи r, C — отрицательно: $x=-x_C=-\frac{1}{\omega C}$.

Применяя для $Z_{вх}$ показательную форму записи, получим

$$Z_{вх}=\frac{U}{I}=\frac{Ue^{j\psi_u}}{Ie^{j\psi_i}}=z_{вх}e^{j\varphi}, \quad (3\text{-}100)$$

где

$$z_{вх}=\sqrt{r^2+x^2} \quad (3\text{-}101)$$

— модуль входного сопротивления, называемый полным (или кажущимся) сопротивлением; $\varphi=\psi_u-\psi_i$ — разность фаз между напряжением и током.

В тригонометрической форме записи $Z_{вх}=z_{вх}\cos\varphi+jz_{вх}\sin\varphi$, откуда следует, что

$$r=z_{вх}\cos\varphi, \quad x=z_{вх}\sin\varphi \quad (3\text{-}102)$$

и

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{x}{r}. \quad (3\text{-}103)$$

На комплексной плоскости сопротивление $z_{вх}$ символизируется вектором, направленным под углом $+\varphi$ к оси вещественных величин (рис. 3-32, *а*) для цепи r, L и под углом $-\varphi$ к вещественной оси (рис. 3-32, *б*) — для цепи r, C.

Комплексная входная проводимость

$$Y_{вх}=\frac{1}{Z_{вх}}=y_{вх}e^{j\varphi_y}=y_{вх}e^{-j\varphi}; \quad (3\text{-}104)$$

здесь $y_{вх}=\frac{I}{U}=\frac{1}{z_{вх}}$ — модуль входной проводимости, называемый **полной (или кажущейся) проводимостью.**

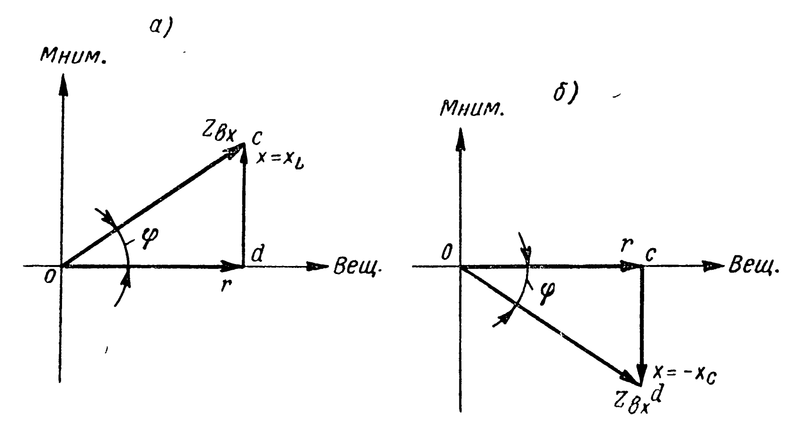


Рис. 3-32. Диаграммы сопротивлений.

В тригонометрической форме $Y_{вх}$ запишется в виде

$$Y_{вх}=y_{вх}\cos\varphi-jy_{вх}\sin\varphi=g_{вх}-jb_{вх}, \qquad (3\text{-}105)$$

где

$$g_{вх}=y_{вх}\cos\varphi \qquad (3\text{-}106)$$

— активная составляющая входной проводимости;

$$b_{вх}=y_{вх}\sin\varphi \qquad (3\text{-}107)$$

— реактивная составляющая входной проводимости;

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b_{вх}}{g_{вх}}; \qquad (3\text{-}108)$$

$$y_{вх}=\sqrt{g_{вх}^2+b_{вх}^2}. \qquad (3\text{-}109)$$

В общей записи комплексной проводимости (3-105) перед мнимой частью стоит знак минус. Поэтому для цепи с индуктивной реакцией, для которой $b_{вх}$ положительна, в формуле (3-105) перед $jb_{вх}$ сохраняется отрицательный знак. На комплексной плоскости входная проводимость символизируется вектором, направленным под углом $\varphi_y=-\varphi$ к вещественной оси (рис. 3-33, *а*).

Если же цепь обладает емкостной реакцией, то $b_{вх}<0$ и тогда в выражении (3-105) знак минус перед $jb_{вх}$ изменяется на плюс. В этом случае на комплексной плоскости вектор $y_{вх}$ направлен под углом $\varphi_y=+\varphi$ к вещественной оси (рис. 3-33, *б*).

Иногда в отличие от (3-105) для комплексной проводимости пользуются выражением:

$$Y_{вх}=g_{вх}+jb_{вх} \qquad (3\text{-}105а)$$

При такой форме записи

$$b_{вх} = y_{вх} \sin \varphi_y = -y_{вх} \sin \varphi; \qquad (3\text{-}107а)$$

для цепи с индуктивной реакцией $b_{вх}$ оказывается отрицательным, а в случае емкостной реакции — положительным, что неудобно. В дальнейшем будем придерживаться записи (3-105).

Треугольники ocd (рис. 3-32) и oef (рис. 3-33) называют **треугольниками сопротивлений и проводимостей**.

Следует обратить внимание на то, что хотя $Y_{вх} = \frac{1}{Z_{вх}}$ и $y_{вх} = \frac{1}{z_{вх}}$, однако $g_{вх} \neq \frac{1}{r}$ и $b_{вх} \neq \frac{1}{x}$. Подробнее этот вопрос будет обсужден ниже (стр. 141).

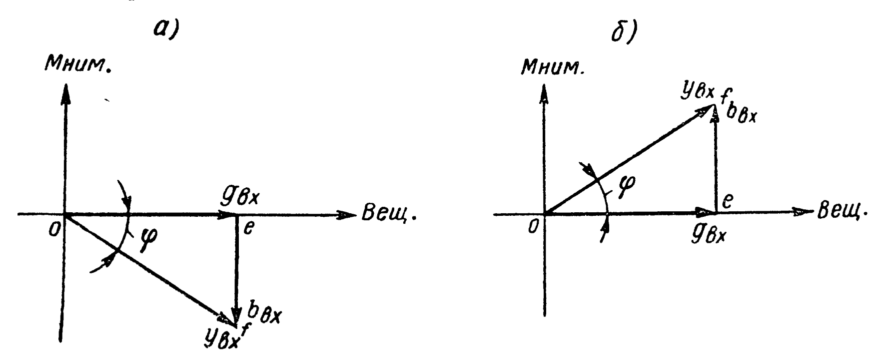


Рис. 3-33. Диаграммы проводимостей.

Комплексные амплитуды входного напряжения и тока в цепи r, x связаны между собой уравнением закона Ома

$$I = \frac{U}{Z_{вх}} = UY_{вх}. \qquad (3\text{-}110)$$

Аналогичное выражение справедливо для амплитуд тока и напряжения:

$$I = \frac{U}{z_{вх}} = Uy_{вх}. \qquad (3\text{-}111)$$

Мгновенное значение тока в исследуемой цепи, так как $\psi_i = \psi_u - \varphi$, будет

$$i = I \cos(\omega t + \psi_u - \varphi), \qquad (3\text{-}112)$$

где I определяется из (3-111), а угол φ из (3-103).

Схема активно-реактивной цепи может быть использована для анализа процессов в реальных элементах электрических цепей.

Так, при изучении электрического режима **катушки** индуктивности, находящейся под гармоническим воздействием, за-

частую можно не учитывать электрическое поле, связанное с катушкой, а принимать во внимание только ее магнитное поле и потери энергии в проводах катушки и в окружающих ее предметах. Тогда в качестве приближенной эквивалентной схемы катушки может быть принята схема цепи r, L (см. рис. 3-28).

Аналогично при анализе процессов в конденсаторе можно в первом приближении пренебрегать связанным с ним магнитным полем и учитывать только его электрическое поле, а также потери энергии в обкладках конденсатора и в диэлектрике, помещенном между ними. В этих условиях схема цепи r, C (см. рис. 3-29) может считаться приближенной эквивалентной схемой конденсатора.

б) Энергетические соотношения в смешанной цепи переменного тока

Рассчитаем мгновенную мощность для цепи r, x (см. рис. 3-27), находящейся под воздействием гармонического напряжения.

Принимая начальную фазу напряжения $\psi_u = 0$ и учитывая, что согласно (3-112)

$$i = I\cos(\omega t - \varphi),$$

получим

$$p = ui = UI\cos\omega t\cdot\cos(\omega t - \varphi) = \frac{UI}{2}[\cos\varphi + \cos(2\omega t - \varphi)]. \quad (3\text{-}113)$$

На рис. 3-34 приведены временные диаграммы напряжения, тока и мгновенной мощности. При построении этих кривых принято для определенности, что $\varphi > 0$, т. е. что реактивное сопротивление цепи имеет индуктивный характер.

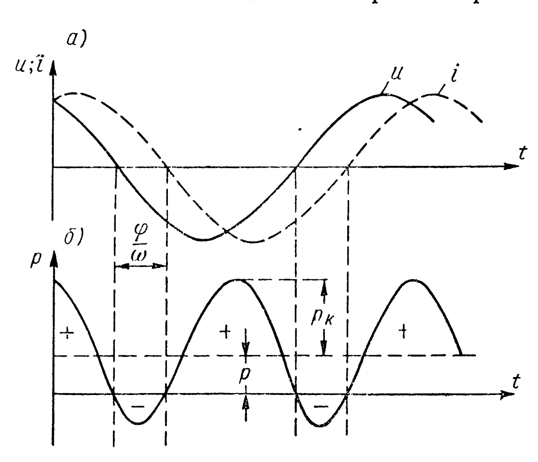


Рис. 3-34. Временные диаграммы напряжения и тока (*а*) и мощности (*б*) для смешанной цепи.

Сопоставление кривой $p(t)$, изображенной на рис. 3-34, с аналогичными кривыми, полученными для активной (см. рис. 3-12) и чисто реактивных (см. рис. 3-19 и 3-24) цепей, свидетельствует о том, что в смешанной цепи энергия частично расходуется в активном сопротивлении r; одновременно некоторое количество энергии периодически то накапливается в магнитном поле индуктивности (в случае емкостного характера цепи — в электрическом поле емкости), то возвращается в генератор.

Хотя знак мгновенной мощности p периодически изменяется, но, в отличие от рис. 3-19 и 3-24, площадь, ограниченная положительными ординатами кривой, превышает площадь отрицательных участков.

Среднее значение величины p за период равно активной мощности, расходуемой в цепи, т. е.

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = \frac{UI}{2}\cos\varphi = U_д I_д \cos\varphi. \qquad (3\text{-}114)$$

Так как $U_r = U\cos\varphi$ [см. рис. 3-30], то вместо (3-114) можно записать

$$P = \frac{U_r I}{2} = \frac{I^2 r}{2} = I_д^2 r, \qquad (3\text{-}115)$$

откуда следует, что мощность расходуется в активном сопротивлении r. При любом знаке угла φ она всегда положительна.

Реактивная мощность P_x, т. е. максимальная скорость изменения запаса энергии в цепи, равна согласно (3-67) и (3-86) половине произведения амплитуд тока в цепи I и напряжения на реактивном элементе U_x (в данном случае — на индуктивности).

Таким образом,

$$P_x = \frac{U_x I}{2},$$

где $U_x = U_L$ для индуктивной цепи, и $U_x = U_C$ для емкостной цепи.

Из рис. 3-30 и 3-31 следует, что

$$U_x = U\,|\sin\varphi|.$$

Поэтому

$$P_x = \frac{UI}{2}\sin\varphi = U_д I_д \sin\varphi. \qquad (3\text{-}116)$$

Опуская в этом выражении знаки абсолютной величины при $\sin\varphi$, мы придаем реактивной мощности алгебраический смысл. Она может быть как положительной, так и отрицательной.

Знак P_x свидетельствует о характере реактивного сопротивления. Если $P_x > 0$ (угол $\varphi > 0$), то реактивное сопротивление индуктивно; если же $P_x < 0$ (угол $\varphi < 0$), то реактивность цепи имеет емкостный характер. Тем самым учитывается различный характер запасаемой в этих двух случаях энергии.

Так как амплитуда напряжения на реактивном сопротивлении $U_x = I\,|x|$, то

$$P_x = \frac{I^2 x}{2} = I_д^2 x. \qquad (3\text{-}117)$$

При такой записи под x понимаем реактивное сопротивление со свойственным ему знаком; при индуктивном характере цепи ($x > 0$)

реактивная мощность положительна, а при емкостном характере ($x < 0$) — отрицательна.

Приняв во внимание (3-70) и (3-89), реактивную мощность можно выразить так:

$$P_x = \omega W_x. \qquad (3\text{-}118)$$

Если величине P_x по-прежнему придавать алгебраический смысл, максимально запасаемую в поле энергию W_x в случае индуктивности следует условно считать положительной:

$$W_x = + W_{L\ макс} = \frac{LI^2}{2},$$

а в случае емкости — отрицательной:

$$W_x = - W_{C\ макс} = - \frac{CU_C^2}{2}.$$

Из (3-115) и (3-117) вытекает энергетическое определение активной и реактивной составляющих входного сопротивления последовательной цепи r, x. Активное сопротивление

$$r = \frac{2P}{I^2},$$

что совпадает с (3-51); реактивное сопротивление

$$x = \frac{2P_x}{I^2} = \frac{2\omega W_x}{I^2}.$$

Последнее выражение в случае емкостного сопротивления совпадает (с точностью до знака) с (3-71), а в случае индуктивного сопротивления — с (3-90).

Введем в рассмотрение еще одно понятие. Назовем *кажущейся мощностью* величину

$$P_к = \frac{UI}{2} = U_д I_д. \qquad (3\text{-}119)$$

Очевидно, в цепи расходовалась бы мощность, равная $P_к$, если бы при заданных U и I цепь имела чисто активный характер ($\cos\varphi = 1$). Во всех иных случаях активная мощность $P < P_к$. Графически величина $P_к$ представляется амплитудой синусоиды двойной частоты, ось которой приподнята над осью абсцисс на величину активной мощности P (рис. 3-34, *б*).

Как видно из формул (3-114), (3-116) и (3-119), величины мощностей P, P_x и $P_к$ связаны между собой очевидной зависимостью

$$P_к = \sqrt{P^2 + P_x^2}. \qquad (3\text{-}120)$$

Мощности P, P_x и $P_к$ имеют одинаковую размерность. Однако для того чтобы подчеркнуть различие в физическом содержании этих понятий, активную мощность выражают в ваттах (*вт*), кажу-

щуюся мощность — в вольт-амперах (*ва*) и реактивную мощность — в реактивных вольт-амперах (*вар*).

Для расчета мгновенной мощности цепи нельзя использовать произведение мгновенных комплексов тока и напряжений, потому что, как было указано в § 3-2, вещественная часть полученного таким путем комплекса не будет, вообще говоря, равна мгновенной мощности.

Все же можно произвести энергетический расчет цепи символическим методом, если воспользоваться следующим искусственным приемом.

Составим произведение из комплексной амплитуды напряжения $\boldsymbol{U} = Ue^{j\psi_u}$ и комплекса, сопряженного с комплексной амплитудой тока, $\hat{\boldsymbol{I}} = Ie^{-j\psi_i}$.

Поделив полученное произведение на два, найдем

$$\boldsymbol{P}_к = \frac{\boldsymbol{U}\hat{\boldsymbol{I}}}{2} = \frac{UI}{2} e^{j\varphi}, \qquad (3\text{-}121)$$

где $\varphi = \psi_u - \psi_i$ — сдвиг фаз между напряжением и током.

Мним.

Рис. 3-35. Диаграмма мощностей.

Комплекс $\boldsymbol{P}_к$ называется комплексной мощностью. Представив его в алгебраической форме, получим

$$\boldsymbol{P}_к = \frac{UI}{2} \cos\varphi + \boldsymbol{j}\frac{UI}{2} \sin\varphi$$

или, приняв во внимание (3-114) и (3-116),

$$\boldsymbol{P}_к = P + jP_x. \qquad (3\text{-}122)$$

Итак, вещественная часть комплексной мощности равна активной мощности P, а коэффициент при $\boldsymbol{j}$ мнимой части — реактивной мощности P_x.

Формулы (3-120) и (3-122) показывают, что графически соотношение между мощностями может быть представлено в виде треугольника мощностей (рис. 3-35).

в) Коэффициент мощности, добротность

Представляется весьма желательным оценивать энергетические свойства цепи каким-либо одним коэффициентом (параметром). При выборе величины, которая может быть использована в качестве энергетического параметра, следует принимать во внимание основные требования, предъявляемые к данной цепи (системе).

1. В электро-энергетических системах питающий генератор рассчитывается на определенные величины напряжения и тока, т. е. на определенную кажущуюся мощность (вольт-ампер). Задача заключается в том, чтобы эту кажущуюся мощность наилучшим

образом использовать, т. е. необходимо стремиться к тому, чтобы полезно расходуемая в цепи мощность (ватты) была близка к мощности кажущейся (вольт-амперам).

В этих условиях свойства системы удобно оценивать по величине коэффициента мощности, равного отношению мощностей активной и кажущейся

$$\frac{P}{P_к} = \cos\varphi; \qquad (3\text{-}123)$$

$\cos\varphi$ должен быть возможно более близким к единице.

Надо еще учитывать и то, что с уменьшением $\cos\varphi$ при заданной активной мощности увеличивается ток в соединительной линии. Это крайне нежелательно, так как повышает потери в линии или приводит к необходимости увеличивать площадь сечения ее проводов.

Из сказанного должно быть ясно, что в энергетических системах повышение $\cos\varphi$ является серьезной технико-экономической проблемой.

2. Постоянно используемыми элементами радиотехнических (а также и электротехнических) устройств являются катушки индуктивности и конденсаторы. Одно из основных требований, которому должны отвечать эти детали, заключается в том, чтобы они по своим свойствам приближались к чисто реактивным сопротивлениям. Иными словами, энергия, запасаемая в электрическом и магнитном полях, должна быть многим больше расходуемой энергии. Поэтому в качестве энергетического параметра цепи, эквивалентной катушке или конденсатору, целесообразно использовать не коэффициент мощности, а величину, равную отношению реактивной и активной мощностей и называемую добротностью.

Добротность активно-реактивной цепи

$$Q_x = \frac{|P_x|}{P} = |\operatorname{tg}\varphi| \qquad (3\text{-}124)$$

или

$$Q_x = \frac{|x|}{r}. \qquad (3\text{-}124а)$$

Если учесть, что $P_x = \omega W_x$ [см. (3-118)], выражение для добротности может быть записано так:

$$Q_x = \frac{\omega |W_x|}{P}. \qquad (3\text{-}125)$$

Подставив сюда $\omega = \frac{2\pi}{T}$ и приняв во внимание, что произведение $PT = W_{rT}$ равно энергии, расходуемой в активном сопротивлении за один период, получим

$$Q_x = 2\pi \frac{|W_x|}{W_{rT}}, \qquad (3\text{-}125а)$$

т. е. добротность может быть определена как в 2π раз увеличенное отношение максимально запасаемой энергии к энергии, расходуемой за один период.

Качество реактивного элемента цепи тем выше, чем больше его добротность.

Если речь идет о катушке индуктивности, то на основании (3-124) ее добротность

$$Q_L = \frac{x_L}{r_L} = \frac{\omega L}{r_L}. \tag{3-126}$$

С увеличением частоты полное активное сопротивление r_L, определяющее потери в проводнике катушки, в окружающих ее предметах и на излучение, растет. Поэтому добротность Q_L незначительно увеличивается с возрастанием частоты или — в определенном диапазоне частот — остается практически неизменной.

Добротность современных катушек, предназначенных для работы на радиочастотах, достигает величины $Q_L \approx 200 \div 500$.

Добротность конденсатора

$$Q_C = \frac{x_C}{r_C} = \frac{1}{\omega C r_C}. \tag{3-127}$$

Сопротивление, эквивалентное потерям в обкладках конденсатора и в его диэлектрике, r_C также растет с увеличением частоты. Поэтому, как видно из (3-127), с повышением частоты добротность конденсатора уменьшается.

Современные конденсаторы, используемые при высоких частотах в радиотехнических цепях, имеют добротность $Q_C \approx 500 \div 1000$.

г) Частотные характеристики активно-реактивной цепи

Если активно-реактивную цепь, к которой подведено переменное напряжение, рассматривать как двухполюсник, откликом на заданное воздействие следует считать проходящий в цепи ток. Ток полностью определяется своей амплитудой и фазой. Поэтому в качестве соотношений, характеризующих зависимость отклика от частоты воздействия, обычно рассматривают две характеристики.

Амплитудно-частотной характеристикой (ее часто именуют частотной) называется зависимость амплитуды тока от частоты $I(\omega)$ при $U = \text{const}$.

Фазово-частотной характеристикой (сокращенно фазовой) называют зависимость от частоты сдвига фаз φ между током и напряжением $\varphi(\omega)$.

Так как

$$I = \frac{U}{Z_{вх}}$$

и амплитуда напряжения $U = \text{const}$, частотные характеристики тока определяются частотными характеристиками входного сопротивления.

Имея в виду (3-101) и (3-124), получим

$$z_{\text{вх}} = r\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2}} = r\sqrt{1 + Q_x^2}. \qquad (3\text{-}128)$$

Поэтому

$$I = \frac{U}{r\sqrt{1 + Q_x^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q_x^2}}.$$

Здесь I_0 — амплитуда тока в цепи при отсутствии (коротком замыкании) реактивного сопротивления,

$$I_0 = \frac{U}{r}. \qquad (3\text{-}129)$$

Удобно выражать ток в долях его максимального значения I_0, т. е. пользоваться безразмерным отношением

$$n(\omega) = \frac{I}{I_0},$$

которое может быть названо нормированным (относительно I_0) током. Получаем

$$n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2}}}. \qquad (3\text{-}130)$$

Это выражение представляет собой уравнение амплитудно-частотной характеристики (частота входит в величину x).

Уравнение фазовой характеристики вытекает из (3-103):

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{r}\right).$$

Рассмотрим частотные характеристики нормированного тока цепей r, L и r, C.

Цепь r, L

Добротность цепи

$$Q_x = \frac{\omega L}{r} = \omega\tau. \qquad (3\text{-}131)$$

Величина L/r, обозначенная τ_L, имеет размерность времени и называется постоянной времени цепи r, L.[1]

Цепь r, C

Добротность цепи

$$Q_x = \frac{1}{\omega C r} = \frac{1}{\omega\tau}. \qquad (3\text{-}131а)$$

Величина $Cr = \tau_C$ имеет размерность времени и называется постоянной времени цепи r, C.[1]

[1] Физический смысл величин τ_L и τ_C рассматривается в главе восьмой.

Подставив (3-131) в (3-130), получим

$$n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau_L^2}}. \quad (3\text{-}132)$$

Подставив (3-131а) в (3-130), получим

$$n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\omega^2\tau_C^2}}}. \quad (3\text{-}132а)$$

По этим формулам рассчитаны семейства частотных характеристик $n(\omega)$ при $\tau = \text{const}$ для цепи r, L (рис. 3-36, *а*) и для цепи r, C (рис. 3-36, *б*). Чем меньше постоянная времени τ, тем более пологими получаются характеристики.

Рассматриваемые цепи могут быть названы частотно-избирательными. Для некоторых частот воздействия при заданной его интенсивности отклик получается особенно большим (нормированный ток близок к $n = 1$); колебания этих частот «пропускаются» в цепь; для других частот воздействия отклик мал; колебания этих частот «подавляются».

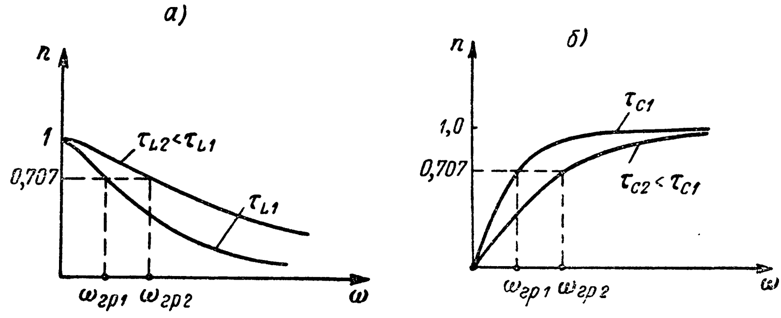


Рис. 3-36. Частотные характеристики $n(\omega)$.

П о л о с о й   п р о п у с к а н и я системы условно называют область частот, в пределах которой отклик не становится меньше, чем $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$ максимального своего значения, а п о л о с о й   п о д а в л е н и я — область частот, лежащих вне полосы пропускания.

Таким образом, на границе полосы пропускания

$$n_{гр} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707.$$

Из формул (3-132) и (3-132а) следует, что частота, соответствующая границе полосы пропускания (граничная частота),

$$\omega_{гр} = \frac{1}{\tau}. \quad (3\text{-}133)$$

При $\omega = \omega_{гр}$ активное и реактивное сопротивления цепи равны между собой ($r = |x|$).

Для тока цепи r, L полоса пропускания простирается от $\omega = 0$ (постоянный ток) до частоты $\omega = \omega_{гр}$. Чем меньше постоянная времени τ_L, тем шире полоса пропускания $\left(\omega_{гр} = \frac{r}{L}\right)$.

Фазовая характеристика цепи r, L согласно (3-96)

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(\omega\tau_L). \quad (3\text{-}134)$$

Для тока цепи r, C полоса пропускания занимает частоты от $\omega = \omega_{гр}$ до сколь угодно высоких частот ($\omega \to \infty$). Чем меньше постоянная времени τ_C, тем у́же полоса пропускания $\left(\omega_{гр} = \frac{1}{rC}\right)$.

Фазовая характеристика цепи r, C согласно (3-96а)

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\frac{1}{\omega\tau_C}. \quad (3\text{-}134а)$$

На рис. 3-37, *а* приведены фазовые характеристики цепи r, L, а на рис. 3-37, *б* — фазовые характеристики цепи r, C.

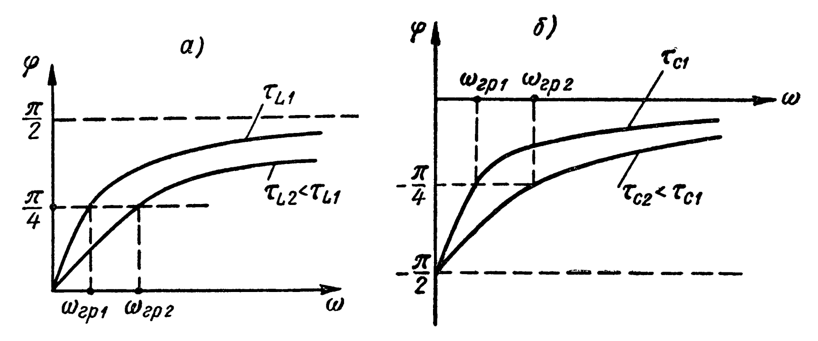


Рис. 3-37. Фазовые характеристики φ (ω).

При частоте $\omega = \omega_{гр}$ фазовый угол

$$|\varphi| = \frac{\pi}{4}.$$

Используя понятие о граничной частоте, уравнения частотных характеристик можно представить в обобщенном виде.

Для цепи r, L

$$n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_{гр}^2}}}; \quad (3\text{-}135)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_{гр}}\right). \quad (3\text{-}136)$$

Для цепи r, C

$$n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_{гр}^2}{\omega^2}}}; \quad (3\text{-}135а)$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_{гр}}{\omega}\right). \quad (3\text{-}136а)$$

Активно-реактивная цепь часто применяется в качестве четырехполюсника, причем выходное напряжение снимается или с реактивного сопротивления x, как это показано на рис. 3-38, *а*, или с активного сопротивления r — рис. 3-38, *б*.

В главе второй для количественной оценки свойств четырехполюсника было введено понятие о коэффициенте передачи [формула (2-29)].

В общем случае коэффициент передачи является комплексной величиной

$$K(j\omega)=\frac{U_{вых}}{U_{вх}}=\frac{U_{вых}e^{j\psi_{вых}}}{U_{вх}e^{j\psi_{вх}}}=K(\omega)\,e^{j\varphi_п}=K(\omega)\,e^{-j\varphi_K}. \quad (3\text{-}137)$$

Здесь $K(\omega)=|K(j\omega)|$ — модуль коэффициента передачи;

$\psi_{вых}$ и $\psi_{вх}$ — начальные фазы соответственно выходного и входного напряжений;

$\varphi_п=-\varphi_K=(\psi_{вых}-\psi_{вх})$ — сдвиг фаз между выходным и входным напряжениями.

Во многих расчетах целесообразнее пользоваться углом φ_K, а не $\varphi_п$. Поэтому в дальнейшем, как правило, будем оперировать этим углом. Он положителен ($\varphi_K>0$), когда $\psi_{вх}>\psi_{вых}$, т. е. если выходное напряжение отстает от входного.

Зависимость $K(j\omega)$ называют обычно **передаточной функцией** цепи.

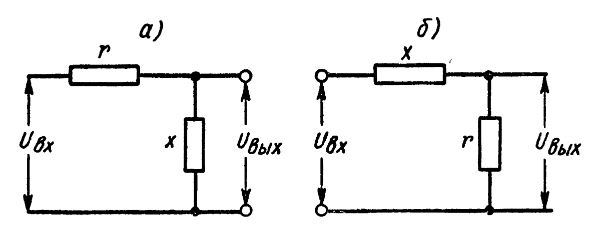


Рис. 3-38. Цепь r, x в качестве четырехполюсника.

Амплитудно-частотной характеристикой четырехполюсника является зависимость $K(\omega)$ и фазово-частотной — $\varphi_K(\omega)$.

Для схемы рис. 3-38, *а* передаточная функция

$$K_x(j\omega)=\frac{jx}{r+jx}=\frac{1}{1-j\frac{r}{x}}, \quad (3\text{-}138)$$

фазовый угол в соответствии с записью (3-177) будет

$$\varphi_{Kx}=\operatorname{arctg}\left(-\frac{r}{x}\right)=-\varphi_{пx}, \quad (3\text{-}139)$$

и модуль коэффициента передачи

$$K_x(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{r^2}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{Q_x^2}}}. \quad (3\text{-}140)$$

Если выходным является напряжение на активном сопротивлении (схема рис. 3-38, *б*), передаточная функция

$$K_r(j\omega)=\frac{r}{r+jx}=\frac{1}{1+j\frac{x}{r}};\qquad(3\text{-}141)$$

фазовый угол

$$\varphi_{Kr}=\operatorname{arctg}\left(+\frac{x}{r}\right)=-\varphi_{\text{п}r};\qquad(3\text{-}142)$$

модуль коэффициента передачи

$$K_r(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+Q_x^2}}.\qquad(3\text{-}143)$$

Применим полученные общие соотношения к цепям r, L и r, C, имея в виду, что для цепи r, L отношение

$$\frac{x}{r}=\frac{\omega L}{r}=\frac{\omega}{\omega_{\text{гр}}},\qquad(3\text{-}144)$$

а для цепи r, C

$$\frac{x}{r}=-\frac{1}{\omega Cr}=-\frac{\omega_{\text{гр}}}{\omega}.\qquad(3\text{-}145)$$

В табл. 3-1 сведены расчетные формулы частотных характеристик для разных вариантов цепей r, L и r, C. Здесь же приведены векторные диаграммы и примерные графики частотных и фазовых характеристик.

Ход этих кривых нетрудно пояснить простыми физическими соображениями. Рассмотрим в качестве примера схему цепи r, L, в которой выходное напряжение снимается с индуктивности. С увеличением частоты индуктивное сопротивление x_L возрастает; все большая доля напряжения падает на x_L и меньшая на r. Поэтому с увеличением частоты модуль коэффициента передачи растет; полоса пропускания схемы простирается от $\omega=\omega_{\text{гр}}$ до сколь угодно высоких частот. Ток в цепи отстает от приложенного напряжения $U_{\text{вх}}$ на угол φ, который с увеличением частоты увеличивается, приближаясь к $\pi/2$. Напряжение на индуктивности $U_{\text{вых}}$ опережает ток на $\pi/2$ и поэтому по мере роста частоты сдвиг фаз между $U_{\text{вх}}$ и $U_{\text{вых}}$ стремится к нулю.

Из всего сказанного следует тот важный вывод, что для одной и той же цепи частотные характеристики могут иметь существенно различный вид, в зависимости от того, какой из откликов используется. Так, если в цепи r, C интересоваться частотной зависимостью тока (или пропорционального ему напряжения на сопротивлении), окажется, что система пропускает высокие частоты. Если же рассматривать зависимость от частоты напряжения на емкости, то, наоборот, цепью будут пропускаться колебания низких частот.

Таблица 3-1

Частотные характеристики цепей

Схемы	Передаточная функция $K(j\omega)$	Амплитудно-частотная характеристика $K(\omega)$	Фазово-частотная характеристика $\varphi_K(\omega)$	Векторные диаграммы
I, r, C, $U_{вх}$, $U_{вых}$	$K_x(j\omega)=\dfrac{1}{1+jr\omega C}=$ $=\dfrac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_{гр}}}$	$K_x(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{1+r^2\omega^2C^2}}=$ $=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\omega^2}{\omega_{гр}^2}}}$ $K(\omega)$; 1; 0,707; 0; $\omega_{гр}$; ω	$\operatorname{tg}\varphi_K=r\omega C=\dfrac{\omega}{\omega_{гр}}$ φ_K; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}$; 0; $\omega_{гр}$; ω	I; φ; φ_K; $U_{вх}$; $U_{вых}$
I, C, r, $U_{вх}$, $U_{вых}$	$K_r(j\omega)=\dfrac{1}{1-j\dfrac{1}{\omega Cr}}=$ $=\dfrac{1}{1-j\dfrac{\omega_{гр}}{\omega}}$	$K_r(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\omega^2C^2r^2}}}=$ $=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\omega_{гр}^2}{\omega^2}}}$ $K(\omega)$; 1; 0,707; 0; $\omega_{гр}$; ω	$\operatorname{tg}\varphi_K=-\dfrac{1}{\omega Cr}=$ $=-\dfrac{\omega_{гр}}{\omega}$ φ_K; $\omega_{гр}$; ω; 0; $-\frac{\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{2}$	I; $U_{вых}$; $\varphi=\varphi_K$; $U_{вх}$

Продолжение табл. 3-1

Схемы	Передаточная функция $K(j\omega)$	Амплитудно-частотная характеристика $K(\omega)$	Фазово-частотная характеристика $\varphi_K(\omega)$	Векторные диаграммы
	$K_x(j\omega)=\frac{1}{1-j\frac{r}{\omega L}}=$ $=\frac{1}{1-j\frac{\omega_{гр}}{\omega}}$	$K_x(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{r^2}{\omega^2L^2}}}=$ $=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega_{гр}^2}{\omega^2}}}$	$\operatorname{tg}\varphi_K=-\frac{r}{\omega L}=$ $=-\frac{\omega_{гр}}{\omega}$	
	$K_r(j\omega)=\frac{1}{1+j\frac{\omega L}{r}}=$ $=\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_{гр}}}$	$K_r(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2L^2}{r^2}}}=$ $=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_{гр}^2}}}$	$\operatorname{tg}\varphi_K=\frac{\omega L}{r}=\frac{\omega}{\omega_{гр}}$	

Разумеется, избирательные свойства цепей r, L и r, C проявляются особенно ярко при соблюдении определенных условий. Если, например, речь идет о частотных зависимостях тока, то они будут неравномерными (избирательными), если $r \ll |x|$, т. е. когда добротность $Q_x \gg 1$. Наоборот, при сопротивлении $r \gg |x|$ ток почти не зависит от частоты и, значит, частотно-избирательные свойства цепи практически не проявляются.

д) Параллельная активно-реактивная цепь

Пусть к источнику гармонического напряжения подключены параллельно соединенные активное r и реактивное x сопротивления (рис. 3-39, *а*).

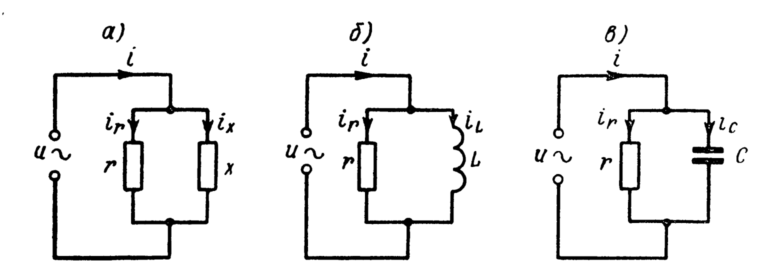


Рис. 3-39. Параллельные активно-реактивные цепи.

В любой момент для узла схемы должен соблюдаться первый закон Кирхгофа: сумма мгновенных значений токов в ветвях i_r и i_x равна току в неразветвленной части i.

Цепь r, L

Для цепи параллельно соединенных активного сопротивления и индуктивности (рис. 3-39, *б*) получим

$$i = i_r + i_L$$

или

$$i = \frac{u}{r} + \frac{1}{L}\int u\,dt. \quad (3\text{-}146)$$

Цепь r, C

Для цепи параллельно соединенных активного сопротивления и емкости (рис. 3-39, *в*) получим

$$i = i_r + i_C$$

или

$$i = \frac{u}{r} + C\frac{du}{dt}. \quad (3\text{-}146\text{a})$$

Используя для решения этих уравнений символический метод, найдем

$$I = \frac{U}{r} + \frac{U}{j\omega L}. \quad (3\text{-}147)$$

$$I = \frac{U}{r} + Uj\omega C. \quad (3\text{-}147\text{a})$$

Обобщая эти соотношения, можно записать следующее выражение, связывающее комплексные амплитуды тока и напряжения в параллельной цепи r, x:

$$I = U\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{jx}\right) = U(g - jb),$$

где $g = \frac{1}{r}$ — проводимость активной ветви;

$b = \frac{1}{x}$ — проводимость реактивной ветви.

Комплексная входная проводимость цепи

$$Y_{\text{вх}} = \frac{I}{U} = g - jb = y_{\text{вх}} e^{-j\varphi}, \qquad (3\text{-}148)$$

как видно, равна сумме проводимостей параллельно соединенных ветвей.

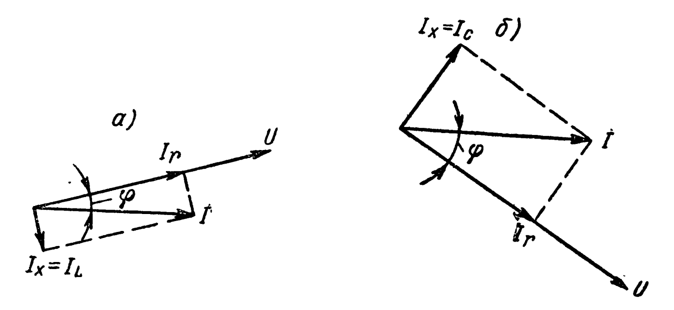


Рис. 3-40. Векторные диаграммы параллельных цепей.

Модуль входной проводимости

$$y_{\text{вх}} = \sqrt{g^2 + b^2}.$$

Комплексное входное сопротивление

$$Z_{\text{вх}} = \frac{1}{\frac{1}{r} + \frac{1}{jx}} = \frac{rjx}{r + jx}, \qquad (3\text{-}149)$$

т. е. чтобы рассчитать входное сопротивление разветвленной цепи, следует аналогично цепям постоянного тока поделить произведение сопротивлений r и jx на их сумму.

На рис. 3-40 представлены векторные диаграммы, иллюстрирующие процессы в цепи: диаграмма рис. 3-40, *а* соответствует цепи r, L, а диаграмма рис. 3-40, *б* — цепи r, C.

Как видно из (3-148) и из векторных диаграмм, угол сдвига фаз между приложенным напряжением и током неразветвленной части определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{g}. \qquad (3\text{-}150)$$

Для определения добротности цепи, состоящей из параллельно соединенных активного и реактивного сопротивлений, воспользуемся общим выражением (3-124). Подставив в него (3-150), получим

$$Q_x = \frac{|b|}{g} = \frac{r}{|x|}. \qquad (3\text{-}151)$$

3-5. Эквивалентные схемы пассивного двухполюсника и их преобразования

Как бы ни была сложна электрическая цепь, она для питающего ее источника гармонического напряжения является двухполюсником (рис. 3-41, *а*), входное сопротивление которого

$$Z_{вх} = \frac{U}{I} = r_{вх} + jx_{вх}.$$

Из произведенного в § 3-4 анализа [формула (3-99)] следует, что этому выражению соответствует схема, составленная из после-

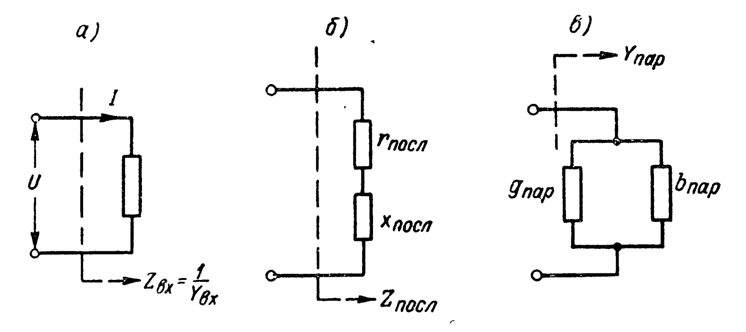


Рис. 3-41. Эквивалентные схемы пассивного двухполюсника.

довательно соединенных активного сопротивления $r_{посл} = r_{вх}$ и реактивного сопротивления $x_{посл} = x_{вх}$. Поэтому схема, эквивалентная нашему двухполюснику, может быть представлена в виде рис. 3-41, *б*, выражение входного сопротивления которой можно записать так:

$$Z_{вх} = Z_{посл} = r_{посл} + jx_{посл}. \qquad (3\text{-}152)$$

Эта эквивалентная схема не является единственно возможной. В самом деле, входная проводимость двухполюсника

$$Y_{вх} = \frac{I}{U} = g_{вх} - jb_{вх}.$$

Как показывает (3-148), это выражение соответствует схеме, состоящей из параллельно соединенных активной проводимости

$g_{пар}=g_{вх}$ и реактивной проводимости $b_{пар}=b_{вх}$ (рис. 3-41, *в*). Входная проводимость для этой схемы

$$Y_{пар}=Y_{вх}=g_{пар}-jb_{пар}. \qquad (3\text{-}153)$$

Обе эквивалентные схемы совершенно равноценны, если только их входные сопротивления (проводимости) равны между собой и равны входному сопротивлению (проводимости) исходного двухполюсника, т. е. если

$$\left.\begin{aligned} &Z_{посл}=Z_{пар}=Z_{вх} \\ \text{или} \quad &Y_{посл}=Y_{пар}=Y_{вх}=\frac{1}{Z_{вх}}. \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}154)$$

Найдем соотношение между параметрами элементов, входящих в состав каждой из эквивалентных схем.

Из условия (3-154) следует, что

$$r_{посл}+jx_{посл}=\frac{1}{g_{пар}-jb_{пар}}.$$

Умножив числитель и знаменатель правой части на комплекс $g_{пар}+jb_{пар}$, сопряженный знаменателю, найдем

$$r_{посл}+jx_{посл}=\frac{g_{пар}}{y_{пар}^2}+j\frac{b_{пар}}{y_{пар}^2},$$

где $y_{пар}=\sqrt{g_{пар}^2+b_{пар}^2}$ — модуль проводимости параллельной схемы.

Теперь, приравняв вещественные и мнимые части, получим:

$$\left.\begin{aligned} r_{посл}&=\frac{g_{пар}}{y_{пар}^2}, \\ x_{посл}&=\frac{b_{пар}}{y_{пар}^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}155)$$

Эти зависимости позволяют переходить от параллельной эквивалентной схемы (если заданы $g_{пар}$ и $b_{пар}$) к последовательной схеме.

Согласно (3-154)

$$y_{пар}=\frac{1}{z_{посл}},$$

где $z_{посл}=\sqrt{r_{посл}^2+x_{посл}^2}$ — модуль сопротивления последовательной схемы.

Поэтому из (3-155) следует, что

$$\left.\begin{aligned} g_{пар}&=r_{посл}y_{пар}^2=\frac{r_{посл}}{z_{посл}^2}, \\ b_{пар}&=x_{посл}y_{пар}^2=\frac{x_{посл}}{z_{посл}^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}156)$$

Эти же соотношения можно выразить через сопротивления $r_{пар} = \frac{1}{g_{пар}}$ и $x_{пар} = \frac{1}{b_{пар}}$, входящие в состав параллельной схемы; получим

$$r_{пар} = \frac{z^2_{посл}}{r_{посл}}, \quad x_{пар} = \frac{z^2_{посл}}{x_{посл}}. \qquad (3\text{-}157)$$

Формулы (3-157) позволяют осуществить переход от последовательной эквивалентной схемы (когда заданы $r_{посл}$ и $x_{посл}$) к параллельной схеме.

Важно отметить, что хотя $Z_{посл} = \frac{1}{Y_{пар}}$ и $z_{посл} = \frac{1}{y_{пар}}$, однако $r_{посл} \neq \frac{1}{g_{пар}}$ и $x_{посл} \neq \frac{1}{b_{пар}}$.

Целесообразность использования той или иной эквивалентной схемы определяется конкретными условиями задачи. Расчеты цепей существенно облегчаются, если производить переход (пересчет) от одной эквивалентной схемы к другой. Тогда оказываются полезными формулы пересчета (3-155) и (3-157)[1].

Рассмотрим некоторые частные случаи применения полученных соотношений, часто встречающиеся в практике расчета радиотехнических цепей.

1. В последовательной эквивалентной схеме активное сопротивление многим меньше реактивного (цепь с малыми потерями):

$$r_{посл} \ll |x_{посл}|.$$

Тогда $z_{посл} \approx |x_{посл}|$ и из (3-157) получаем:

$$r_{пар} \approx \frac{x^2_{посл}}{r_{посл}}, \quad x_{пар} \approx x_{посл}. \qquad (3\text{-}158)$$

Таким образом, в данном случае при переходе от последовательной схемы к параллельной реактивное сопротивление остается неизменным, а активное сопротивление увеличивается в $\frac{x^2_{посл}}{r^2_{посл}} = Q^2_{посл}$ раз.

Производя обратный пересчет параллельной схемы в последовательную, когда

$$r_{пар} \gg |x_{пар}|, \text{ т. е. } g_{пар} \ll |b_{пар}|,$$

получим $y_{пар} \approx |b_{пар}|$ и согласно (3-155)

$$\left.\begin{aligned} r_{посл} &\approx \frac{g_{пар}}{b^2_{пар}} = \frac{x^2_{пар}}{r_{пар}}, \\ x_{посл} &\approx \frac{1}{b_{пар}} = x_{пар}. \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}159)$$

---

[1] Если пользоваться общей записью комплексной проводимости $Y_{вх} = g_{вх} + j\,b_{вх}$ (3-105а), то в правой части выражений для $x_{посл}$ (3-155), $b_{пар}$ (3-156) и $x_{пар}$ (3-157) должен быть поставлен знак минус.

Реактивное сопротивление опять остается неизменным, а активное сопротивление уменьшается в $\frac{r_{\text{пар}}^2}{x_{\text{пар}}^2} = Q_{\text{пар}}^2$ раз.

В § 3-4, п. «а» было сказано, что в качестве эквивалентной схемы катушки индуктивности может быть принята схема, состоящая из последовательно соединенных r и L (рис. 3-42, *а*).

Так как обычно $r_L \ll \omega L$, то согласно (3-158) катушку можно представить также и другой эквивалентной схемой (рис. 3-42, *б*), где индуктивность остается той же, а активное сопротивление

$$r_{L\,\text{пар}} = \frac{\omega^2 L^2}{r_L} = R_L.$$

Аналогично конденсатор с малыми потерями заменяется любой из двух приближенных эквивалентных схем (рис. 3-43).

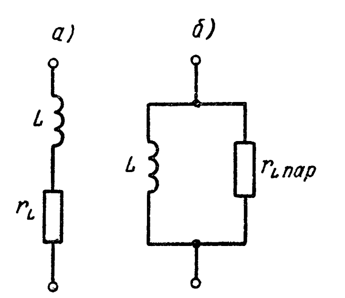


Рис. 3-42. Эквивалентные схемы катушки индуктивности.

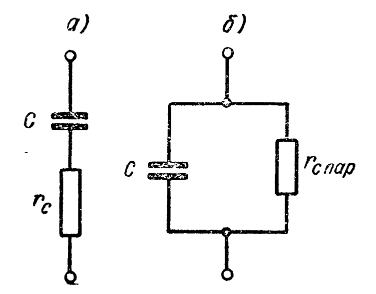


Рис. 3-43. Эквивалентные схемы конденсатора: *а* — последовательная; *б* — параллельная.

Емкость C одинакова в обеих схемах, а активное сопротивление параллельной схемы

$$r_{C\,\text{пар}} \approx \frac{1}{\omega^2 C^2 r_C} = R_C.$$

2. В последовательной схеме активное сопротивление значительно превосходит реактивное сопротивление (цепь с большими потерями): $r_{\text{посл}} \gg |x_{\text{посл}}|$.

Тогда $z_{\text{посл}} \approx r_{\text{посл}}$, и из (3-157) следует, что

$$\left.\begin{aligned} r_{\text{пар}} &\approx r_{\text{посл}}, \\ x_{\text{пар}} &\approx \frac{r_{\text{посл}}^2}{x_{\text{посл}}}. \end{aligned}\right\} \tag{3-160}$$

При пересчете последовательной схемы в параллельную активное сопротивление не изменяется, а реактивное увеличивается в $\frac{r_{\text{посл}}^2}{x_{\text{посл}}^2} = \frac{1}{Q_{\text{посл}}^2}$ раз.

Если производится обратный переход — от параллельной схемы к последовательной, когда $r_{пар} \ll |x_{пар}|$, т. е. $g_{пар} \gg |b_{пар}|$, то $y_{пар} \approx g_{пар}$ и в соответствии с (3-155)

$$\left.\begin{aligned} r_{посл} &\approx \frac{1}{g_{пар}} = r_{пар}, \\ x_{посл} &\approx \frac{b_{пар}}{g_{пар}^2} = \frac{r_{пар}^2}{x_{пар}}. \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}161)$$

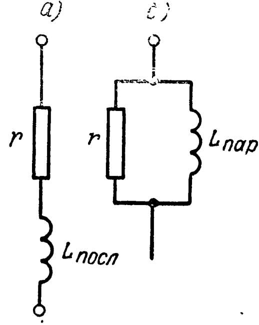


Рис. 3-44. Эквивалентные схемы элемента сопротивления: *а* — последовательная; *б* — параллельная.

Активное сопротивление вновь остается тем же, а реактивное уменьшается в $\frac{x_{пар}^2}{r_{пар}^2} = \frac{1}{Q_{пар}^2}$ раз.

В радиоустройствах широко применяются детали, называемые элементами сопротивления, или «сопротивлениями». Они должны обладать определенным активным сопротивлением и по возможности исчезающе малым входным реактивным сопротивлением. Если учитывать только индуктивность элемента сопротивления, элемент можно представить одной из двух эквивалентных схем рис. 3-44. Ввиду того, что $r_{посл} \gg \omega L_{посл}$, то согласно (3-160) $r_{пар} \approx r_{посл}$, а

$$\omega L_{пар} = \frac{r^2}{\omega L_{посл}},$$

или

$$L_{пар} = \frac{r^2}{\omega^2 L_{посл}}.$$

3-6. Расчет сложных цепей переменного тока

а) Особенности расчета сложных цепей переменного тока

Цепь переменного тока может представлять собой сложную систему, состоящую в общем случае из нескольких источников гармонических колебаний одинаковой частоты и ряда пассивных элементов — сопротивлений и реактивностей, причем последние могут быть как положительными (индуктивными), так и отрицательными (емкостными).

Основной задачей расчета сложной цепи переменного тока является нахождение при заданном воздействии всех откликов, т. е. определение амплитуд и начальных фаз токов и напряжений на всех участках цепи.

Благодаря применению символического метода все основные количественные соотношения, определяющие режим цепей при гармонических колебаниях, имеют совсем такой же вид, как аналогичные выражения для цепи постоянного тока. Только вместо

вещественных величин мы оперируем в случае переменного тока с комплексными числами.

Действительно, вспомним, что комплексные амплитуды напряжения и тока участка цепи связаны уравнением закона Ома (3-110), аналогичным (2-3).

Далее, согласно (3-95) для замкнутого контура, выделенного из сложной цепи переменного тока, может быть записано уравнение второго закона Кирхгофа в таком же виде, как для цепи постоянного тока.

Обобщая (3-95) на случай контура, составленного из n источников гармонических э. д. с. E одинаковой частоты и m последовательно соединенных комплексных сопротивлений, получаем

$$\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{I}_i Z_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}_i. \qquad (3\text{-}162)$$

Для узла цепи переменного тока, как видно из (3-147), уравнение первого закона Кирхгофа записывается так же, как и для постоянного тока.

Если обобщим (3-147) на узел, в котором сходится k ветвей, получим, что

$$\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{I}_i = 0. \qquad (3\text{-}163)$$

Очевидно, что все те методы расчета цепей постоянного тока, которые изложены в главе второй, могут быть распространены и на цепи переменного тока. Необходимо, однако, учитывать некоторые важные специфические особенности, отличающие расчет цепей переменного тока.

1. Все расчеты производятся над комплексными амплитудами напряжений (э. д. с.) и токов. Результат получается также в виде комплексных амплитуд искомых откликов. Поэтому, если желательно получить выражения для мгновенных значений токов и напряжений, следует осуществить переход к ним в соответствии с известными правилами.

2. Сопротивления, составляющие цепь, имеют, вообще говоря, различный характер (комплексные, активные, реактивные), что необходимо должным образом учитывать в расчетах.

3. Направление переменных напряжений (э. д. с.) и токов изменяется много раз в секунду; как было уже отмечено, стрелки, которые мы расставляем на схемах, имеют условный характер.

б) Расчет на основе законов Кирхгофа

Имея в виду сделанные выше замечания, обратимся к рассмотрению основных расчетных операций, которые приходится производить при анализе сложных цепей переменного тока.

Входное сопротивление цепи, составленной из m последовательно соединенных комплексных сопротивлений (рис. 3-45, *а*) $Z_1 = r_1 + jx_1$; $Z_2 = r_2 + jx_2$; ...; $Z_m = r_m + jx_m$, на основании второго закона Кирхгофа [см. (3-162)] равно сумме этих сопротивлений, т. е.

$$Z_{вх} = r_1 + r_2 + \ldots + r_m + j(x_1 + x_2 + \ldots + x_m), \qquad (3\text{-}164)$$

где $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = r_{вх}$; $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = x_{вх}$.

Реактивные сопротивления могут иметь разные знаки; суммирование их должно производиться алгебраически. В частности, $x_{вх}$

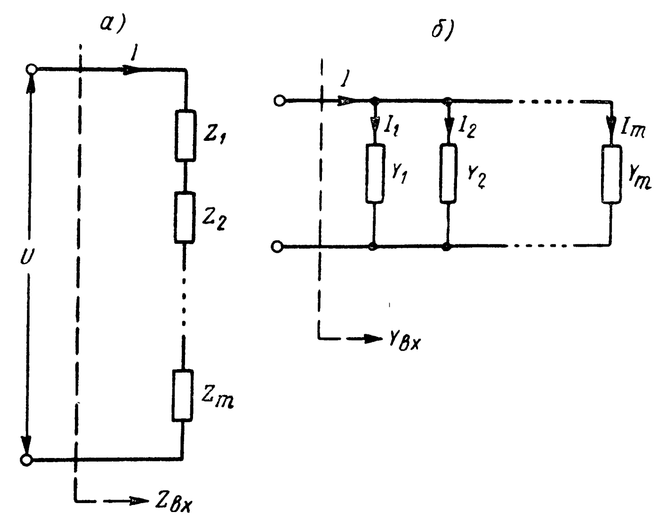


Рис. 3-45. Последовательное (*а*) и параллельное (*б*) соединение элементов.

может оказаться равным нулю и тогда входное сопротивление чисто активно.

Угол сдвига фаз между приложенным напряжением и током

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x_{вх}}{r_{вх}}. \qquad (3\text{-}165)$$

При параллельном соединении m элементов (рис. 3-45, *б*), имеющих комплексные проводимости $Y_1 = g_1 - jb_1$; $Y_2 = g_2 - jb_2$; ...; $Y_m = g_m - jb_m$, входная проводимость цепи на основании первого закона Кирхгофа [см. (3-163)]

$$Y_{вх} = g_1 + g_2 + \ldots + g_m - j(b_1 + b_2 + \ldots + b_m), \qquad (3\text{-}166)$$

где $g_1 + g_2 + \ldots + g_m = g_{вх}$; $b_1 + b_2 + \ldots + b_m = b_{вх}$.

Реактивные проводимости надо суммировать алгебраически; они могут иметь разные знаки. В частности, $b_{вх}$ может быть равна нулю; тогда входная проводимость чисто активна.

Если ставится задача расчета токов и напряжений в участках сложной разветвленной цепи на основе законов Кирхгофа, решение ее целесообразно разбить на несколько этапов, которые рассмотрим на примере схемы рис. 3-46.

1. Выбираем условно-положительные направления токов и напряжений и расставляем на схеме стрелки в соответствии с этими направлениями.

Разумеется, при этом необходимо располагать некоторыми исходными данными. Например, могут быть заданы воздействующие на цепь э. д. с. E_1 и E_2, их условно положительные направления и начальные фазы. В соответствии с этим проставляются стрелки, указывающие направления э. д. с. Так как начальные фазы э. д. с. заданы, фазы всех остальных величин будут отсчитываться относительно них.

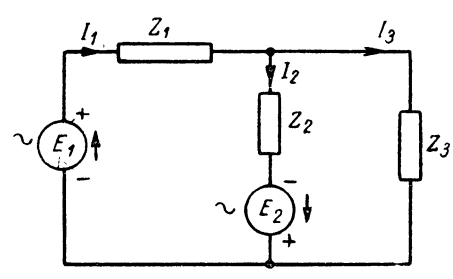


Рис. 3-46. Сложная цепь переменного тока.

2. Записываем уравнения Кирхгофа для независимых контуров и узлов схемы.

В случае схемы 3-46, приняв во внимание условные направления токов и э. д. с., получим уравнения в таком виде:

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0,$$
$$\dot{E}_1 + \dot{E}_2 = \dot{I}_1 Z_1 + \dot{I}_2 Z_2,$$
$$\dot{E}_2 = \dot{I}_2 Z_2 - \dot{I}_3 Z_3.$$

В результате решения этой системы получаем значения искомых комплексных амплитуд токов:

$$\left.\begin{aligned} \dot{I}_1 &= I_{в1} + jI_{м1} = I_1 e^{j\psi_{i1}}, \\ \dot{I}_2 &= I_{в2} + jI_{м2} = I_2 e^{j\psi_{i2}}, \\ \dot{I}_3 &= I_{в3} + jI_{м3} = I_3 e^{j\psi_{i3}}. \end{aligned}\right\}$$

Здесь $I_в$ и $I_м$ — найденные в результате решения вещественная и мнимая части комплексов токов.

Начальные фазы токов

$$\left.\begin{aligned} \psi_{i1} &= \operatorname{arctg}\frac{I_{м1}}{I_{в1}}, \\ \psi_{i2} &= \operatorname{arctg}\frac{I_{м2}}{I_{в2}}, \\ \psi_{i3} &= \operatorname{arctg}\frac{I_{м3}}{I_{в3}}. \end{aligned}\right\}$$

Амплитуды токов

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \sqrt{I_{в1}^2 + I_{м1}^2}, \\ I_2 &= \sqrt{I_{в2}^2 + I_{м2}^2}, \\ I_3 &= \sqrt{I_{в3}^2 + I_{м3}^2}. \end{aligned}\right\}$$

3. Рассчитываем мощность, расходуемую в пассивных элементах цепи. Она складывается из активных мощностей, выделяемых в активных составляющих r_1, r_2 и r_3 сопротивлений Z_1, Z_2 и Z_3:

$$P = P_1 + P_2 + P_3,$$

где

$$P_1 = \frac{1}{2} I_1^2 r_1,$$

$$P_2 = \frac{1}{2} I_2^2 r_2,$$

$$P_3 = \frac{1}{2} I_3^2 r_3.$$

Средние мощности каждого из генераторов

$$\left.\begin{aligned} P_{01} &= \mathrm{Re}\left[\frac{E_1 \hat{I}_1}{2}\right] = \frac{E_1 I_1}{2}\cos\varphi_1, \\ P_{02} &= \mathrm{Re}\left[\frac{E_2 \hat{I}_2}{2}\right] = \frac{E_2 I_2}{2}\cos\varphi_2. \end{aligned}\right\}$$

Здесь φ_1 и φ_2 — углы сдвига фаз между э. д. с. генераторов и проходящими через них токами. Если один из этих углов больше $\pi/2$, соответствующая мощность отрицательна, т. е. этот генератор потребляет энергию (находится в «двигательном» режиме). При этом имеется в виду, что условно положительные направления э. д. с. генератора и тока через него совпадают.

Как известно, при расчете цепей постоянного тока о правильности выбранных направлений судят по знаку решения: если какой-либо ток получился отрицательным, его действительное направление обратно первоначально намеченному. Этот критерий, однако, не может быть принят при расчете цепей переменного тока. Знак комплексного числа (точнее, его вещественной и мнимой части) свидетельствует лишь о том, в каком квадранте комплексной плоскости лежит изображающая данное число точка, т. е. говорит о начальной фазе данного тока. Изменение этого знака на обратный соответствует изменению выбранного условно положительного направления и повороту вектора тока на векторной диаграмме на 180°.

Расчет сложной цепи переменного тока целесообразно сопровождать построением векторных диаграмм всех напряжений и токов. Эти диаграммы помогают проконтролировать, соблюдаются ли при выбранных условных направлениях токов и напряжений законы Кирхгофа для всех контуров и узлов схемы.

Кроме того, полезно проверить, выполняется ли то очевидное положение, что для любого пассивного элемента цепи сдвиг фаз между током и напряжением на его зажимах не может превосходить 90°.

В системе должен, разумеется, соблюдаться закон сохранения энергии, т. е. полная расходуемая в пассивных элементах цепи мощность должна быть равна сумме средних мощностей всех источников:

$$\sum_{i=1}^{m} P_i = \sum_{i=1}^{n} P_{0i},$$

где m — число активных сопротивлений цепи;
n — число источников энергии.

в) Другие методы расчета

Кроме способа расчета сложной цепи переменного тока, основанного на непосредственном использовании законов Кирхгофа, могут быть применены и другие методы, известные из теории цепей по-

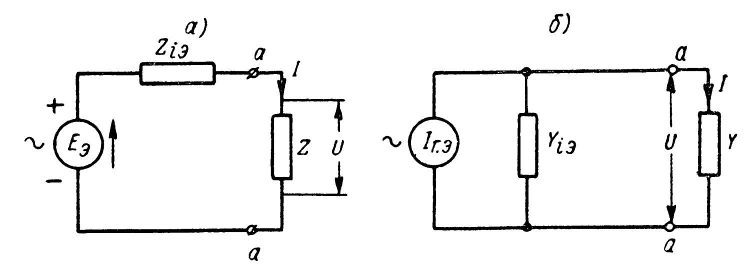


Рис. 3-47. Схемы с эквивалентными генераторами.

стоянного тока, в частности методы контурных токов и узловых напряжений. При их реализации следует иметь в виду специфические особенности расчета, указанные выше.

Для расчета линейных цепей переменного тока применимы также методы: наложения и эквивалентных генераторов. При использовании последнего надо иметь в виду, что внутреннее сопротивление эквивалентного генератора в общем случае является комплексной величиной (рис. 3-47). Поэтому комплексные амплитуды тока, проходящего через некоторый элемент цепи $Z = \frac{1}{Y}$, и падения напряжения на нем соответственно будут: для схемы с генератором э. д. с. (рис. 3-47, *а*)

$$I = \frac{E_э}{Z_{iэ} + Z}; \qquad (3\text{-}167)$$

для схемы с генератором тока (рис. 3-47, *б*)

$$U = \frac{I_{г.э}}{Y_{iэ} + Y}. \qquad (3\text{-}168)$$

В этих формулах

$E_э$ — комплексная амплитуда э. д. с. эквивалентного генератора, равная напряжению холостого хода (при разомкнутых точках *а-а*);

$I_{г.э}$ — комплексная амплитуда тока генератора, равная амплитуде тока короткого замыкания (при коротком замыкании точек *а-а*);

$Z_{iэ} = \frac{1}{Y_{iэ}} = \frac{E_э}{I_{г.э}}$ — комплексное внутреннее сопротивление эквивалентного генератора.

3-7. Магнитно-связанные цепи

а) Общие сведения о магнитно-связанных цепях

Вопрос о магнитном поле катушки и ее индуктивности был подробно рассмотрен в главе первой (§ 1-3).

Теперь представим себе, что поблизости от катушки *1* (рис. 3-48) помещена другая катушка *2*, и рассмотрим явления в двух случаях:

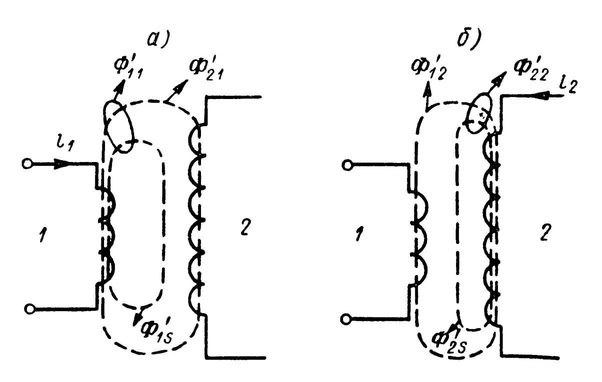


Рис. 3-48. Магнитно-связанные катушки.

а) когда ток проходит только через катушку *1* (катушка *2* разомкнута); б) когда ток проходит только через катушку *2*.

Если ток i_1 проходит через катушку *1*, с ней связан поток самоиндукции (рис. 3-48, *а*)

$$\Phi_{11} = n_1\Phi'_{11}, \qquad (3\text{-}169)$$

Если ток i_2 проходит через катушку *2*, с ней связан поток самоиндукции (рис. 3-48, *б*)

$$\Phi_{22} = n_2\Phi'_{22}, \qquad (3\text{-}169а)$$

где n_1 — число витков катушки *1*;

Φ'_{11} — поток, пронизывающий каждый из витков катушки *1*.

Индуктивность катушки *1* согласно (1-35)

$$L_1 = \frac{\Phi_{11}}{i_1}. \qquad (3\text{-}170)$$

Часть потока Φ'_{11}, равная Φ'_{21}, пронизывает каждый из витков катушки *2*. Поток, сцепленный со всей катушкой *2*, называемый потоком взаимоиндукции катушки *1*,

$$\Phi_{21} = n_2\Phi'_{21}. \qquad (3\text{-}171)$$

где n_2 — число витков катушки *2*;

Φ'_{22} — поток, пронизывающий каждый из витков катушки *2*.

Индуктивность катушки *2* согласно (1-35)

$$L_2 = \frac{\Phi_{22}}{i_2}. \qquad (3\text{-}170a)$$

Часть потока Φ'_{22}, равная Φ'_{12}, пронизывает каждый из витков катушки *1*. Поток, сцепленный со всей катушкой *1*, называемый потоком взаимоиндукции катушки *2*,

$$\Phi_{12} = n_1\Phi'_{12}. \qquad (3\text{-}171a)$$

Взаимоиндуктивностью называется отношение потока взаимоиндукции к связанному с ним току,

$$M = \frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{\Phi_{12}}{i_2}. \qquad (3\text{-}172)$$

Взаимоиндуктивность, так же как и индуктивность, измеряется в генри.

Та часть потока Φ'_{11}, которая замыкается, минуя катушку *2*, носит название потока рассеяния катушки *1* и обозначена на рис. 3-48, *а* Φ'_{1S}. Очевидно, что

$$\Phi'_{11} = \Phi'_{21} + \Phi'_{1S}. \qquad (3\text{-}173)$$

Та часть потока Φ'_{22}, которая замыкается, минуя катушку *1*, носит название потока рассеяния катушки *2* и обозначена на рис. 3-48, *б* Φ'_{2S}. Очевидно, что

$$\Phi'_{22} = \Phi'_{12} + \Phi'_{2S}. \qquad (3\text{-}173a)$$

В общем случае токи могут проходить одновременно через каждую из катушек. Тогда общий (результирующий) поток первой катушки

$$\Phi_1 = \Phi_{11} \pm \Phi_{12}. \qquad (3\text{-}174)$$

Верхний знак (+) соответствует тому случаю, когда магнитное поле взаимоиндукции совпадает по направлению с полем самоиндукции, — так называемое согласное включение. Нижний знак (—) соответствует встречному включению, когда поле взаимоиндукции направлено навстречу полю самоиндукции.

Аналогично общий поток второй катушки

$$\Phi_2 = \Phi_{22} \pm \Phi_{21}. \qquad (3\text{-}175)$$

Включим катушки последовательно (рис. 3-49), так, что обе они обтекаются одинаковым током $i_1 = i_2 = i$. Полагая, что намотка катушек произведена в одинаковом направлении, можно двояким образом соединить их между собой: а) когда конец одной $к_1$ соединен с началом другой $н_2$ (рис. 3-49, *а*); при этом, очевидно, получим согласное включение; б) когда конец первой катушки $к_1$ соединен с концом второй $к_2$ (рис. 3-49, *б*); такое включение является встречным. [1]

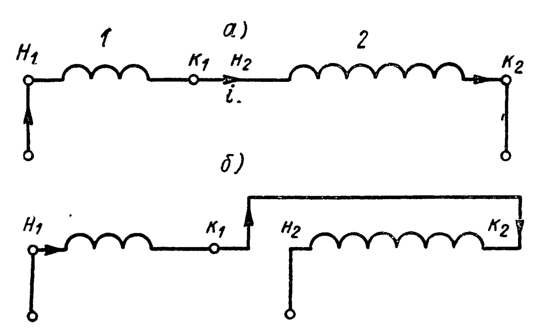


Рис. 3-49. Согласное (*а*) и встречное (*б*) включение катушек.

Общий поток всей системы последовательно соединенных катушек

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2,$$

а общая индуктивность

$$L = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{i}.$$

Подставив сюда вместо Φ_1 и Φ_2 их значения из (3-174) и (3-175) и приняв во внимание (3-170), (3-170а) и (3-172), получим

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M. \quad (3\text{-}176)$$

Знак плюс соответствует согласному включению катушек; знак минус — встречному их включению.

Отсюда следует, что взаимоиндуктивность в отличие от индуктивности может рассматриваться как алгебраическая величина, имеющая тот или иной знак.

Записав (3-176) в виде

$$L = L_1 + L_2 + 2M,$$

мы должны считать, что при согласном включении $M > 0$, при встречном $-M < 0$.

Изменения знака и величины взаимоиндуктивности можно до-

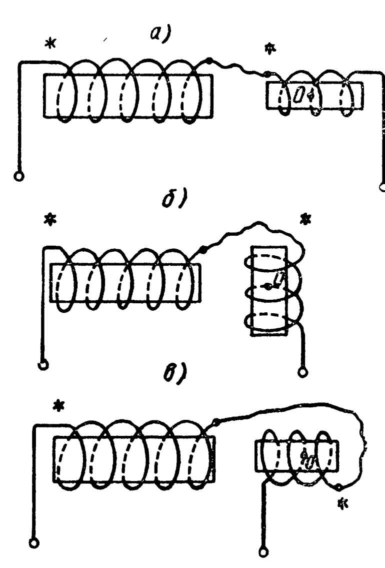


Рис. 3-50. Вариометр.

[1] На последующих рисунках начала катушек обозначены звездочкой (*).

стичь, не изменяя способа включения катушек между собой, но варьируя пространственное положение одной катушки относительно другой.

Если, например, одну из катушек вращать вокруг оси O, перпендикулярной плоскости чертежа (рис. 3-50), то (при условии одинакового направления намотки) в положении *а* коэффициент $M > 0$ (направления полей совпадают); в положении *б* взаимоиндуктивность $M = 0$ (поля самоиндукции и взаимоиндукции взаимно перпендикулярны) и в положении *в* взаимоиндуктивность $M < 0$ (направления полей катушек противоположны). Достигаемое при этом максимальное изменение индуктивности

$$\Delta L = 4M.$$

Устройство, предназначенное для плавного изменения индуктивности, носит название в а р и о м е т р а.

б) Магнитно-связанные цепи при гармоническом воздействии. Трансформатор напряжения

Предположим, что к системе двух магнитно-связанных катушек подведено гармоническое напряжение (рис. 3-51, *а*).

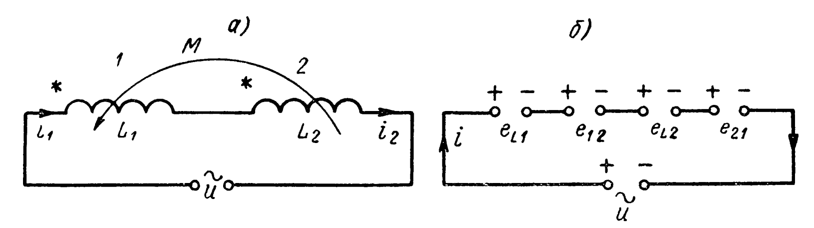


Рис. 3-51. Согласное включение магнитно-связанных цепей при гармоническом воздействии (*а*); эквивалентная схема цепи (*б*).

Если через катушку *1* проходит ток i_1, поток взаимоиндукции этого тока $\Phi_{2\,1}$ индуктирует в катушке *2* э. д. с.

$$e_{2\,1} = -n_2 \frac{d\Phi'_{2\,1}}{dt} = -\frac{d\Phi_{2\,1}}{dt}$$

или согласно (3-172)

$$e_{2\,1} = -M \frac{di_1}{dt}.$$

Аналогично поле взаимоиндукции тока i_2 индуктирует в катушке *1* э. д. с.

$$e_{1\,2} = -n_1 \frac{d\Phi'_{1\,2}}{dt} = -\frac{d\Phi_{1\,2}}{dt}$$

или

$$e_{1\,2} = -M \frac{di_2}{dt}.$$

В случае согласного включения катушек ($M > 0$) и при выбранном на рис. 3-51, *а* условно положительном направлении токов э. д. с. $e_{1\,2}$ и $e_{2\,1}$ имеют такую же полярность, как э. д. с. самоиндукции e_{L1} и e_{L2} (рис. 3-51, *б*).

Уравнение второго закона Кирхгофа для этой цепи может быть записано в виде

$$u - L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} - L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt} = 0 \qquad (3\text{-}177)$$

или, если катушки обтекаются одним и тем же током ($i_1 = i_2 = i$), то

$$(L_1 + L_2 + 2M)\frac{di}{dt} = u;$$

цепь, таким образом, эквивалентна одной индуктивности $L = L_1 + L_2 + 2M$, что совпадает с (3-176).

Э. д. с. самоиндукции e_{L1} и e_{L2} при анализе цепей обычно заменяем напряжениями $u_{L1} = -e_{L1}$ и $u_{L2} = -e_{L2}$; также и э. д. с. взаимоиндукции $e_{2\,1}$ и $e_{1\,2}$ могут быть заменены напряжениями

$$u_2 = -e_{2\,1} = M\frac{di_1}{dt} \text{ и}$$

$$u_1' = -e_{1\,2} = M\frac{di_2}{dt}.$$

Переходя от мгновенных значений величин к их комплексным амплитудам, получаем

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}_2 &= -\dot{E}_{2\,1} = j\omega M\dot{I}_1, \\ \dot{U}_1' &= -\dot{E}_{1\,2} = j\omega M\dot{I}_2. \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}178)$$

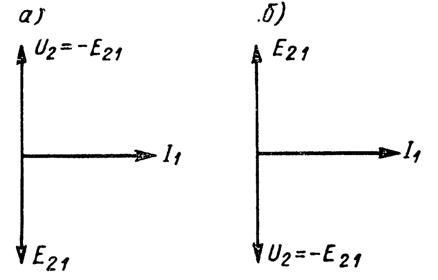


Рис. 3-52. Векторные диаграммы магнитно-связанных цепей.

Входящая сюда величина ωM, имеющая размерность сопротивления, называется реактивным сопротивлением связи

$$x_{св} = \omega M.$$

Поэтому напряжения $\dot{U}_2$ и $\dot{U}_1$ можно выразить так:

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}_2 &= jx_{св}\dot{I}_1 = Z_{св}\dot{I}_1, \\ \dot{U}_1' &= jx_{св}\dot{I}_2 = Z_{св}\dot{I}_2, \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}179)$$

где $Z_{св} = jx_{св}$ — комплексное сопротивление связи.

Векторная диаграмма рис. 3-52 иллюстрирует фазовые соотношения между током $\dot{I}_1$ и э. д. с. $\dot{E}_{2\,1}$ (напряжением $\dot{U}_2$). Сдвиг фаз между $\dot{E}_{2\,1}$ и $\dot{I}_1$ равен $\pm\pi/2$. Знак этого угла зависит от знака взаимоиндуктивности. При согласном включении, когда $M > 0$, э. д. с. $\dot{E}_{2\,1}$ о т с т а е т от тока $\dot{I}_1$ на угол $\pi/2$, а напряжение $\dot{U}_2$ опережает ток $\dot{I}_1$ (рис. 3-52, *а*). Если же $M < 0$, то, наоборот, э. д. с. $\dot{E}_{2\,1}$

опережает ток I_1, а напряжение U_2 отстает от него (рис. 3-52, *б*). Отсюда следует, что фаза э. д. с. $E_{2\,1}$ легко может быть изменена на обратную, если зажимы катушки *2* поменять местами.

Теперь представим себе, что катушки не соединены между собой электрически, а связаны только через общий магнитный поток (рис. 3-53). Устройство (четырехполюсник), состоящее из двух магнитно-связанных катушек, называется **трансформатором**. Ту катушку (обмотку) трансформатора, которая подключается к источнику питания, называют **первичной**, а другую обмотку — **вторичной**. Соответственно и напряжения на обмотках именуют первичным и вторичным.

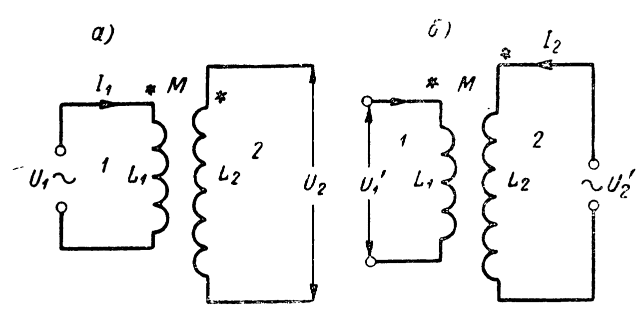


Рис. 3-53. Трансформатор.

Найдем соотношение между вторичным напряжением и напряжением источника для двух случаев: а) когда питание трансформатора происходит со стороны обмотки *1*, а выходными клеммами являются разомкнутые зажимы обмотки *2* (рис. 3-53, *а*) и б) когда генератор подключен к обмотке *2*, а вторичной является обмотка *1* (рис. 3-53, *б*).

Если обмотка *1* является первичной (рис. 3-53, *а*), а вторичная обмотка *2* разомкнута (холостой ход), то напряжение на первичной обмотке

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 = jx_1 \dot{I}_1, \quad (3\text{-}180)$$

где $x_1 = \omega L_1$, а напряжение на вторичной обмотке

$$\dot{U}_2 = j\omega M \dot{I}_1. \quad (3\text{-}181)$$

Коэффициент передачи

$$K_{2\,1} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{M}{L_1} = \frac{x_{св}}{x_1} \quad (3\text{-}182)$$

характеризует количественно степень воздействия цепи *1* на цепь *2*.

Если обмотка *2* является первичной (рис. 3-53, *б*), а вторичная обмотка *1* разомкнута, то напряжение на первичной обмотке

$$\dot{U}_2' = j\omega L_2 \dot{I}_2 = jx_2 \dot{I}_2, \quad (3\text{-}180а)$$

где $x_2 = \omega L_2$, а напряжение на вторичной обмотке

$$\dot{U}_1' = j\omega M \dot{I}_2. \quad (3\text{-}181а)$$

Коэффициент передачи

$$K_{1\,2} = \frac{\dot{U}_1'}{\dot{U}_2'} = \frac{M}{L_2} = \frac{x_{св}}{x_2} \quad (3\text{-}182а)$$

характеризует количественно степень воздействия цепи *2* на цепь *1*.

В общем случае, когда цепь вторичной обмотки замкнута, токи проходят в обеих обмотках. Для того чтобы единым коэффициентом количественно оценить влияние первичной и вторичной цепей друг на друга, вводят в рассмотрение так называемый к о э ф ф и ц и е н т с в я з и

$$k = \sqrt{K_{1\,2}K_{2\,1}}, \tag{3-183}$$

равный среднему геометрическому между коэффициентами передачи $K_{1\,2}$ и $K_{2\,1}$.

Подставив (3-182) и (3-182а) в (3-183), получим

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{x_{св}}{\sqrt{x_1 x_2}}. \tag{3-184}$$

Возвращаясь к выражениям коэффициентов передачи, можем на основании (3-172), (3-170) и (3-170а) записать их в виде:

$$K_{2\,1} = \frac{\Phi_{2\,1}}{\Phi_{1\,1}} = \frac{n_2\Phi'_{2\,1}}{n_1\Phi'_{1\,1}},$$

$$K_{1\,2} = \frac{\Phi_{1\,2}}{\Phi_{2\,2}} = \frac{n_1\Phi'_{1\,2}}{n_2\Phi'_{2\,2}},$$

и коэффициент связи

$$k = \sqrt{\frac{\Phi'_{2\,1}\Phi'_{1\,2}}{\Phi'_{1\,1}\Phi'_{2\,2}}}. \tag{3-185}$$

Так как $\Phi'_{2\,1} < \Phi'_{1\,1}$ и $\Phi'_{1\,2} < \Phi'_{2\,2}$, то всегда $k < 1$.

Вообразим такой трансформатор, у которого весь магнитный поток каждой из обмоток пронизывает другую обмотку. У такого воображаемого трансформатора отсутствует рассеяние, и

$$\Phi'_{2\,1} = \Phi'_{1\,1}, \qquad \Phi'_{1\,2} = \Phi'_{2\,2}.$$

Поэтому коэффициенты передачи

$$\left.\begin{aligned} K_{2\,1} &= \frac{U_2}{U_1} = \frac{n_2}{n_1} = m, \\ K_{1\,2} &= \frac{U'_1}{U'_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{m}. \end{aligned}\right\} \tag{3-186}$$

Отсюда следует, что при отсутствии рассеяния отношение вторичного и первичного напряжений при холостом ходе вторичной цепи равно отношению числа витков обмоток. Отношение $\frac{n_2}{n_1} = m$ называется к о э ф ф и ц и е н т о м т р а н с ф о р м а ц и и.

В реальном трансформаторе при нагрузке его вторичной обмотки на какое-либо сопротивление соотношение напряжений U_2/U_1 всегда меньше, чем коэффициент трансформации m, во-первых, потому, что в действительности поток рассеяния не равен нулю, и $\Phi'_{1\,2} < \Phi'_{1\,1}$ (также и $\Phi'_{2\,1} < \Phi'_{2\,2}$); во-вторых, обмотки трансформатора обладают активными сопротивлениями, на которых про-

исходит падение напряжения, уменьшающее выходное напряжение трансформатора.

Идеальным называют воображаемый трансформатор, удовлетворяющий таким требованиям:

1) поток рассеяния равен нулю ($\Phi'_{2\,1} = \Phi'_{1\,1}$; $\Phi'_{1\,2} = \Phi'_{2\,2}$); из (3-185) следует, что при этом коэффициент связи между обмотками $k = 1$;

2) отсутствуют потери энергии в обмотках трансформатора: $r_1 = r_2 = 0$; при этом комплексы мощности первичной и вторичной обмоток равны между собой:

$$\dot{U}_1 \hat{I}_1 = \dot{U}_2 \hat{I}_2. \tag{3-187}$$

Из последнего вытекает, что при холостом ходе трансформатора, когда $I_2 = 0$, первичный ток также должен быть равен нулю, т. е.

$$I_{1х.х} = 0.$$

Первичный ток при холостом ходе обычно называют током намагничивания.

Из (3-180) видно, что ток намагничивания равен нулю, если (при заданной частоте) $L_1 \to \infty$.

Если выполняются сформулированные выше требования, то при любом токе нагрузки, так же, как и при холостом ходе, отношение напряжений равно коэффициенту трансформации:

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = m = \frac{U_2}{U_1}, \tag{3-188}$$

а в соответствии с (3-187) соотношение токов равно обратной величине:

$$\frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_1} = \frac{1}{m} = \frac{I_2}{I_1}. \tag{3-189}$$

Вследствие отсутствия потерь в цепях идеального трансформатора мощность, расходуемая во вторичной цепи его, равна мощности, подводимой источником энергии. Иными словами, к. п. д. $\eta = 1$.

Далее, входное сопротивление идеального трансформатора

$$Z_{вх.т} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2}{m} \cdot \frac{1}{m\dot{I}_2} = \frac{Z_н}{m^2}, \tag{3-190}$$

где $Z_н = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}$ — сопротивление нагрузки вторичной обмотки.

Отсюда следует, что если между сопротивлением $Z_н$ и генератором включен идеальный трансформатор (*ИТ* — рис. 3-54) с коэффициентом трансформации m, то генератор оказывается нагруженным на сопротивление $Z_{вх.т}$, имеющее тот же характер, что и $Z_н$, но по величине измененное (трансформированное) в m^2 раз. Четырехпо-

люсник *ИТ* выполняет роль **трансформатора сопротивления**; коэффициент

$$\frac{Z_{н}}{Z_{вх.т}} = m^2 \qquad (3\text{-}191)$$

можно назвать **коэффициентом трансформации сопротивления**.

При осуществлении радиотехнических цепей часто приходится решать задачу трансформации (преобразования) сопротивлений для согласования генератора с нагрузкой и в других целях. Один из возможных методов решения этой задачи — применение трансформатора.

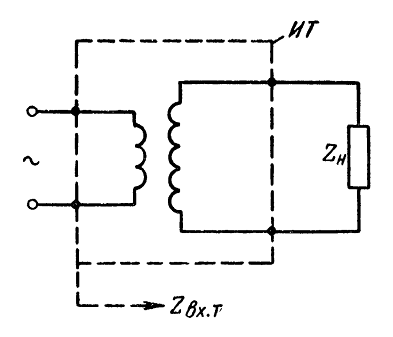


Рис. 3-54. Идеальный трансформатор.

Разумеется, физически реализовать идеальный трансформатор не представляется возможным. Для того чтобы действительный трансформатор по своим свойствам приближался к идеальному, принимается ряд мер. Обмотки трансформатора помещаются на ферромагнитном сердечнике, благодаря чему, во-первых, уменьшается поток рассеяния, и почти весь магнитный поток одной обмотки сцепляется с витками другой обмотки; во-вторых, резко увеличивается индуктивность первичной (и вторичной) обмоток, что способствует уменьшению тока намагничивания. Кроме того, принимаются все возможные меры к уменьшению потерь в обмотках трансформатора и в сердечнике. [1]

Все это приводит к тому, что в ряде случаев реальный трансформатор в хорошем приближении может рассматриваться как идеальный.

в) Эквивалентные схемы магнитно-связанных цепей

При составлении уравнений, описывающих явления в цепях с магнитно-связанными элементами, необходимо учитывать э. д. с., индуктируемые потоками взаимной индукции.

На рис. 3-55 изображена схема двух индуктивно связанных цепей: в первичной цепи включено сопротивление Z_1 и источник U, а во вторичной — сопротивление Z_2.

При составлении уравнений второго закона Кирхгофа следует учитывать, что в первичной цепи, кроме стороннего напряжения U, действует э. д. с., индуктированная вторичным током,

$$E_{12} = -j\omega M I_2,$$

[1] Подробнее характеристики ферромагнетиков и свойства элементов цепей, содержащих ферромагнитные сердечники, обсуждаются в главе десятой.

а во вторичной — э. д. с., индуктированная первичным током,

$$\dot{E}_{21} = -j\omega M\dot{I}_1.$$

Итак, получаем следующие уравнения:

$$Z_1\dot{I}_1 + j\omega L_1\dot{I}_1 = \dot{U} - j\omega M\dot{I}_2,$$
$$Z_2\dot{I}_2 + j\omega L_2\dot{I}_2 = -j\omega M\dot{I}_1$$

или

$$\left.\begin{aligned} Z_1\dot{I}_1 + j\omega L_1\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2 = \dot{U}, \\ Z_2\dot{I}_2 + j\omega L_2\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_1 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}192)$$

Совместное решение этих уравнений дает возможность найти токи $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ при заданных параметрах системы и заданном воздействии.

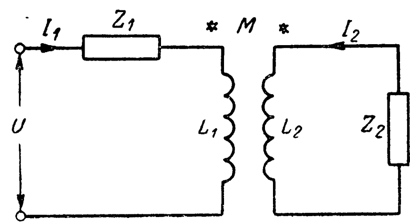


Рис. 3-55. Индуктивно связанные цепи.

Для того чтобы произвести расчет рассматриваемой схемы при помощи методов, изученных в предыдущих параграфах этой главы, желательно заменить цепь эквивалентной схемой, в которой бы отсутствовали магнитно-связанные элементы.

Это можно сделать, если к обеим частям первого из уравнений (3-192) прибавить $j\omega M\dot{I}_1$, а к обеим частям второго уравнения $j\omega M\dot{I}_2$. Тогда получим

$$\left.\begin{aligned} Z_1\dot{I}_1 + j\omega(L_1 - M)\dot{I}_1 + j\omega M(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = \dot{U}, \\ Z_2\dot{I}_2 + j\omega(L_2 - M)\dot{I}_2 + j\omega M(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}193)$$

Нетрудно видеть, что эти уравнения описывают процессы в схеме, представленной на рис. 3-56, которая и является эквивалентной схемой нашей исходной цепи (рис. 3-55).

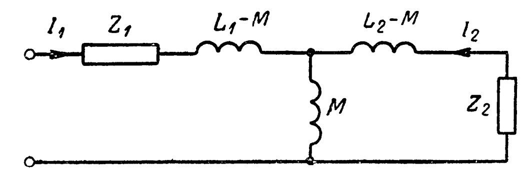


Рис. 3-56. Эквивалентная схема индуктивно связанных цепей.

Эквивалентная схема рис. 3-56 не содержит индуктивно связанных элементов. Вместо этого в нее входят сосредоточенные индуктивности, равные M, $L_1 - M$ и $L_2 - M$. Расчет такой цепи может быть произведен любым из известных методов.

Возможны и несколько иные варианты эквивалентных схем индуктивно связанных цепей.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ЦЕПИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

4-1. Введение

Одной из важнейших задач радиотехники является осуществление так называемой **частотной избирательности** (или **селективности**) радиоустройств.

Для того чтобы уяснить существо этой проблемы, представим себе, что на некоторую электрическую систему (двухполюсник или четырехполюсник) воздействует несколько источников колебаний разных частот: 1, 2, 3, ..., *n* (рис. 4-1).

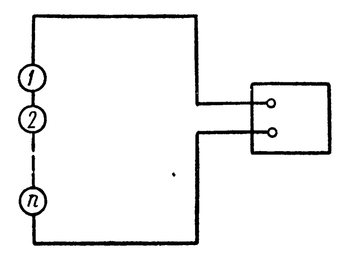


Рис. 4-1. Схема цепи, находящейся под воздействием нескольких источников.

Каждый из источников создает либо колебания одной частоты (ω_1, ω_2, ..., ω_n), либо одновременно несколько колебаний различных частот, лежащих поблизости («по бокам») от этой частоты. Сказанное поясняет рис. 4-2, *а*; на нем изображена шкала частот, на которой отрезками жирной линии обозначены области (полосы) частот $\Delta\omega_1$, $\Delta\omega_2$, ..., $\Delta\omega_n$, отведенные для работы источников. В центре каждой из полос находятся частоты ω_1, ω_2, ..., ω_n. Амплитуды колебаний всех источников будем для простоты считать одинаковыми.

Наша система должна иметь частотную характеристику вида, изображенного на рис. 4-2, *б*. По оси абсцисс отложена частота воздействия, а по оси ординат — величина отклика. Для частот, лежащих в пределах полосы $\Delta\omega_k$, отклик имеет неизменную величину, а вне этой полосы он равен нулю. Устройство пропускает только частоты, лежащие внутри полосы $\Delta\omega_k$. Если, например, полоса частот $\Delta\omega_k$ совпадает с $\Delta\omega_1$, система «избирает» из множества воздействующих на нее колебаний лишь колебания первого источ-

ника. Воздействие всех остальных источников не вызывает никаких откликов.

Должна быть предусмотрена возможность «передвигать» полосу $\Delta\omega_k$ вдоль шкалы частот. Изменив расположение этой полосы, например, так, что она окажется совпадающей с частотами, входящими в область $\Delta\omega_3$, получим систему, пропускающую колебания только третьего источника.

Итак, для решения задачи избирательности, очевидно, необходимо располагать частотно-избирательными цепями. В § 3-4, п. «в» были рассмотрены простейшие частотно-избирательные цепи, содержащие, кроме активного сопротивления, один реактивный элемент. Хотя такие цепи широко применяются в радиотехнической практике, однако надо иметь в виду, что одна из граничных частот полосы пропускания этих цепей равна либо нулю, либо бесконеч-

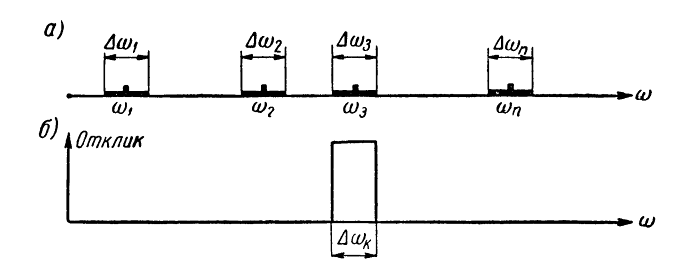


Рис. 4-2 Частоты источников воздействия (*а*) и частотная характеристика избирательной системы (*б*).

ности, в то время как осуществление избирательности в общем случае требует, чтобы обе граничные частоты были конечны. Кроме того, внутри полосы пропускания этих цепей отклик не равномерен, а величина его довольно существенно меняется, и переход в полосу подавления происходит плавно, а не резко.

Реализовать цепи, которые имели бы частотную характеристику прямоугольной формы, показанную на рис. 4-2, *б*, физически не представляется возможным. Однако удается в известной степени приблизиться к подобному виду характеристики, если использовать с этой целью так называемые колебательные системы. Применение их позволяет получать частотно-избирательные цепи, полосы пропускания которых весьма узки ($\Delta\omega_k \ll \omega$); эти полосы простыми техническими средствами могут «перемещаться» вдоль шкалы частот. В этом заключается одна из причин исключительно широкого распространения колебательных цепей в радиотехнике.

Настоящая глава посвящается изучению стационарного режима колебательных систем с сосредоточенными параметрами, называемых колебательными цепями.

4-2. Последовательный колебательный контур

а) Основные соотношения

Колебательным контуром последовательного питания, или, сокращенно, последовательным колебательным контуром, называется цепь, составленная из катушки индуктивности и конденсатора, соединенных последовательно относительно входных зажимов, к которым может быть подключен генератор или другие элементы цепи.

На рис. 4-3 изображена приближенная схема контура, в которую входят сосредоточенные элементы: индуктивность L, емкость C и активное сопротивление r, включенные последовательно по отношению к входным зажимам a-a. Представленный на этой схеме генератор гармонических колебаний $Г$ может быть заменен одной из известных эквивалентных схем: с генератором э. д. с. или с генератором тока.

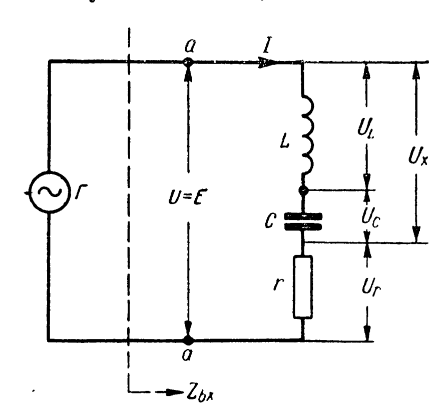


Рис. 4-3. Последовательный колебательный контур.

Будем полагать, что амплитуда напряжения на зажимах генератора остается неизменной, не зависящей от тока, проходящего в цепи. Это равносильно тому, что внутреннее сопротивление генератора равно нулю ($R_i = 0$) и напряжение на зажимах равно его э. д. с.

Для нахождения тока в цепи составляем уравнение второго закона Кирхгофа

$$L\frac{di}{dt}+ri+\frac{1}{C}i\,dt=e, \qquad (4\text{-}1)$$

где e — мгновенное значение э. д. с. генератора.

Продифференцировав обе части уравнения (4-1) по времени, получим

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{r}{L}\cdot\frac{di}{dt}+\frac{1}{LC}i=\frac{de}{dt}. \qquad (4\text{-}2)$$

Процессы в цепи описываются неоднородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Так как мы имеем дело с гармоническими колебаниями, для решения уравнения может быть использован символический метод. С этой целью запишем уравнение (4-1) для текущих комплексов

тока и э. д. с., имея в виду, что дифференцирование по времени заменяется умножением мгновенного комплекса на $j\omega$, а интегрирование — делением его на $j\omega$. В результате получим

$$j\omega L I e^{j\omega t} + r I e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} I e^{j\omega t} = E e^{j\omega t},$$

откуда следует, что комплексные амплитуды тока I и э. д. с. E будут связаны уравнением

$$rI + j\omega L I - j\frac{1}{\omega C} I = E. \qquad (4\text{-}3)$$

Это уравнение, разумеется, могло быть и сразу написано на основании второго закона Кирхгофа для комплексных амплитуд.

Из (4-3) вытекает, что

$$I = \frac{E}{r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{E}{Z_{вх}}. \qquad (4\text{-}4)$$

Здесь $Z_{вх} = r_{вх} + jx_{вх}$ — входное комплексное сопротивление контура;

$r_{вх} = r$ — активная составляющая входного сопротивления;

$x_{вх} = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ — реактивная составляющая входного сопротивления.

В зависимости от соотношения величин индуктивного сопротивления $x_L = \omega L$ и емкостного сопротивления $x_C = \frac{1}{\omega C}$ могут иметь место три случая:

1) $x_L > x_C$; тогда $x_{вх} > 0$, т. е. реактивная составляющая входного сопротивления имеет индуктивный характер;

2) $x_L < x_C$; реактивная составляющая входного сопротивления $x_{вх} < 0$, т. е. она имеет емкостный характер;

3) $x_L = x_C$; реактивная составляющая входного сопротивления равна нулю ($x_{вх} = 0$).

Применительно к этим трем случаям рассмотрим векторные диаграммы напряжений и тока в цепи, имея в виду, что напряжение на индуктивности $U_L = Ix_L$ опережает по фазе ток на угол $\pi/2$, напряжение на емкости $U_C = Ix_C$ отстает от тока на угол $\pi/2$, а напряжение на активном сопротивлении $U_r = Ir$ совпадает по фазе с током.

Комплексная амплитуда э. д. с. питающего источника равна сумме комплексных амплитуд этих трех напряжений:

$$E = U_L + U_C + U_r.$$

Так как напряжения U_L и U_C противоположны по фазе, амплитуда напряжения на зажимах последовательного соединения L и C

$$U_x = |U_L - U_C| \quad \text{и} \quad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{U}_x + \boldsymbol{U}_r.$$

1. Если $x_L > x_C$, векторная диаграмма имеет вид рис. 4-4, *а*. Так как $U_L > U_C$, напряжение U_x опережает ток на угол $\pi/2$. Ток отстает от приложенной э. д. с. на угол

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x_L - x_C}{r}. \qquad (4\text{-}5)$$

2. Если $x_L < x_C$, векторная диаграмма приобретает вид рис. 4-4, *б*. Напряжение U_x отстает по фазе от тока на угол $\pi/2$.

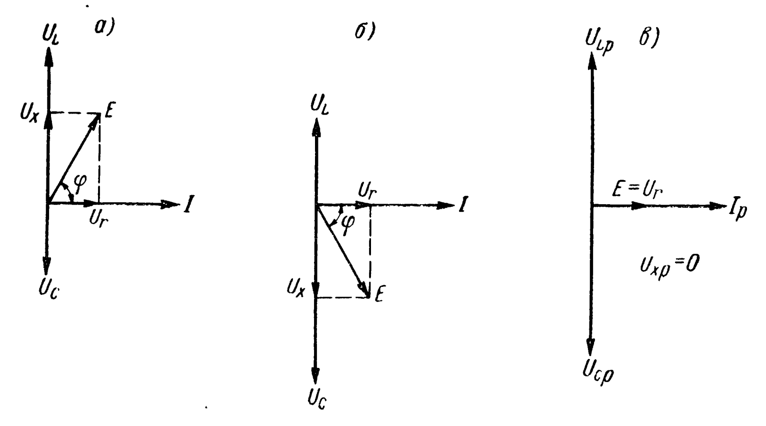


Рис. 4-4. Векторные диаграммы последовательного колебательного контура.

Ток опережает э. д. с. источника; угол сдвига фаз между ними выражается также формулой (4-5); он в этом случае отрицателен.

3. Особый интерес представляет случай, когда $x_L = x_C$. При этом $x_{вх} = 0$ (рис. 4-4, *в*).

Режим цепи, при котором реактивная составляющая входного сопротивления несмотря на наличие реактивных элементов равна нулю, называется резонансом. При резонансе входное сопротивление цепи чисто активно:

$$Z_{вх.р} = r.$$

Амплитуды напряжений на реактивных элементах равны между собой:

$$U_{Lр} = U_{Cр}. \qquad (4\text{-}6)$$

Поэтому напряжение $U_{xр} = U_{Lр} - U_{Cр} = 0$. Сдвиг фаз между э. д. с. и током в цепи $\varphi = 0$. Приложенная э. д. с. уравновешивается только падением напряжения на активном сопротивлении ($E = I_р r$).

В контуре с заданными параметрами L и C резонанс наступает при определенной частоте ω_0, величина которой определяется из равенства

$$x_{вх} = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0,$$

откуда

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (4\text{-}7)$$

Частота, при которой реактивная составляющая входного сопротивления равна нулю, называется *резонансной частотой цепи*.

Резонансная частота контура зависит от параметров реактивных элементов L и C и возрастает с их уменьшением.

Угловой частоте ω_0 соответствует частота

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (4\text{-}8)$$

и длина волны

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0} = 2\pi c\sqrt{LC}, \quad (4\text{-}9)$$

где c — скорость света. Если ее выражать в метрах в секунду ($c = 3 \cdot 10^8$ *м/сек*), то λ_0 получим в метрах.

Когда $\omega = \omega_0$, то говорят, что контур *настроен* на частоту источника. Если $\omega \neq \omega_0$, то контур *расстроен*.

В настроенном контуре индуктивное и емкостное сопротивления реактивных элементов равны между собой:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{U_к}{I_р}, \quad (4\text{-}10)$$

где $U_к$ — амплитуда напряжения на каждом из реактивных элементов контура (при резонансе), которое будем называть *напряжением на контуре*;

$I_р$ — амплитуда тока в настроенном контуре.

Подставив в (4-10) вместо ω_0 ее значение из (4-7), получим

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Величина

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{U_к}{I_р} \quad (4\text{-}11)$$

называется характеристическим сопротивлением (сокращенно характеристикой) колебательного контура. Характеристическое сопротивление представляет собой отношение амплитуд напряжения на каждом из реактивных элементов контура и тока при резонансе. Величина его определяется только параметрами контура L и C. В колебательных контурах, используемых в радиотехнических цепях, ρ имеет обычно порядок нескольких сот ом ($\rho \approx 100 \div 500$ *ом*).

Осуществить резонанс в колебательном контуре можно двумя основными способами: а) изменяя частоту источника при неизменных параметрах контура так, чтобы она оказалась равной резонансной частоте контура; б) изменяя при неизменной частоте источника параметры контура L и C (или один из них) таким образом, чтобы его резонансная частота стала равной частоте воздействующих колебаний.

Из (4-4) видно, что ток в последовательном колебательном контуре при настройке его в резонанс достигает особенно большого значения

$$I_{р} = \frac{E}{r}. \qquad (4\text{-}12)$$

Расстройка контура влечет за собой уменьшение амплитуды тока до величины

$$I = \frac{E}{\sqrt{r^2 + x_{вх}^2}}. \qquad (4\text{-}13)$$

В электротехнических системах резонанс и связанное с ним резкое возрастание тока, а значит, и напряжений на реактивных элементах цепи, может оказаться опасным, поэтому иногда применяются специальные меры для его предотвращения. В радиотехнике явление резонанса в колебательных системах находит многообразные практические применения: для осуществления частотной избирательности цепи, в устройствах для генерирования колебаний высокой частоты и т. д.

б) Энергетические соотношения в колебательном контуре. Добротность контура

Рассмотрение энергетических соотношений в контуре начнем с режима резонанса, когда $\omega = \omega_0$; $U_{Lр} = U_{Cр} = U_{к}$.

Так как ток в цепи опережает напряжение на емкости на угол $\pi/2$, то, полагая начальную фазу тока равной нулю, получим для мгновенных значений напряжения и тока:

$$\left.\begin{aligned} i_{р} &= I_{р} \cos \omega_0 t, \\ u_{Cр} &= U_{Cр} \sin \omega_0 t = U_{к} \sin \omega_0 t. \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}14)$$

На рис. 4-5, *а* нанесены временные диаграммы тока $i_{р}$ и напряжения $u_{Cр}$.

Мгновенное значение энергии, заключенной в магнитном поле цепи,

$$w_L = \frac{Li_{\text{р}}^2}{2}, \tag{4-15}$$

а мгновенное значение энергии электрического поля

$$w_C = \frac{Cu_{C\text{р}}^2}{2}. \tag{4-16}$$

Кривые зависимости w_L и w_C от времени показаны на рис. 4-5, *б*. Максимальные величины запасаемой в магнитном и электрическом полях энергии составляют

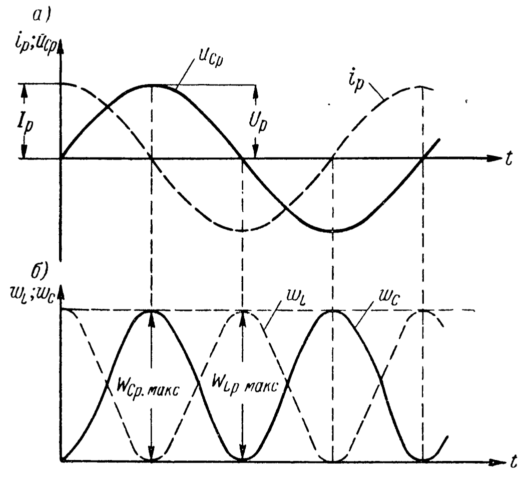


Рис. 4-5. Временны́е диаграммы.

$$\left.\begin{aligned} W_{L\text{р.макс}} &= \frac{LI_{\text{р}}^2}{2}, \\ W_{C\text{р.макс}} &= \frac{CU_{C\text{р}}^2}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{4-17}$$

Поделив эти выражения друг на друга и имея в виду, что

$$\frac{U_{C\text{р}}}{I_{\text{р}}} = \rho^2 = \frac{L}{C},$$

получим

$$W_{L\text{р.макс}} = W_{C\text{р.макс}} = W,$$

т. е. максимально запасаемые в электрическом и магнитном полях количества энергии равны между собой.

Если просуммируем мгновенные значения энергии магнитного [формула (4-15)] и электрического [см. (4-16)] полей, то с учетом (4-17) найдем

$$w_{L\text{р}} + w_{C\text{р}} = \frac{LI_{\text{р}}^2}{2}\cos^2\omega_0 t + \frac{CU_{C\text{р}}^2}{2}\sin^2\omega_0 t,$$

но так как $\frac{LI_{\text{р}}^2}{2} = \frac{CU_{C\text{р}}^2}{2}$, то

$$w_{L\text{р}} + w_{C\text{р}} = W;$$

в любой момент времени суммарная энергия, запасенная в электрическом и магнитном полях, равна постоянной величине W.

Эти расчеты показывают, что в режиме резонанса запас энергии электромагнитного поля, связанного с цепью, остается неизменным. Энергия непрерывно перераспределяется между электрическим и

магнитным полями. В моменты $t = 0, \frac{T}{2}, \ldots$ вся энергия сосредоточена в магнитном поле; в моменты $t = \frac{T}{4}, \frac{3T}{4}, \ldots$ — в электрическом поле, а в промежуточные моменты — в обоих полях.

Для того чтобы уяснить, какую роль в энергетических процессах играет питающий цепь генератор, следует прежде всего вспомнить, что реактивная составляющая входного сопротивления $x_{вх} = x_L - x_C$.

Подставляя сюда вместо x_L и x_C их выражения через величины энергии магнитного и электрического полей (3-71) и (3-90), получим

$$x_{вх} = \frac{2\omega\,(W_{L\text{макс}} - W_{C\text{макс}})}{I^2}. \qquad (4\text{-}18)$$

При резонансе $W_{L\text{р.макс}} = W_{C\text{р.макс}}$, поэтому $x_{\text{вх. р}} = 0$. С точки зрения энергетической это означает, что в установившемся режиме генератор не принимает участия в процессе запасания энергии в электрическом и магнитном полях. Энергия, первоначально запасенная в системе при подключении ее к генератору, в последующем перераспределяется («совершает колебательное движение») между полями катушки индуктивности и конденсатора без участия в этом процессе генератора. Именно поэтому рассматриваемые цепи называются колебательными.

Наряду с периодическим обменом энергии между электрическим и магнитным полями в цепи происходят необратимые потери в активном сопротивлении r.

Так как входное сопротивление при резонансе чисто активно и составляет

$$r_{вх} = r = \frac{2P}{I_\text{р}^2},$$

задача генератора в энергетическом смысле заключается только в том, что он поставляет активную мощность, расходуемую в сопротивлении r.

Если бы мы вообразили, что цепь не имеет активного сопротивления ($r = 0$), то в ней не было бы никаких потерь энергии и генератор в стационарном режиме оказался бы ненужным. Его зажимы можно было бы замкнуть накоротко, так как в идеальном (без потерь) контуре $r_{вх} = 0$ и $E = I_\text{р} r_{вх} = 0$.

Несмотря на это, колебания все же происходили бы в контуре за счет энергии W, первоначально запасенной в цепи.

В расстроенном контуре $W_{L\text{макс}} \neq W_{C\text{макс}}$ и реактивная составляющая входного сопротивления не равна нулю:

$$x_{вх} = \frac{2\omega W_x}{I^2},$$

где $W_x = W_{L\text{макс}} - W_{C\text{макс}}$.

Теперь генератор уже участвует в энергетическом обмене. Наряду с периодическим перераспределением энергии между индук-

тивностью и емкостью, часть энергии, равная W_x, то запасается в цепи (либо в магнитном поле, если $W_x > 0$, либо в электрическом поле, если $W_x < 0$), то возвращается генератору.

Энергетические соотношения в контуре характеризуются величиной его добротности Q, для которой сохраняется определение (3-125) с той разницей, что добротность контура рассчитывается для резонансной частоты ($\omega = \omega_0$) и в качестве запасенной энергии имеется в виду полный запас энергии W.

Таким образом, добротность колебательной цепи

$$Q = 2\pi \frac{W}{W_{rT}} = \omega_0 \frac{W}{P}, \qquad (4\text{-}19)$$

где $W_{rT} = PT_0 = \frac{P}{f_0}$ — энергия, расходуемая за период T_0.

Если запасаемая энергия значительно превосходит энергию, расходуемую в цепи за один период, т. е. если добротность велика,

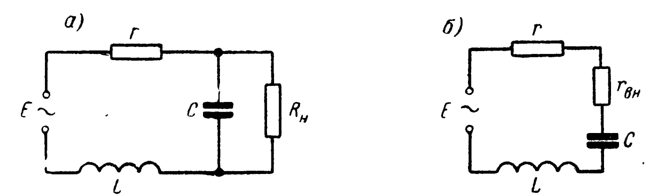


Рис. 4-6. Нагруженный колебательный контур.

то резонансные явления проявляются особенно ярко: при заданной э. д. с. E амплитуды тока $I_р$ и напряжения на контуре $U_к$ становятся особенно большими.

Для оценки возможных значений добротности контура подставим в (4-19) $W_{макс} = \frac{1}{2} I^2 L$ и $P = \frac{1}{2} I^2 r$ и, учитывая (4-7), получим

$$Q = \frac{\rho}{r} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}}. \qquad (4\text{-}20)$$

Так как характеристическое сопротивление измеряется величиной в среднем порядка нескольких сот ом, а активное сопротивление — порядка немногих ом, средние значения добротности колебательных контуров, используемых в радиотехнике, $Q \approx 100 \div 300$.

Осуществление добротности $Q > 400$ в контурах с сосредоточенными параметрами вызывает очень большие трудности.

Иногда вместо добротности пользуются обратной величиной

$$d = \frac{1}{Q}, \qquad (4\text{-}20a)$$

называемой з а т у х а н и е м. Затухание радиотехнических колебательных контуров имеет величину порядка 0,003—0,01.

В радиотехнических устройствах колебательный контур иногда нагружается на активное сопротивление, включенное параллельно одному из реактивных элементов (например, емкости — рис. 4-6, *а*). Сопротивление нагрузки $R_н$, естественно, увеличивает потери в системе и, стало быть, влечет за собой уменьшение добротности. Для того чтобы определить добротность нагруженного контура $Q_н$, заменим схему контура эквивалентной схемой (рис. 4-6, *б*), в которой сопротивление, подключенное параллельно емкости C, заменено последовательным «вносимым» сопротивлением $r_{вн}$. Расчет производим для частоты, равной резонансной частоте.

Обычно $R_н \gg \frac{1}{\omega_0 C}$ или, иначе говоря, $R_н \gg \rho$. Поэтому для пересчета используем формулу (3-159), полагая в ней $r_{пар} = R_н$; $x_{пар} = \frac{1}{\omega_0 C} = \rho$.

Из (3-159) получим

$$\left.\begin{aligned} r_{вн} &= \frac{\rho^2}{R_н}, \\ x_{посл} &\approx x_{пар} \approx \rho. \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}21)$$

Таким образом, эквивалентная схема содержит те же реактивные элементы, что исходная схема, но большее активное сопротивление $r + r_{вн}$; так что добротность нагруженного контура

$$Q_н = \frac{\rho}{r + r_{вн}} = \frac{\rho}{r + \frac{\rho^2}{R_н}} \qquad (4\text{-}22)$$

и затухание

$$d_н = \frac{r}{\rho} + \frac{\rho}{R_н} = d + d_{вн}, \qquad (4\text{-}23)$$

где $d_{вн} = \frac{\rho}{R_н}$ — вносимое затухание.

Иногда вносимое сопротивление оказывается многим больше, чем «собственное» сопротивление контура: $r_{вн} \gg r$. Тогда практически все потери в контуре учитываются параллельно включенным сопротивлением $R_н$ и добротность оказывается

$$Q_н \approx \frac{\rho}{r_{вн}} = \frac{R_н}{\rho}, \qquad (4\text{-}24)$$

а затухание

$$d_н \approx \frac{\rho}{R_н} = d_{вн}. \qquad (4\text{-}25)$$

Вообще чем меньше сопротивление нагрузки $R_н$, тем меньше добротность нагруженного контура.

в) Частотные характеристики последовательного колебательного контура

Изучение частотных характеристик колебательных контуров представляет большой принципиальный и практический интерес. Мы начнем его с рассмотрения частотных характеристик входного сопротивления последовательного контура.

Активную составляющую входного сопротивления $r_{вх} = r$ можно приближенно считать не зависящей от частоты.

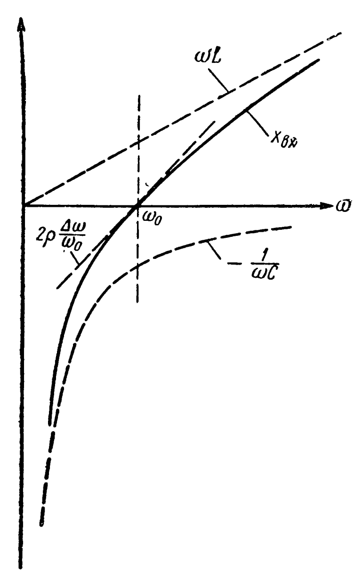


Рис. 4-7. Частотные характеристики реактивных сопротивлений.

Реактивная составляющая входного сопротивления

$$x_{вх} = \omega L - \frac{1}{\omega C} = \omega_0 L\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 \omega C}\right].$$

Так как $\omega_0 L = \rho$ и $\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$, то

$$x_{вх} = \rho\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]. \qquad (4\text{-}26)$$

На рис. 4-7 приведен график зависимости $x_{вх}(\omega)$; он получается в результате сложения ординат кривых $x_L = \omega L$ и $-x_C = -\frac{1}{\omega C}$.

Комплексное входное сопротивление

$$Z_{вх} = r + jx_{вх} = r(1 + j\xi), \qquad (4\text{-}27)$$

где

$$\xi = \frac{x_{вх}}{r} = \operatorname{tg}\varphi. \qquad (4\text{-}28)$$

Подставив сюда значение $x_{вх}$ из (4-26) и учитывая, что $\frac{\rho}{r} = Q$, получим

$$\xi = Q\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]. \qquad (4\text{-}29)$$

Величину ξ называют *обобщенной расстройкой*.

При расчете радиотехнических контуров нас главным образом интересует их поведение в области частот, мало отличающихся от резонансной частоты ω_0, когда частота генератора

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega,$$

где $\Delta\omega$ — *абсолютная расстройка* — величина весьма малая по сравнению с ω_0. Расстройка может быть как положительной (когда $\omega > \omega_0$), так и отрицательной (когда $\omega < \omega_0$).

Для частот, близких к резонансной частоте контура, вместо (4-26) получим приближенное выражение

$$x_{\text{вх}} \approx \rho \frac{(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)}{\omega_0^2} \approx 2\rho \frac{\Delta\omega}{\omega_0}. \tag{4-30}$$

Здесь $\Delta\omega/\omega_0$ — относительная расстройка.

На рис. 4-7 нанесена пунктиром прямая, построенная по формуле (4-30). Как видно, при частотах, примыкающих к $\omega = \omega_0$, она практически совпадает с точной кривой.

Использовав (4-30), найдем, что для малых расстроек

$$\xi \approx 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \tag{4-31}$$

и комплексное входное сопротивление

$$Z_{\text{вх}} \approx r\left(1 + j2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right). \tag{4-32}$$

Из (4-27) и (4-32) следует, что модуль

$$z_{\text{вх}} = r\sqrt{1 + \xi^2} \tag{4-33}$$

и фазовый угол

$$\varphi = \operatorname{arctg} \xi. \tag{4-34}$$

В области малых расстроек

$$z_{\text{вх}} \approx r\sqrt{1 + \left(2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}, \tag{4-35}$$

$$\varphi \approx \operatorname{arctg}\left(2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \approx 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}. \tag{4-36}$$

Полученные формулы дают возможность рассчитать и построить частотные характеристики, показанные (для некоторого значения добротности Q) на рис. 4-8. По оси абсцисс вместо частоты отложена пропорциональная ей величина относительной расстройки $\Delta\omega/\omega_0$. Пунктиром нанесены кривые, построенные по приближенным формулам (4-35) и (4-36).

При резонансе $z_{\text{вх}}$ равно активному (небольшому) сопротивлению r (рис. 4-8, *а*). При отклонении от резонанса в ту и другую сторону входное сопротивление возрастает, приобретая индуктивную слагающую, когда $\Delta\omega > 0$ (при $\omega > \omega_0$), и емкостную слагающую, когда $\Delta\omega < 0$ (при $\omega < \omega_0$).

Фазовая характеристика изображена на рис. 4-8, *б*. В области малых расстроек она близка к прямой линии [см. (4-36)]. Наклон ее определяется величиной добротности контура: чем выше добротность, тем большую крутизну имеет фазовая характеристика. При больших расстройках фазовый угол стремится или к $+\pi/2$ (если $\Delta\omega > 0$), или к $-\pi/2$ (если $\Delta\omega < 0$).

От частотной характеристики входного сопротивления нетрудно перейти к характеристике тока в цепи.

Амплитуда тока

$$I = \frac{E}{z_{вх}} = \frac{E}{r\sqrt{1+\xi^2}}. \qquad (4\text{-}37)$$

Поделив это выражение на значение тока при резонансе $I_р = \frac{E}{r}$, получим нормированную величину тока

$$n\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{I}{I_р} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}. \qquad (4\text{-}38)$$

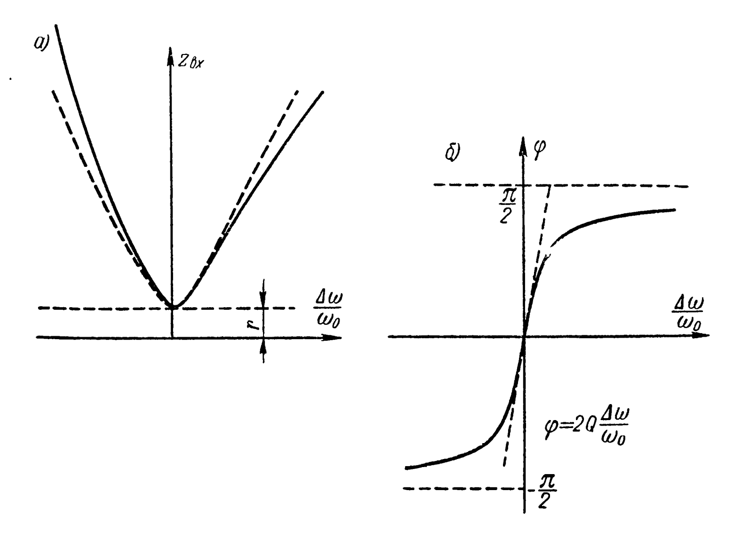
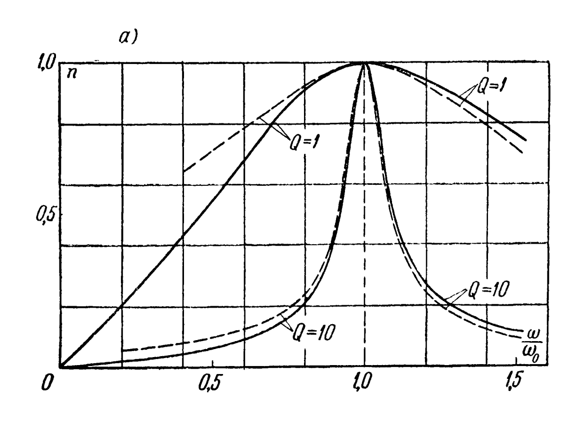


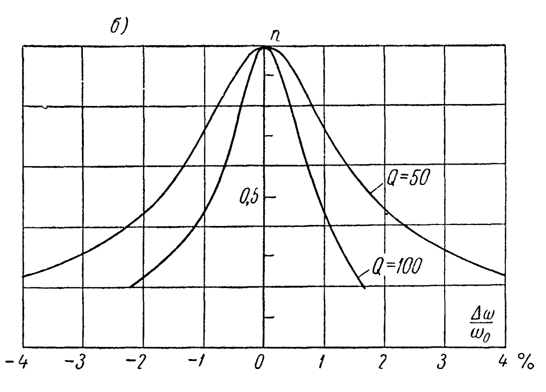
Рис. 4-8. Частотная характеристика входного сопротивления (*а*) и фазово-частотная характеристика (*б*).

Это выражение представляет в относительных единицах закон изменения амплитуды тока в контуре в зависимости от частоты. Для области малых расстроек

$$n\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{1+\left(2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}}. \qquad (4\text{-}39)$$

Кривые зависимости величины n от относительной расстройки для разных значений Q при изменении частоты в широких пределах приведены на рис. 4-9, *а*. Пунктиром нанесены кривые, построенные по приближенной формуле (4-39). Как видно, хорошее совпадение кривых получается для малых относительных расстроек, когда $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \leqslant 10\%$





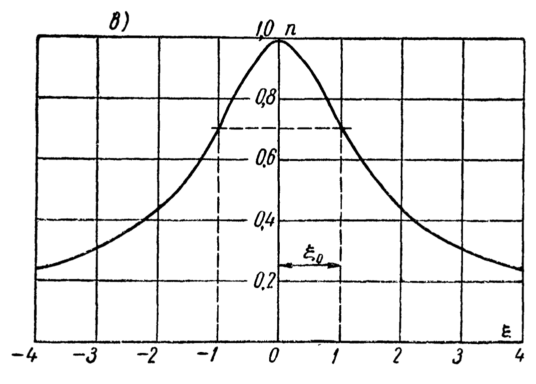


Рис. 4-9. Частотные характеристики нормированного тока.

На рис. 4-9, *б* представлены кривые для области малых расстроек и при относительно больших значениях добротности, также построенные по приближенной формуле, которая в этих условиях является вполне применимой.

Если по оси ординат откладывать обобщенную расстройку ξ, получим обобщенную характеристику, объединяющую в себе все возможные случаи контуров с любой величиной Q (рис. 4-9, *в*).

Кривые зависимости n от ω (или от $\Delta\omega/\omega_0$) при данном Q контура будем называть **предельными резонансными характеристиками**. Они могли бы быть реализованы только в том случае, если бы, как это предполагалось, амплитуда напряжения, питающего последовательный контур, была **постоянна**, т. е. если бы внутреннее сопротивление генератора равнялось нулю, чего в действительности быть не может. Поэтому мы и называем эти характеристики предельными.

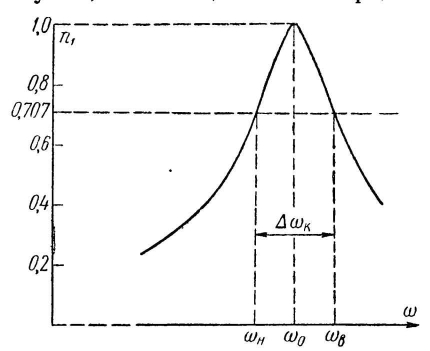


Рис. 4-10. К расчету полосы пропускания.

По характеру кривых резонанса можно судить, насколько контур избирателен: чем острее резонансная характеристика, тем избирательнее контур. Формулы (4-38), (4-39) и рис. 4-9 показывают, что острота кривой резонанса определяется только добротностью контура: чем больше Q, тем острее резонансная характеристика и тем, стало быть, выше избирательность.

Частотные характеристики колебательного контура по виду своему довольно сильно отличаются от той идеальной (прямоугольной) формы характеристики, которая была представлена на рис. 4-2. Частоты, «пропускаемые» контуром, приходится поэтому определять условно — так же, как это было сделано применительно к активно-реактивным цепям (§ 3-4, п. «г»): полосой пропускания контура $\Delta\omega_к$ называют такую область частот, на границах которой амплитуда тока падает до уровня, равного $1/\sqrt{2}$ от ее максимального значения, т. е. на границах полосы пропускания $n = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$ (рис. 4-9).

Приняв в формуле (4-38) $n = 0,707$, получим два значения обобщенной расстройки, соответствующих границам полосы пропускания (рис. 4-9, *в*), $\xi_0 = \pm 1$.

Полоса пропускания включает в себя частоты от $\omega_н$ до $\omega_в$ (рис. 4-10). Для нахождения граничных частот обратимся к формуле (4-29). Верхней граничной частоте $\omega_в$ соответствует $\xi_0 = +1$, а нижней

$\omega_н$ обобщенная расстройка $\xi_0 = -1$. Подставляя эти значения в (4-29), получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{\omega_в}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_в} = \frac{1}{Q} = d, \\ \frac{\omega_н}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_н} = -\frac{1}{Q} = -d. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда получаем два квадратных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \omega_в^2 - d\omega_0\omega_в - \omega_0^2 = 0, \\ \omega_н^2 + d\omega_0\omega_н - \omega_0^2 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Решения этих уравнений (отрицательные решения отбрасываем как не имеющие физического смысла) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\omega_в}{\omega_0} = \frac{d}{2} + \sqrt{1 + \frac{d^2}{4}}, \\ \frac{\omega_н}{\omega_0} = -\frac{d}{2} + \sqrt{1 + \frac{d^2}{4}}. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$\frac{\omega_в - \omega_н}{\omega_0} = \frac{\Delta\omega_к}{\omega_0} = d = \frac{1}{Q}, \qquad (4\text{-}40)$$

т. е. относительная полоса пропускания равна затуханию контура. Чем больше добротность контура, тем меньше полоса пропускания.

Следует иметь в виду, что если к контуру подключено сопротивление нагрузки $R_н$ (см. рис. 4-6), то во всех полученных зависимостях вместо Q следует писать добротность нагруженного контура $Q_н$. В частности, полоса пропускания нагруженного контура

$$\frac{\Delta\omega_{к.н}}{\omega_0} = d_н = \frac{1}{Q_н} \qquad (4\text{-}41)$$

увеличивается и, значит, избирательные свойства контура ухудшаются.

г) Колебательный контур как четырехполюсник

Два основных варианта использования последовательного контура в схеме четырехполюсника представлены на рис. 4-11. Входным напряжением в обеих схемах является э. д. с. источника ($U_1 = E$); выходное напряжение снимается или с емкости (рис. 4-11, *а*), или с индуктивности (рис. 4-11,*б*).

Рассмотрим сначала случай резонанса ($\omega = \omega_0$), когда напряжения $u_{Lр}$ и $u_{Cр}$ равны по величине и противоположны по фазе.

Коэффициент передачи напряжения (передаточная функция) в схеме рис. 4-11, *а*

$$K_{Cр}(j\omega_0) = \frac{U_{Cр}}{E} = \frac{-jx_{Cр}}{Z_{вх.р}} = -j\frac{x_{Cр}}{r}.$$

Так как $x_{Cр} = \rho$,

$$K_{Cр}(j\omega_0) = -j\frac{\rho}{r} = -jQ. \qquad (4\text{-}42)$$

Аналогично для коэффициента передачи при снятии напряжения с индуктивности (рис. 4-11, *б*) получим

$$K_{Lр}(j\omega_0) = j\frac{\rho}{r} = jQ. \qquad (4\text{-}43)$$

Итак, при резонансе модули коэффициентов передачи в обеих схемах одинаковы:

$$K_{Cр}(\omega_0) = K_{Lр}(\omega_0) = Q. \qquad (4\text{-}44)$$

Настроенный последовательный контур обладает свойством усиливать подведенное напряжение, причем коэффициент усиления

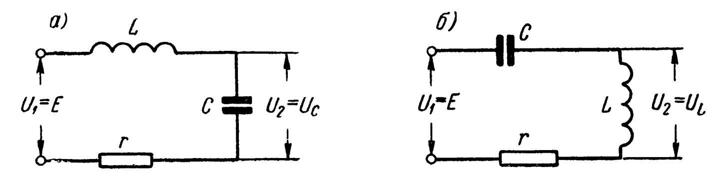


Рис. 4-11. Колебательный контур как четырехполюсник.

напряжения равен добротности контура Q. Поэтому резонанс в последовательном колебательном контуре иногда называют **резонансом напряжений**.

В случае расстроенного контура для схемы рис. 4-11, *а* имеем

$$K_C(j\omega) = \frac{-jx_C}{Z_{вх}} = \frac{-j}{\omega C z_{вх}} e^{-j\varphi},$$

где φ — угол сдвига фаз между напряжением и током.

Принимая во внимание, что $\frac{r}{z_{вх}} = n(\omega)$ и умножив и разделив выражение на ω_0, получим

$$K_C(j\omega) = n(\omega) Q \frac{\omega_0}{\omega} e^{-j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}. \qquad (4\text{-}45)$$

Аналогичные расчеты дают для коэффициента передачи схемы рис. 4-11, *б*:

$$K_L(j\omega) = \frac{jx_L}{Z_{вх}} = n(\omega) Q \frac{\omega}{\omega_0} e^{j\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}. \qquad (4\text{-}46)$$

Соответственно модули коэффициентов передачи будут

$$K_C(\omega) = n(\omega) Q \frac{\omega_0}{\omega}; \qquad (4\text{-}47)$$

$$K_L(\omega) = n(\omega) Q \frac{\omega}{\omega_0}. \qquad (4\text{-}48)$$

Отсюда видно, что частотные зависимости модуля коэффициентов передачи можно получить умножением уравнения предельной

резонансной характеристики $n(\omega)$ на добротность Q и на отношение частот ω_0/ω или ω/ω_0.

На рис. 4-12 изображена частотная характеристика $K_C\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$, построенная для добротности $Q = 10$. При $\omega = 0$ величина $K_C = 1$, так как на постоянном напряжении ток равен нулю и все напряжение источника питания оказывается приложенным к емкости. Максимум K_C получается при частоте, несколько меньшей, чем резонансная, и величина его несколько превосходит Q. Когда $\omega \to \infty$, коэффициент $K_C \to 0$, так как $\frac{1}{\omega C} \to 0$. На рисунке нанесена также (пунктиром) предельная резонансная кривая $Qn\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$. Как видно, в области малых расстроек и при значительных величинах Q эти кривые почти точно совпадают.

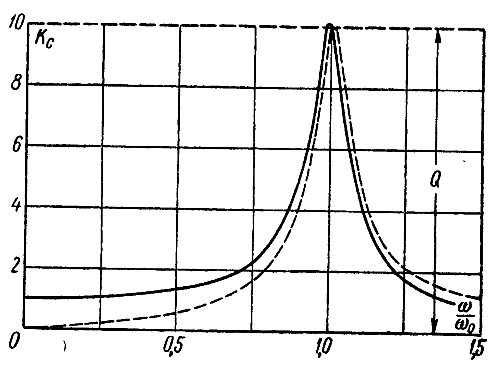


Рис. 4-12. Частотные характеристики коэффициента передачи K_C.

Частотная характеристика $K_L\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ приведена на рис. 4-13. При $\omega = 0$ коэффициент передачи K_L также равен нулю (так как $\omega L = 0$). Своего максимального значения K_L достигает на частоте, несколько превосходящей резонансную; величина максимума K_L оказывается немногим больше, чем Q. Если $\omega \to \infty$, величина $K_L \to 1$, так как на очень высоких частотах величинами r и $1/\omega C$ можно пренебречь по сравнению с ωL и практически все подводимое напряжение приложено к индуктивности L. Пунктиром на рисунке показана предельная резонансная кривая $Qn\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$, которая при частотах, близких к резонансной, почти точно совпадает с частотной характеристикой $K_L\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$.

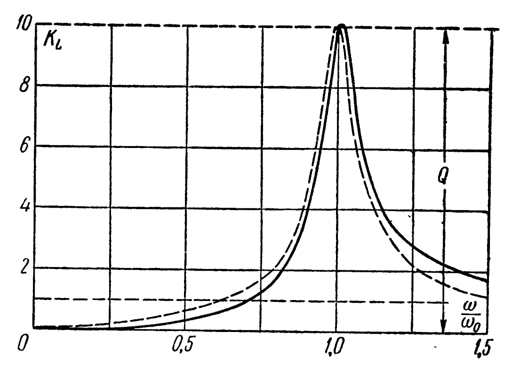


Рис. 4-13. Частотные характеристики коэффициента передачи K_L.

Итак, в области малых расстроек, когда $\frac{\omega_0}{\omega} \approx 1$, можно приближенно считать, что

$$K_L \approx K_C \approx Qn = \frac{Q}{\sqrt{1+\xi^2}}, \qquad (4\text{-}49)$$

т. е. частотные характеристики относительных напряжений на индуктивности U_L/E и на емкости U_C/E имеют такой же вид, как предельная резонансная кривая, отличаясь от нее лишь постоянным множителем Q.

Из формул (4-45), (4-46), а также (3-137) вытекает, что фазовый угол коэффициента K_C

$$\varphi_{KC} = \varphi + \frac{\pi}{2},$$

а коэффициента K_L

$$\varphi_{KL} = \varphi - \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда следует, что фазовые характеристики $\varphi_K(\omega)$ коэффициентов передачи отличаются от характеристики $\varphi(\omega)$ (см. рис. 4-8, *б*) только сдвигом на $\pi/2$ вверх или вниз.

д) Влияние параметров генератора на избирательные свойства последовательного колебательного контура

Предельные резонансные характеристики тока в контуре и напряжений на его реактивных элементах получены нами в допущении, что амплитуда напряжения, подведенного к контуру, остается неизменной. В действительности при питании контура реальным, обычно применяемым в радиотехнике генератором напряжение на его зажимах зависит от тока в контуре, уменьшаясь с его увеличением.

Влияние свойств генератора на избирательность колебательного контура рассмотрим сначала качественно. Пусть при настройке контура в резонанс напряжение генератора $U'_р$ и, стало быть, амплитуда тока в контуре

$$I_р = \frac{U'_р}{r}. \qquad (4\text{-}50)$$

При отходе от резонанса в ту или иную сторону ток (при условии высокой добротности контура) должен резко уменьшиться. Однако уменьшение тока влечет за собой одновременное увеличение питающего напряжения до величины $U' > U'_р$, так что амплитуда тока в расстроенном контуре будет

$$I = \frac{U'}{z_{вх}}. \qquad (4\text{-}51)$$

Ясно, что при отклонении от резонанса ток будет спадать менее резко, чем это было бы при условии постоянства питающего напряжения.

Поделив (4-51) на (4-50), получим, что нормированный ток с учетом изменения напряжения генератора

$$n_э(\omega) = \frac{U'}{U'_р} \cdot \frac{r}{z_{вх}} = \frac{U'}{U'_р} n(\omega). \qquad (4\text{-}52)$$

Так как $U'/U'_р$ возрастает по мере отклонения ω от ω_0, действительная (с учетом свойств генератора) характеристика нормированного тока получается менее острой, чем предельная резонансная кривая (рис. 4-14). Полоса пропускания увеличивается, т. е. частотная избирательность системы ухудшается. В соответствии

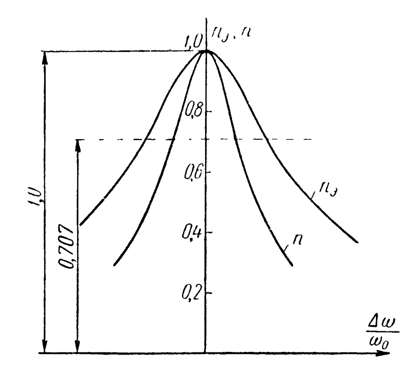


Рис. 4-14. Влияние параметров генератора на вид частотной характеристики последовательного контура.

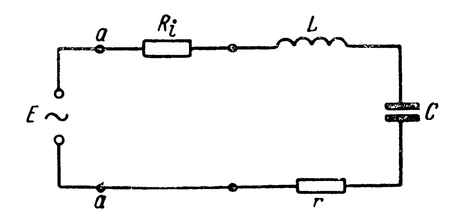


Рис. 4-15. Схема цепи с учетом внутреннего сопротивления генератора.

с (4-40) относительная полоса пропускания равна затуханию $d = \frac{1}{Q}$. Поэтому увеличение полосы пропускания можно количественно оценивать как уменьшение добротности системы до некоторой эквивалентной величины $Q_э$, меньшей, чем добротность Q самого контура.

Для того чтобы определить, от каких факторов зависит величина эквивалентной добротности $Q_э$, заменим действительный генератор эквивалентной схемой с генератором э. д. с. (рис. 4-15). Внутреннее сопротивление генератора в общем случае есть величина комплексная: $Z_i = R_i + jX_i$. Однако в дальнейшем примем во внимание только активную составляющую R_i, считая, что параметры реактивных элементов L и C остались неизменными. Этого можно добиться некоторым изменением индуктивности контура (если $X_i > 0$) или его емкости (если $X_i < 0$).

Эквивалентную схему рис. 4-15 можно рассматривать как колебательный контур, имеющий активное сопротивление $r_э = r + R_i$

и питаемый в точках *а-а* неизменным напряжением E. Добротность этого эквивалентного контура

$$Q_э = \frac{\rho}{r + R_i} = \frac{Q}{1 + \frac{R_i}{r}}; \qquad (4\text{-}53)$$

$Q_э$ при заданной добротности контура Q зависит от соотношения внутреннего сопротивления генератора и сопротивления контура r.

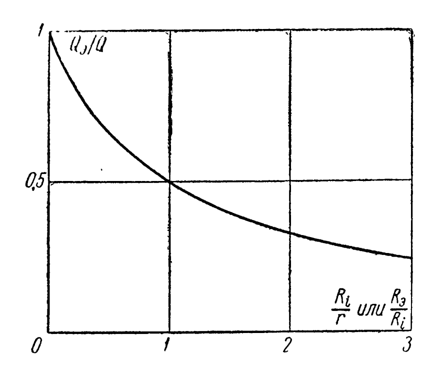


Рис. 4-16. Зависимость $Q_э/Q$ от R_i/r (в случае последовательного контура) или от $R_э/R_i$ (в случае параллельного контура).

Уравнение резонансной характеристики

$$n_э\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi_э^2}} \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{1+\left(2Q_э\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}}. \qquad (4\text{-}54)$$

Только при $R_i \to 0$ эта характеристика приближается к предельной резонансной кривой.

Итак, чем больше внутреннее сопротивление R_i, тем меньше эквивалентная добротность цепи и шире полоса пропускания (рис. 4-16). Стало быть, с точки зрения избирательности последовательный колебательный контур целесообразно применять в том случае, когда внутреннее сопротивление генератора достаточно мало ($R_i \ll r$).

4-3. Параллельный колебательный контур

а) Основные соотношения

Колебательным контуром параллельного питания или, сокращенно, параллельным колебательным контуром называется цепь, составленная из катушки индуктивности и конденсатора, подключенных параллельно входным зажимам, к которым может быть присоединен генератор или другие элементы цепи.

Заменяя катушку эквивалентной схемой, составленной из последовательно соединенных элементов L и r_L, а конденсатор последовательно включенными C и r_C, получим схему параллельного колебательного контура, изображенную на рис. 4-17.

Пусть к входным зажимам контура подключено гармоническое напряжение с амплитудой U.

Согласно первому закону Кирхгофа ток в неразветвленной части

$$i = i_L + i_C.$$

Переходя к комплексным амплитудам токов, получим

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_L + \boldsymbol{I}_C. \quad (4\text{-}55)$$

Здесь

$$\boldsymbol{I}_L = \frac{U}{r_L + j\omega L}; \quad (4\text{-}56)$$

$$\boldsymbol{I}_C = \frac{U}{r_C - j\frac{1}{\omega C}}. \quad (4\text{-}57)$$

В зависимости от соотношения индуктивного сопротивления катушки $x_L = \omega L$ и емкостного сопротивления конденсатора $x_C = \frac{1}{\omega C}$ можно наблюдать три характерных случая, применительно к которым рассмотрим векторные диаграммы, иллюстрирующие процессы в цепи. При этом будем полагать, что контур составлен из деталей с высокой добротностью, т. е.

$$r_L \ll \omega L; \qquad r_C \ll \frac{1}{\omega C}.$$

1. Сопротивление индуктивности превышает емкостное сопротивление: $\omega L > \frac{1}{\omega C}$. Это имеет место, когда частота воздействия $\omega > \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

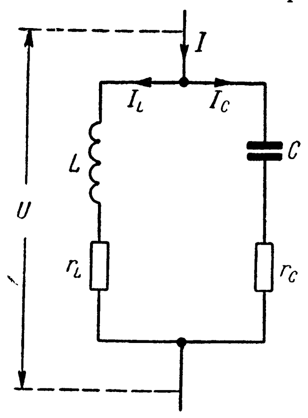


Рис. 4-17. Параллельный колебательный контур.

Приняв за исходный вектор U, получим векторную диаграмму рис. 4-18, *а*.

Амплитуда тока индуктивной ветви

$$I_L = \frac{U}{\sqrt{r_L^2 + \omega^2 L^2}} \approx \frac{U}{\omega L}. \quad (4\text{-}58)$$

Этот ток отстает от напряжения на угол

$$\varphi_L = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L}{r}\right).$$

Так как по условию $r_L \ll \omega L$, угол φ_L близок к $\pi/2$.

Амплитуда тока емкостной ветви

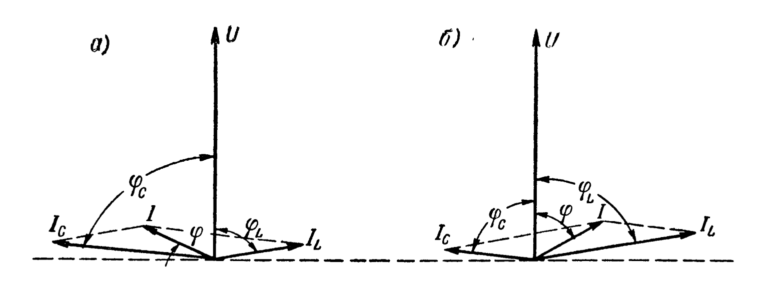
$$I_C = \frac{U}{\sqrt{r_C^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \approx \omega C U. \quad (4\text{-}59)$$

Ток I_C, будучи по величине большим, чем I_L, опережает напряжение на угол

$$|\varphi_C| = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\omega Cr}\right),$$

также мало отличающийся от $\pi/2$.

В результате ток неразветвленной части I опережает напряжение на угол φ, т. е. реактивная составляющая входного сопротивления имеет емкостный характер ($x_{вх} < 0$).



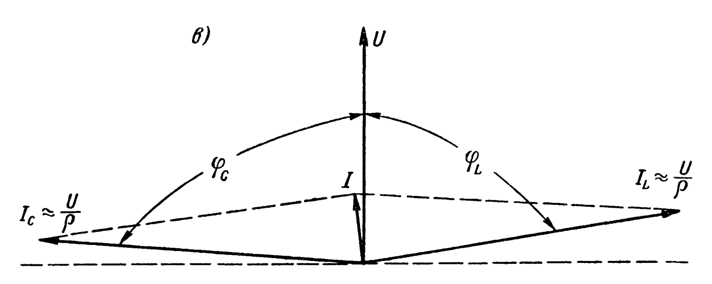


Рис. 4-18. Векторные диаграммы параллельного колебательного контура.

2. Если $x_L < x_C$, т. е. $\omega < \frac{1}{\sqrt{LC}}$, то векторная диаграмма приобретает вид рис. 4-18, *б*. Теперь ток индуктивной ветви имеет бо́льшую амплитуду, чем ток через емкость ($I_L > I_C$). В неразветвленной части цепи протекает ток, отстающий от приложенного напряжения на некоторый угол φ; реакция цепи имеет индуктивный характер ($x_{вх} > 0$).

3. В случае, когда $x_L = x_C$ или, иначе, когда $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$, токи индуктивной ветви $I_{Lр} \approx \frac{U}{\omega_0 L}$ и емкостной ветви $I_{Cр} \approx \omega_0 CU$ весьма мало отличаются друг от друга. Вместе с тем сдвиг фаз между ними, как это видно из векторной диаграммы рис. 4-18, *в*, близок к 180°. Поэтому результирующий ток I оказывается по величине

весьма малым, а по фазе — почти точно совпадающим с приложенным напряжением. (Диаграмма построена в предположении, что $r_L > r_C$). Входное сопротивление при $\omega = \omega_0$, хотя и комплексно, но приближенно его можно считать чисто активным.

Расчет показывает, что входное сопротивление будет активным при частоте, называемой частотой точного резонанса,

$$\omega_0' = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{r_L^2}{\rho^2}}{1 - \frac{r_C^2}{\rho^2}}}. \qquad (4\text{-}60)$$

Отсюда, а также из векторной диаграммы, следует, что если $r_L = r_C$, то $\omega_0' = \omega_0$. Надо иметь в виду, что в радиотехнических

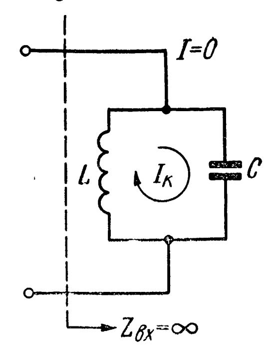


Рис. 4-19. Схема идеального параллельного колебательного контура.

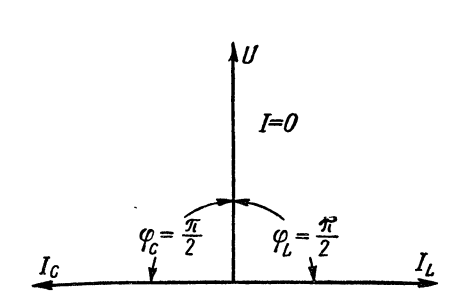


Рис. 4-20. Векторная диаграмма идеального параллельного колебательного контура.

контурах $r_L \ll \rho$ и $r_C \ll \rho$. Поэтому с большой степенью точности даже при неравных r_L и r_C — можно считать

$$\omega_0' = \omega_0. \qquad (4\text{-}61)$$

В режиме резонанса

$$I_{Lp} \approx I_{Cp} \approx \frac{U}{\rho} = I_к. \qquad (4\text{-}62)$$

Ток $I_к$ обычно называют током контура.

Интересно рассмотреть еще предельный случай идеального контура (рис. 14-19), свободного от потерь ($r_L = 0$ и $r_C = 0$) и настроенного в резонанс.

В этом случае токи I_{Lp} и I_{Cp} точно равны между собой:

$$I_{Lp} = I_{Cp} = I_к = \frac{U}{\rho}$$

и противоположны по фазе (рис. 4-20).

Поэтому ток неразветвленной части цепи равен нулю. Контур не потребляет тока, т. е. $Z_{вх} = \infty$, и генератор может быть отключен.

Тем не менее в контуре «вечно» циркулирует ток с амплитудой $I_к$. Энергия при этом не расходуется, а только периодически перераспределяется между электрическим и магнитным полями. Этот запас энергии должен быть сообщен контуру при его первоначальном подключении к генератору, после чего генератор оказывается ненужным.

б) Частотные характеристики входного сопротивления параллельного колебательного контура

Комплексное входное сопротивление контура, схема которого приведена на рис. 4-17,

$$Z_{вх.пар} = \frac{(r_L + j\omega L)\left(r_C - j\frac{1}{\omega C}\right)}{r_L + r_C + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}. \qquad (4\text{-}63)$$

Полагая по-прежнему, что $r_L \ll \omega L$ и $r_C \ll \frac{1}{\omega C}$, получим

$$Z_{вх.пар} \approx \frac{\frac{L}{C}}{r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}; \qquad (4\text{-}64)$$

здесь $r = r_L + r_C$.

Знаменатель выражения (4-64) представляет собой не что иное, как входное сопротивление последовательного контура, составленного из тех же деталей, что рассматриваемый контур параллельного питания [см. (4-4)], т. е.

$$r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = Z_{вх.\,посл}.$$

Имея в виду, что $\frac{L}{C} = \rho^2$, получим

$$Z_{вх.\,пар} = \frac{\rho^2}{Z_{вх.\,посл}} \qquad (4\text{-}65)$$

или

$$Z_{вх.\,посл}\, Z_{вх.\,пар} = \rho^2.$$

Два двухполюсника, обладающие тем свойством, что произведение их входных сопротивлений есть постоянная положительная величина, не зависящая от частоты, называются **взаимно обратными двухполюсниками**. Из формулы (4-65) следует, что последовательный и параллельный контуры, составленные из одних и тех же деталей и рассматриваемые со стороны своих входных зажимов, взаимно обратны.

Согласно (4-27) входное сопротивление последовательного контура

$$Z_{вх.\ посл} = r(1 + j\xi),$$

где ξ — обобщенная расстройка.

Подставляя это выражение в (4-65), получим, что входное сопротивление параллельного контура (в дальнейшем индекс «пар» опускаем),

$$Z_{вх} = \frac{\rho^2}{r(1 + j\xi)}. \quad (4\text{-}66)$$

При частоте воздействия, совпадающей с частотой ω_0, когда $\xi = 0$, входное сопротивление может считаться активным, что соответствует режиму резонанса:

$$Z_{вх.\ р} \approx R_э = \frac{\rho^2}{r}.$$

Итак, входное сопротивление на резонансной частоте $\omega = \omega_0$ можно при условии малых потерь (высокой добротности) с большой степенью точности считать чисто активным:

$$R_э = \frac{\rho^2}{r} = Q\rho = \frac{1}{\omega_0^2 C^2 r} = \frac{\omega_0^2 L^2}{r}. \quad (4\text{-}67)$$

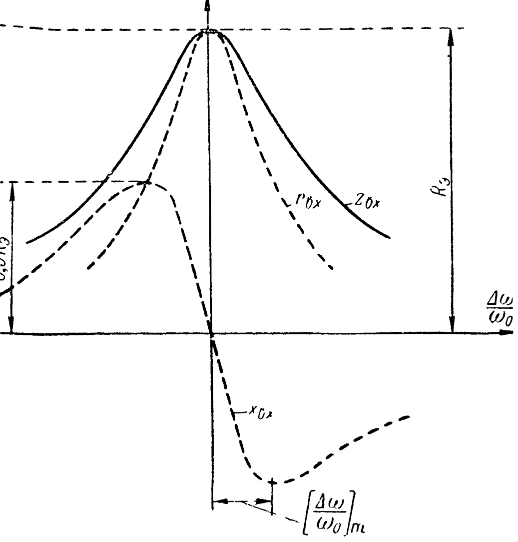


Рис. 4-21. Частотные характеристики входного сопротивления и его составляющих.

Так как добротность радиотехнических контуров $Q \approx 200 \div 400$, а характеристическое сопротивление $\rho \approx 100 \div 500$ *ом*, входное резонансное сопротивление может иметь величину порядка нескольких десятков или сотен тысяч ом.

Возвращаясь к выражению (4-66), представим его в виде

$$Z_{вх} = \frac{R_э}{1 + \xi^2} - j\frac{\xi R_э}{1 + \xi^2}. \quad (4\text{-}68)$$

Контур, таким образом, может быть заменен эквивалентной схемой, состоящей из последовательного соединения активного сопротивления

$$r_{вх} = \frac{R_э}{1 + \xi^2} \quad (4\text{-}69)$$

и реактивного сопротивления

$$x_{вх} = -\frac{\xi R_э}{1 + \xi^2}. \quad (4\text{-}70)$$

Модуль входного сопротивления

$$z_{вх} = \frac{R_э}{\sqrt{1+\xi^2}} \approx \frac{R_э}{\sqrt{1+\left(2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}}. \qquad (4\text{-}71)$$

Нормированное входное сопротивление

$$\frac{z_{вх}}{R_э} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1+\left(2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}} = n\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right). \qquad (4\text{-}72)$$

Функция $\frac{z_{вх}}{R_э}(\omega)$ есть не что иное, как уравнение **предельной резонансной кривой**.

На рис. 4-21 показаны частотные зависимости входного сопротивления параллельного контура.

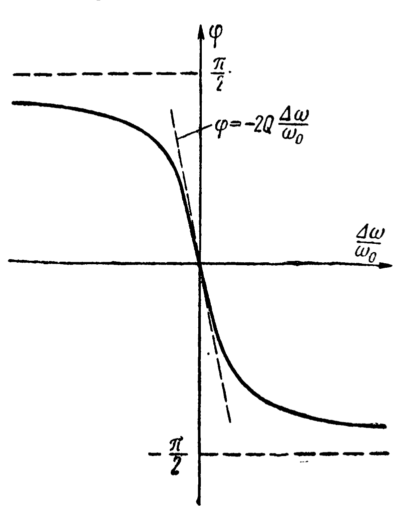


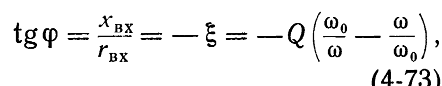
Рис. 4-22. Фазово-частотная характеристика параллельного контура.

Настроенный контур ($\Delta\omega = 0$) представляет чисто активное сопротивление, равное $R_э = Q\rho$. При расстройке контура сопротивление его резко падает по величине и становится комплексным. Реактивная составляющая сопротивления имеет два экстремума, получающихся при расстройках,

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)_m = \pm\frac{d}{2} = \pm\frac{1}{2Q},$$

а максимальная величина реактивного сопротивления равна $^1/_2 R_э$.

Для определения фазового угла φ входного сопротивления имеем



$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x_{вх}}{r_{вх}} = -\xi = -Q\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right), \qquad (4\text{-}73)$$

т. е. фазовая характеристика параллельного контура подобна характеристике последовательного контура; только, как и следовало ожидать, знак углов φ теперь изменился на обратный (рис. 4-22).

в) Частотные характеристики напряжения и токов параллельного колебательного контура

Наибольший интерес представляют частотные характеристики напряжения на контуре U и токов в его ветвях I_L и I_C.

Будем считать, что амплитуда тока, питающего контур, неизменна — не зависит от величины напряжения на его зажимах: $I = \mathrm{const}$.

Это равносильно питанию контура генератором неограниченной мощности с бесконечно большим внутренним сопротивлением, т. е. **генератором тока** ($I = I_г$).

Комплексная амплитуда напряжения на контуре

$$U = I_г Z_{вх} = \frac{I_г R_э}{1 + j\xi}.$$

Если $I_г = const$, напряжение на контуре зависит от частоты совершенно так же, как входное сопротивление.

Отношение амплитуды напряжения на расстроенном контуре $U = I_г z_{вх}$ к напряжению в случае настройки контура в резонанс $U_р = I_г R_э$ будет

$$\frac{U}{U_р} = \frac{z_{вх}}{R_э} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} = n. \quad (4\text{-}74)$$

Таким образом, частотная характеристика напряжения U при условии питания контура неизменным током представляет собой **предельную резонансную кривую** $n(\xi)$.

Для тока в индуктивной ветви (см. рис. 4-17) имеем

$$I_L \approx \frac{U}{jx_L}.$$

Так как ток неразветвленной части схемы $I_г = \frac{U}{Z_{вх}}$, отношение

$$\frac{I_L}{I_г} \approx \frac{Z_{вх}}{jx_L}.$$

Модуль этого отношения

$$\frac{I_L}{I_г} \approx \frac{z_{вх}}{\omega L}.$$

Умножив и разделив это выражение на $\omega_0 R_э$ и имея в виду, что $\frac{R_э}{\omega_0 L} = Q$ и $\frac{z_{вх}}{R_э} = n(\omega)$, найдем

$$\frac{I_L}{I_г} \approx Qn(\omega)\frac{\omega_0}{\omega}. \quad (4\text{-}75)$$

Это соотношение совпадает с выведенной ранее формулой (4-47) для отношения $\frac{U_C}{E} = K_C(\omega)$ в последовательном колебательном контуре (см. рис. 4-12).

Аналогично для тока емкостной ветви получим

$$\frac{I_C}{I_г} \approx -\frac{Z_{вх}}{jx_C}$$

и модуль этого отношения

$$\frac{I_C}{I_г} \approx Qn(\omega)\frac{\omega}{\omega_0}. \quad (4\text{-}76)$$

Это выражение совпадает с формулой (4-48) для отношения $\frac{U_L}{E} = K_L(\omega)$ в последовательном контуре (см. рис. 4-13).

Из (4-75) и (4-76) следует, что в области малых расстроек, когда $\frac{\omega_0}{\omega} \approx 1$, частотные характеристики токов в контуре почти точно совпадают с предельной резонансной кривой, отличаясь от нее только множителем Q.

При резонансе $\left(n = 1;\ \frac{\omega_0}{\omega} = 1\right)$

$$\frac{I_{Lр}}{I_г} = \frac{I_{Cр}}{I_г} = \frac{I_к}{I_г} = Q, \tag{4-77}$$

т. е. ток контура превосходит ток неразветвленной части цепи в Q раз. Поэтому явление резонанса в параллельном контуре иногда называют **резонансом токов**.

г) Влияние внутреннего сопротивления генератора на избирательные свойства параллельного колебательного контура

Частотные характеристики напряжения и токов контура имеют вид предельной резонансной кривой $n(\omega)$ только в том случае, если амплитуда тока, питающего контур, неизменна.

В действительных условиях, когда контур питается реальным генератором, ток I неизбежно меняется с изменением напряжения на контуре (сопротивления нагрузки), и это может существенно сказаться на виде частотных характеристик.

Пусть в режиме резонанса ток, отдаваемый генератором, равен $I'_р$ и, значит, амплитуда напряжения на контуре

$$U_р = I'_р R_э. \tag{4-78}$$

При отклонении от резонанса в ту или иную сторону напряжение должно резко уменьшиться, так как уменьшается $z_{вх}$. Однако с уменьшением $z_{вх}$ ток увеличивается до величины $I' > I'_р$, так что амплитуда напряжения на расстроенном контуре будет

$$U = I' z_{вх}. \tag{4-79}$$

Поделив (4-79) на (4-78), получим, что отношение напряжений, т. е. нормированное напряжение с учетом изменения тока питания,

$$n_э(\omega) = \frac{I'}{I'_р} \cdot \frac{z_{вх}}{R_э} = \frac{I'}{I'_р}\, n(\omega). \tag{4-80}$$

Так как отношение $I'/I'_р$ возрастает по мере отклонения ω от ω_0, действительная (с учетом влияния генератора) характеристика нормированного напряжения получается менее острой, чем предельная резонансная кривая. Полоса пропускания увеличивается, что равносильно уменьшению добротности системы до некоторой величины $Q_э < Q$.

Для расчета эквивалентной добротности $Q_э$ генератор удобно представить в виде эквивалентной схемы с генератором тока (рис. 4-23). Здесь контур заменен параллельным соединением идеального настроенного разветвления L, C (входное сопротивление которого равно бесконечности) и проводимости $G_э = \frac{1}{R_э}$. Внутреннее сопротивление генератора полагаем активным.

Цепь рис. 4-23 можно рассматривать как некоторый контур, шунтированный активной проводимостью $g_к = G_i + G_э$ и питаемый в точках a-a неизменным током $I_г$. Тем самым задача сведена к случаю, рассмотренному в § 4-3, п. «в».

Добротность эквивалентного контура [см. (4-24)]

$$Q_э = \frac{1}{(G_i + G_э)\rho} = \frac{1}{\rho\left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_э}\right)} = \frac{Q}{1 + \frac{R_э}{R_i}}. \qquad (4\text{-}81)$$

Эквивалентная добротность зависит от «собственной добротности» $Q = \frac{R_э}{\rho}$ и соотношения сопротивления нагрузки $R_э$ и внутрен-

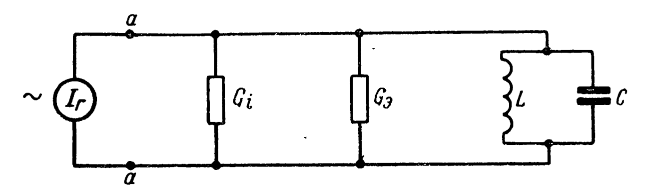


Рис. 4-23. Эквивалентная схема цепи с генератором тока.

него сопротивления генератора R_i. С уменьшением внутреннего сопротивления эквивалентная добротность уменьшается (см. рис. 4-16).

Имея в виду, что $R_э = \frac{\rho^2}{r}$ (4-81), можно записать так:

$$Q_э = \frac{\rho}{r + \frac{\rho^2}{R_i}}, \qquad (4\text{-}82)$$

т. е. влияние генератора на добротность системы заключается в том, что он «вносит» в контур сопротивление ρ^2/R_i, которое складывается с «собственным» сопротивлением контура r.

Уравнение резонансной характеристики с учетом влияния внутреннего сопротивления генератора имеет тот же вид, что (4-54). Эта характеристика приближается к предельной резонансной кривой лишь при $R_i \to \infty$ (рис. 4-24).

Если же $R_i \to 0$, напряжение на контуре от частоты вообще не зависит, оставаясь равным э. д. с. E, т. е. $n_э = 1$.

Итак, в отличие от последовательного контура, применение параллельного колебательного контура целесообразно, с точки

зрения избирательности только в том случае, когда внутреннее сопротивление генератора достаточно велико ($R_i \gg R_э$).

При этом, однако, надо иметь в виду, что с увеличением внутреннего сопротивления генератора сама величина напряжения на контуре $U_р$ падает, так как

$$U_р = I_р R_э = \frac{ER_э}{R_i + R_э}.$$

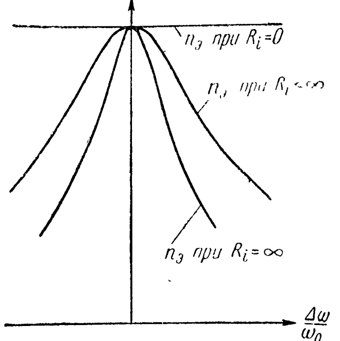


Рис. 4-24. К анализу влияния параметров генератора на вид частотной характеристики параллельного контура.

Следует отметить, что введенное выше понятие эквивалентной добротности (как в случае параллельного, так и последовательного контуров), строго говоря, имеет смысл только для определения полосы пропускания системы. Энергетические расчеты, основанные на использовании $Q_э$, могут оказаться неверными. Действительно, величина $Q_э$ определяется исходя или из схемы с генератором э. д. с., или из схемы с генератором тока. Между тем, как показано в § 2-4, использование этих эквивалентных схем для анализа баланса мощностей генератора и цепи может в некоторых случаях привести к ошибочным результатам.

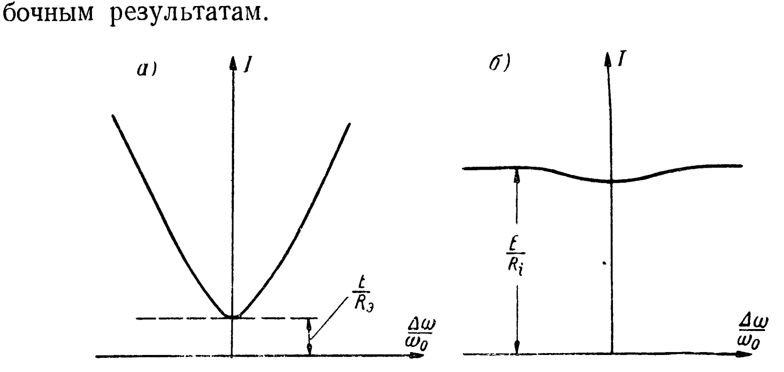


Рис. 4-25. Частотные характеристики тока неразветвленной части цепи.

В заключение рассмотрим частотную характеристику тока I неразветвленной части схемы.

Используя схему с генератором э. д. с., получим

$$I = \frac{E}{R_i + Z_{вх}}.$$

В том предельном случае, когда $R_i \to 0$, амплитуда тока

$$I \approx \frac{E}{z_{вх}} = Ey_{вх},$$

и в зависимости от частоты ток меняется так же, как входная проводимость контура (рис. 4-25, *а*). При резонансе он достигает минимального значения

$$\frac{E}{z_{\text{вх. р}}} = \frac{E}{R_э}.$$

Если же внутреннее сопротивление генератора значительно превышает входное сопротивление ($R_i \gg z_{\text{вх}}$), то

$$I \approx \frac{E}{R_i},$$

т. е. амплитуда питающего тока остается почти неизменной (рис. 4-25, *б*).

Из всего сказанного следует, что о настройке параллельного контура в резонанс можно судить либо по максимуму напряжения на контуре (тока контура), либо по минимуму тока в неразветвленной части цепи.

д) Сложные схемы параллельных колебательных контуров

Схема параллельного колебательного контура может быть представлена в обобщенном виде (рис. 4-26, *а*).

Для резонансной частоты должно соблюдаться условие

$$x_{1р} + x_{2р} = 0. \qquad (4\text{-}83)$$

В рассмотренной ранее схеме (см. рис. 4-17), называемой контуром I вида, в одну из ветвей (x_1) входит индуктивность,

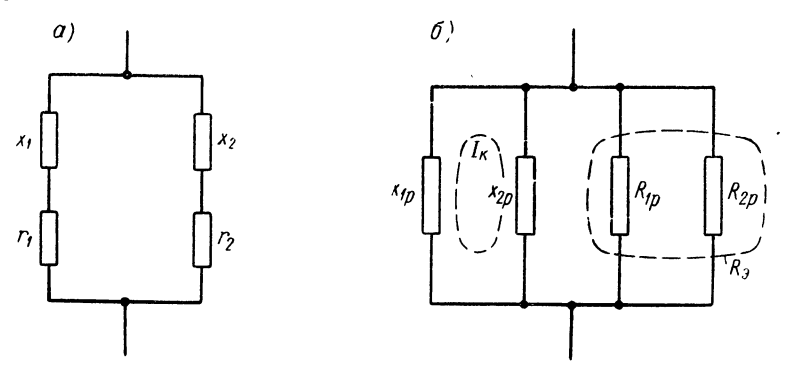


Рис. 4-26. Обобщенные схемы параллельного контура.

а в другую (x_2) — емкость. Вообще сопротивления x_1 и x_2 могут представлять собой те или иные сочетания индуктивностей и емкостей. Они, однако, должны быть составлены так, чтобы можно было осуществить условие резонанса (4-83).

На рис. 4-27, *а* приведен вариант схемы, в котором одна ветвь содержит только индуктивность L_1, а другая — индуктивность L_2 и емкость C. Такую схему иногда называют контуром II вида. В так называемом контуре III вида (рис. 4-27, *б*) в одной ветви включена только емкость C_1, а в другой — емкость C_2 и индуктивность L.

Произведем переход от схемы рис. 4-26, *а* к схеме рис. 4-26, *б*, где последовательные сопротивления r_1 и r_2 пересчитаны в параллельно включенные сопротивления R_1 и R_2.

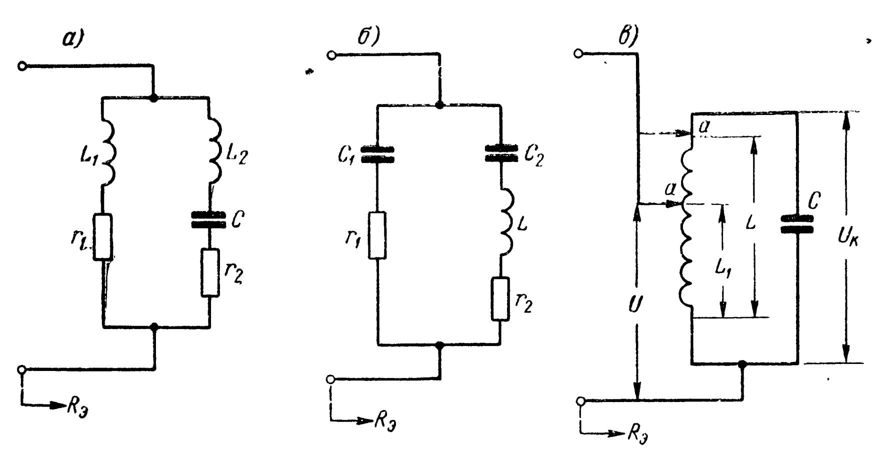


Рис. 4-27. Варианты схем сложных колебательных контуров.

Полагая, что в контуре осуществлен резонанс, и имея в виду, что $r_1 \ll x_{1р}$, а $r_2 \ll x_{2р}$, получим

$$R_{1р} = \frac{x_{1р}^2}{r_1}, \quad R_{2р} = \frac{x_{2р}^2}{r_2}.$$

Эквивалентное сопротивление

$$R_э = \frac{R_{1р} R_{2р}}{R_{1р} + R_{2р}} = \frac{x_{1р}^2}{r} = \frac{x_{2р}^2}{r},$$

где $r = r_1 + r_2$.

Так как при резонансе токи, протекающие в ветвях $x_{1р}$ и $x_{2р}$, равны по амплитуде и противоположны по фазе, они образуют замкнутый ток контура

$$I_к = \frac{U}{x_{1р}} = \frac{U}{x_{2р}}, \tag{4-84}$$

не ответвляющийся во внешнюю цепь.

Отсюда следует, что входное сопротивление при резонансе

$$Z_{вх.\,р} = R_э = \frac{x_{1р}^2}{r} = \frac{x_{2р}^2}{r}. \tag{4-85}$$

В частном случае контура II вида (рис. 4-27, *а*) получим

$$R_э = \frac{\omega_0^2 L_1^2}{r}. \tag{4-86}$$

Здесь резонансная частота ω_0 находится из (4-83), т. е.

$$\omega_0 L_1 + \omega_0 L_2 - \frac{1}{\omega_0 C} = 0,$$

откуда

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2) C}}. \qquad (4\text{-}87)$$

Обозначим

$$p = \frac{L_1}{L_1 + L_2} = \frac{L_1}{L} = \frac{\omega L_1}{\omega L}, \qquad (4\text{-}88)$$

где $L = L_1 + L_2$ — полная индуктивность контура, и назовем величину p коэффициентом включения.

Тогда вместо (4-85) получим

$$R_э = p^2 \frac{\omega_0^2 L^2}{r} = p^2 \frac{\rho^2}{r}. \qquad (4\text{-}89)$$

Схему контура II вида можно изобразить в несколько ином виде (рис. 4-27, *в*); здесь для простоты не показаны активные сопротивления. Из рисунка видно, что если коэффициент включения $p = 1$, т. е. контакт a поставлен в положение, показанное пунктиром, то эта схема обращается в схему контура I вида, и $R_э = \frac{\rho^2}{r}$; если же $p = 0$, то входные зажимы цепи закорочены ($R_э = 0$). Коэффициент включения, таким образом, может изменяться в пределах $0 \leqslant p \leqslant 1$.

Резонансная частота при перестановке щупа (контакта) a не изменяется, так как с увеличением L_1 одновременно уменьшается L_2.

Включение контура по схеме II вида удобно тем, что путем изменения величины коэффициента p можно в широких пределах изменять величину входного сопротивления. По характеру своему оно остается активным.

Напряжение на входе цепи $U = I_к \omega L_1$, а напряжение на контуре $U_к = I_к \omega L$. Отношение

$$\frac{U}{U_к} = \frac{L_1}{L} = p, \qquad (4\text{-}90)$$

т. е. коэффициент включения является коэффициентом трансформации напряжения от входа цепи к ее выходу.

Формула (4-89) справедлива и для схемы контура III вида (рис. 4-27, *б*), если под величиной коэффициента включения понимать отношение

$$\frac{\frac{1}{\omega C_1}}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{C}{C_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} = p, \qquad (4\text{-}91)$$

где C — полная емкость контура,

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

4-4. Элементы колебательного контура. Границы применимости колебательных систем с сосредоточенными параметрами

Приближенные эквивалентные схемы конденсатора и катушки индуктивности (см. рис. 3-43 и 3-42) в общем случае не отражают достаточно полно картину распределения электромагнитного поля.

Действительно, рассматривая конструкцию конденсатора (рис. 4-28), мы должны отметить, что как проводники, соединяющие наружные зажимы конденсатора с его пластинами, так и сами пластины неизбежно обладают некоторой индуктивностью. Иными словами, прохождение тока через конденсатор неизбежно связано с магнитным полем. Желая учесть это обстоятельство, приходим к эквивалентной схеме конденсатора, показанной на рис. 4-29. Здесь L_C — так называемая собственная, или распределенная, индуктивность конденсатора. В варианте схемы рис. 4-29, *а* потери учитываются последовательным сопротивлением r_C, а во втором варианте (рис. 4-29, *б*) — параллельным сопротивлением R_C.

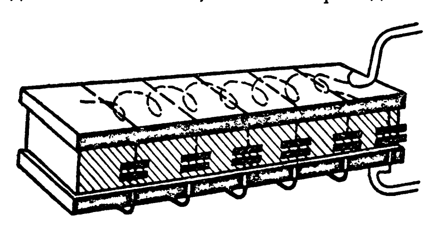
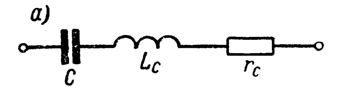


Рис. 4-28. Конденсатор.

Мы видим, что конденсатор в действительности сам является последовательным колебательным контуром, имеющим резонансную частоту

$$\omega_{0C} = \frac{1}{\sqrt{CL_C}}. \qquad (4\text{-}92)$$

При достаточно низких частотах, когда $\omega \ll \omega_{0C}$, индуктивное сопротивление ωL_C многим меньше, чем $1/\omega C$, и распределенной индуктивностью можно пренебречь. Тогда можно считать справедливыми схемы конденсатора, приведенные на рис. 3-43.



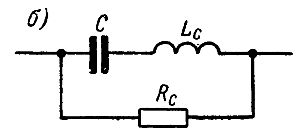


Рис. 4-29. Эквивалентные схемы конденсатора с сосредоточенными параметрами.

Однако при очень высоких частотах ($\omega > \omega_0$) индуктивное сопротивление распределенной индуктивности превышает емкостное сопротивление $\left(\omega L_C > \frac{1}{\omega C}\right)$, и наблюдается любопытное явление, когда конденсатор играет роль индуктивности, а не емкости.

В конструкции конденсаторов принимаются специальные меры к уменьшению распределенной индуктивности так, чтобы собственная частота ω_{0C} была достаточно высокой. Тогда рабочие частоты оказываются значительно меньшими, чем собственная частота конденсатора, и он действительно оказывается емкостью.

Аналогичные соображения должны быть высказаны и в отношении катушки индуктивности.

При прохождении через катушку тока в пространстве образуется не только магнитное поле, часть силовых линий которого нанесена пунктиром на рис. 4-30, но также и электрическое поле, вызванное разностью потенциалов между каждыми двумя соседними витками (сплошные линии на рис. 4-30).

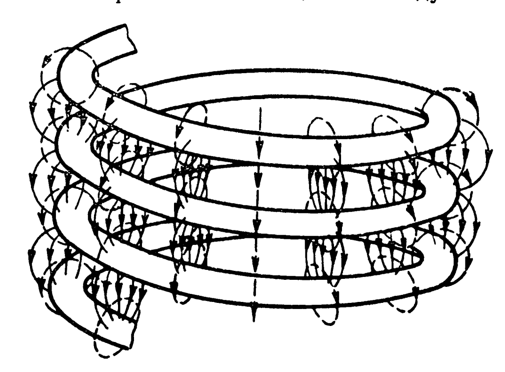


Рис. 4-30. Катушка индуктивности и ее электромагнитное поле.

При переменном токе направление электрических силовых линий периодически изменяется, т. е. через диэлектрик, примыкающий к виткам катушки, проходит ток смещения. Очевидно, этот ток можно приближенно учесть, полагая в схеме, эквивалентной катушке, наличие некоторой сосредоточенной емкости C_L, включенной параллельно индуктивности L. Так приходим к эквивалентным схемам катушки, показанным на рис. 4-31. В первой из них (рис. 4-31, *а*) потери учитываются последовательным сопротивлением r_L; во второй — параллельным сопротивлением R_L (рис. 4-31, *б*). Емкость C_L называют с о б с т в е н н о й, или р а с п р е д е л е н н о й, е м к о с т ь ю к а т у ш к и.

Как видно, катушка с учетом ее распределенной емкости оказывается эквивалентной параллельному колебательному контуру, резонансная частота которого

$$\omega_{0L} = \frac{1}{\sqrt{LC_L}}. \qquad (4\text{-}93)$$

Если рабочая частота $\omega \ll \omega_{0L}$, то сопротивление параллельно включенной емкости $1/\omega C_L$ весьма велико, и приближенно ее можно вообще не учитывать. Тогда справедливы схемы рис. 3-42.

Рис. 4-31. Эквивалентные схемы катушки.

Однако при очень высоких частотах ($\omega \gg \omega_{0L}$) шунтирующее действие распределенной емкости оказывается весьма существенным. Вся цепь дает емкостную реакцию, и катушка уже выполняет роль емкости, а не индуктивности.

Для того чтобы катушка выполняла функции индуктивности, необходимо, чтобы ее резонансная частота ω_{0L} была значительно большей, нежели рабочая частота. С этой целью конструкцию катушки стремятся выполнить так, чтобы ее распределенная емкость была возможно меньшей.

Из каких соображений выбираются параметры элементов контура: индуктивность катушки L и емкость конденсатора C? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим основные требования, которым должен отвечать радиотехнический колебательный контур.

1. Р е з о н а н с н а я ч а с т о т а (резонансная волна) контура должна быть равна известной, наперед заданной, величине $\omega_0(\lambda_0)$.

2. Добротность контура Q должна также равняться определенной величине, находимой главным образом из соображений частотной избирательности, т. е. из условия получения заданной полосы пропускания.

3. Контур как двухполюсник должен иметь определенную величину входного сопротивления при резонансе. Если контур включается по схеме параллельного питания, то его входное резонансное сопротивление $R_э$ должно быть, как правило, достаточно большим.

4. Контур должен обладать достаточно высокими эталонными свойствами, т. е. его параметры L и C, определяющие резонансную частоту ω_0, должны быть строго неизменными во времени и в минимальной степени зависеть от внешних факторов: механических, температурных и т. п.

Первые два требования приводят к необходимости совместного выполнения равенств (4-7) и (4-20). При заданных ω_0 и Q и при известном r значения основных параметров контура L и C определяются однозначно.

Так как активное сопротивление контура r на умеренно высоких частотах составляет обычно величину порядка нескольких десятых или единиц ом, для получения достаточно большой добротности необходимо, чтобы величина характеристики контура $\rho = rQ$ была порядка нескольких сот ом. При этом и входное резонансное сопротивление параллельного контура $R_э = Q\rho$ окажется достаточно большим, что является в большинстве случаев желательным.

Характеристическое сопротивление контура, как известно,

$$\rho = \frac{1}{\omega_0 C}.$$

Выразив ω_0 через длину волны λ_0, т. е. $\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$, получим

$$\rho = \frac{530\lambda_0}{C} \ [ом], \tag{4-94}$$

где λ_0 — в *м*; C — в *пф*.

Если мы хотим, чтобы ρ равнялось 300—500 *ом*, то емкость должна быть

$$C \approx (1 \div 2)\lambda_0 \ [пф]. \tag{4-95}$$

Стало быть, удовлетворить сформулированным выше требованиям оказывается возможным, если емкость контура, выраженная в пикофарадах, имеет величину порядка длины волны, выраженной в метрах. Равенство (4-95) является, разумеется, приближенным, говорящим только о порядке величин. Тем не менее, оно позволяет сделать важные выводы.

Выполнение условия (4-95) не встречает затруднений в области частот, соответствующих волнам длиною в сотни, тысячи метров. Однако при переходе к волнам коротким и ультракоротким (длиною в десятки и единицы метров) возникают трудности. Действительно, на этих волнах емкость контура должна быть порядка нескольких пикофарад. Между тем, распределенная емкость катушки, а также емкость соединительных проводов (монтажа) могут составить величину бо́льшую, чем требуемая емкость контура. Для настройки на заданную частоту приходится снижать индуктивность, а это приводит к дальнейшему уменьшению ρ.

Таким образом, на достаточно высоких частотах осуществить колебательный контур с сосредоточенными параметрами, имеющий большое характеристическое сопротивление, весьма затруднительно, а во многих случаях практически невозможно.

При весьма высоких частотах наряду с увеличением активного сопротивления проводов оказываются существенными потери в окружающих предметах (диэлектриках и проводниках). Они резко растут с частотой. Возрастает при этом и энергия, излучаемая проводниками контура в пространство.

Все это приводит к росту результирующего активного сопротивления контура. Уменьшение характеристического сопротивления ρ наряду с увеличением

активного сопротивления r влечет за собой резкое уменьшение добротности при переходе к диапазону ультракоротких волн.

Можно утверждать, что обычные колебательные контуры с сосредоточенными параметрами оказываются непригодными в качестве колебательных систем для весьма высоких частот (>30 *Мгц*), соответствующих волнам короче 10 *м*.

От указанных выше недостатков свободны колебательные системы с р а с п р е д е л е н н ы м и п а р а м е т р а м и, рассматриваемые в главе шестой. Они находят широкое применение в цепях сверхвысоких частот.

4-5. Сложные реактивные двухполюсники

Колебательные контуры без потерь по отношению к входным зажимам являются р е а к т и в н ы м и д в у х п о л ю с н и к а м и. Схемы простейших контуров содержат два элемента: индуктивность и емкость. Поэтому они могут быть названы д в у х э л е м е н т н ы м и реактивными двухполюсниками.

При изучении реактивных двухполюсников особый интерес представляют частотные характеристики входного сопротивления $Z_{вх}(\omega) = jx_{вх}(\omega)$.

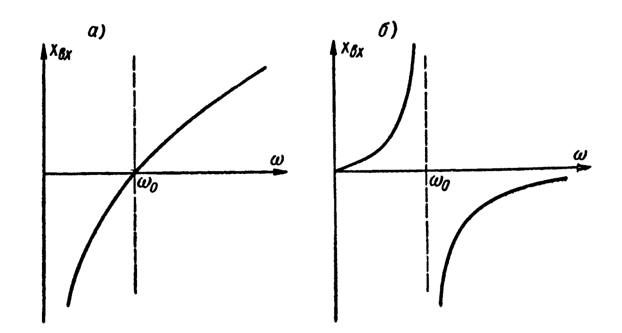


Рис. 4-32. Частотные характеристики двухэлементных реактивных двухполюсников.

Для последовательного контура без потерь эта зависимость имеет вид кривой, показанной на рис. 4-7 и воспроизведенной еще раз на рис. 4-32, *а*. При частоте $\omega = \omega_0$ входное сопротивление обращается в нуль: $Z_{вх}(\omega_0) = 0$.

Для параллельного контура характерно, что при частоте воздействия, равной резонансной частоте ($\omega = \omega_0$) входное сопротивление становится равным бесконечности: $Z_{вх}(\omega_0) = \infty$. Частотная характеристика $x_{вх}(\omega)$ параллельного контура I вида изображена на рис. 4-32, *б*. Она построена по формуле $x_{вх} = -\dfrac{\rho^2}{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}$, получаемой из (4-64) при $r = 0$.

Те значения частоты, при которых входное сопротивление обращается в нуль, называются н у л я м и ф у н к ц и и $Z_{вх}(\omega)$ [или $x_{вх}(\omega)$], а частоты, при которых $Z_{вх}$ становится равным бесконечности, — п о л ю с а м и ф у н к ц и и $Z_{вх}(\omega)$ [или $x_{вх}(\omega)$].

Таким образом, частотная характеристика последовательного контура имеет один нуль $\omega = \omega_0$ и два «внешних полюса»: $\omega = 0$ и $\omega = \infty$. Характеристика параллельного контура I вида имеет два «внешних нуля»: $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ и один полюс $\omega = \omega_0$.

Более сложный, т р е х э л е м е н т н ы й, реактивный двухполюсник имеет, например, схему, приведенную на рис. 4-33, *а*. Построим частотную ха-

рактеристику этого двухполюсника. На рис. 4-33, *б* изображены частотные характеристики сопротивления $x_0 = \omega L_0$, сопротивления $x_к(\omega)$ последовательно с ним соединенного параллельного контура L_2, C_2 и, наконец, характеристика (отштрихованная) результирующего сопротивления $x_{вх} = x_0 + x_к = x_{вх}(\omega)$.

Интересно отметить, что двухполюсник имеет две резонансные частоты. Одна из них ω_{02} равна резонансной частоте параллельного контура L_2, C_2. При частотах бо́льших, чем ω_{02}, контур L_2, C_2 представляет собой емкостное сопротивление. Последнее с индуктивностью L_0 образует последовательный контур, резонансная частота которого на рис. 4-33, *а* обозначена ω_{03}. Можно

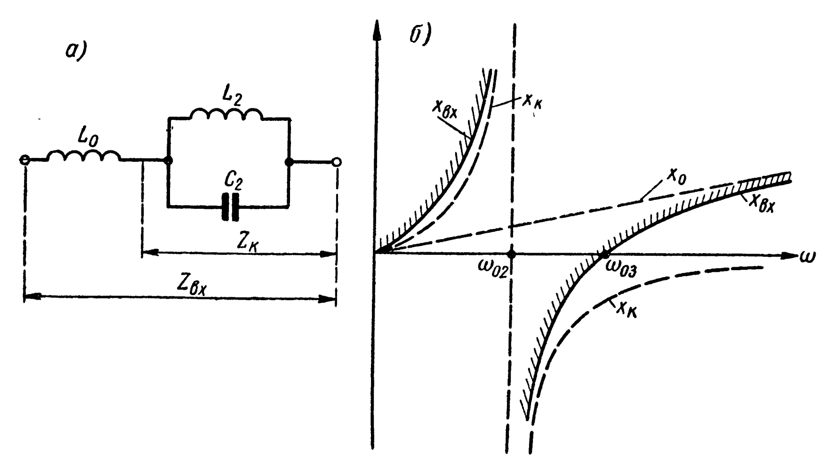


Рис. 4-33. Схема (*а*) и частотные характеристики (*б*) трехэлементного реактивного двухполюсника.

сказать, что функция $x_{вх}(\omega)$ имеет один полюс $\omega = \omega_{02}$, один нуль $\omega = \omega_{03}$, внешний нуль $\omega = 0$ и внешний полюс $\omega = \infty$.

Аналитически функция $Z_{вх}(\omega)$ может быть представлена так:

$$Z_{вх} = j\omega L_0 + jx_к.$$

Входное сопротивление $x_к$ параллельного контура L_2, C_2 определим, найдя сначала проводимость

$$Y_к = -j\left(\frac{1}{\omega L_2} - \omega C_2\right) = -j\omega C_2 \frac{\omega_{02}^2 - \omega^2}{\omega^2},$$

откуда

$$Z_к = jx_к = j\frac{1}{\omega C_2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_{02}^2 - \omega^2}.$$

Значит,

$$Z_{вх} = j\omega L_0 + j\frac{\omega}{C_2(\omega_{02}^2 - \omega^2)}. \quad (4\text{-}96)$$

В этих формулах

$$\omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}. \quad (4\text{-}97)$$

Частота «последовательного резонанса» ω_{03} находится из условия $Z_{вх}(\omega_{03}) = 0$, т. е.

$$\omega_{03}L + \frac{\omega_{03}}{C_2(\omega_{02}^2 - \omega_{03}^2)} = 0,$$

откуда

$$\omega_{03}^2 = \frac{1}{L_2C_2} + \frac{1}{L_0C_2}. \tag{4-98}$$

Выражение (4-96) после несложных преобразований и учитывая (4-97) и (4-98), можно привести к виду

$$Z_{вх} = j\omega L_0 \frac{\omega_{03}^2 - \omega^2}{\omega_{02}^2 - \omega^2}. \tag{4-99}$$

Частота $\omega = \omega_{03}$, при которой числитель обращается в нуль, является нулем функции $Z_{вх}$, а частота $\omega = \omega_{02}$, обращающая в нуль знаменатель, — полюсом.

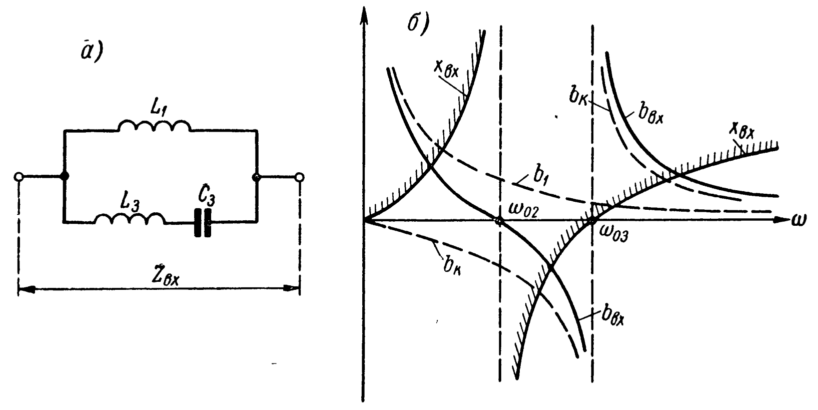


Рис. 4-34. Схема (*а*) и частотные характеристики (*б*) двухполюсника, эквивалентного цепи рис. 4-33, *а*.

Характеристики вида рис. 4-33, *б* могут быть реализованы не только в схеме рис. 4-33, *а*, но также и в двухполюснике, схема которого приведена на рис. 4-34, *а*. Для того чтобы убедиться в этом, построим сначала частотные характеристики: проводимости b_1 индуктивности L_1, проводимости $b_к$ последовательного контура L_3, C_3 и результирующей проводимости $b_{вх}$ (рис. 4-34, *б*). Частотная характеристика входного сопротивления $x_{вх}$ получается как кривая обратных значений $b_{вх}$. И здесь, как видно, получаются две резонансные частоты. Одна из них (ω_{03}) есть резонансная частота последовательного контура L_3, C_3. При $\omega < \omega_{03}$ контур L_3, C_3 эквивалентен емкости, которая с индуктивностью L_1 образует параллельный контур. Его резонансной частотой является ω_{02}.

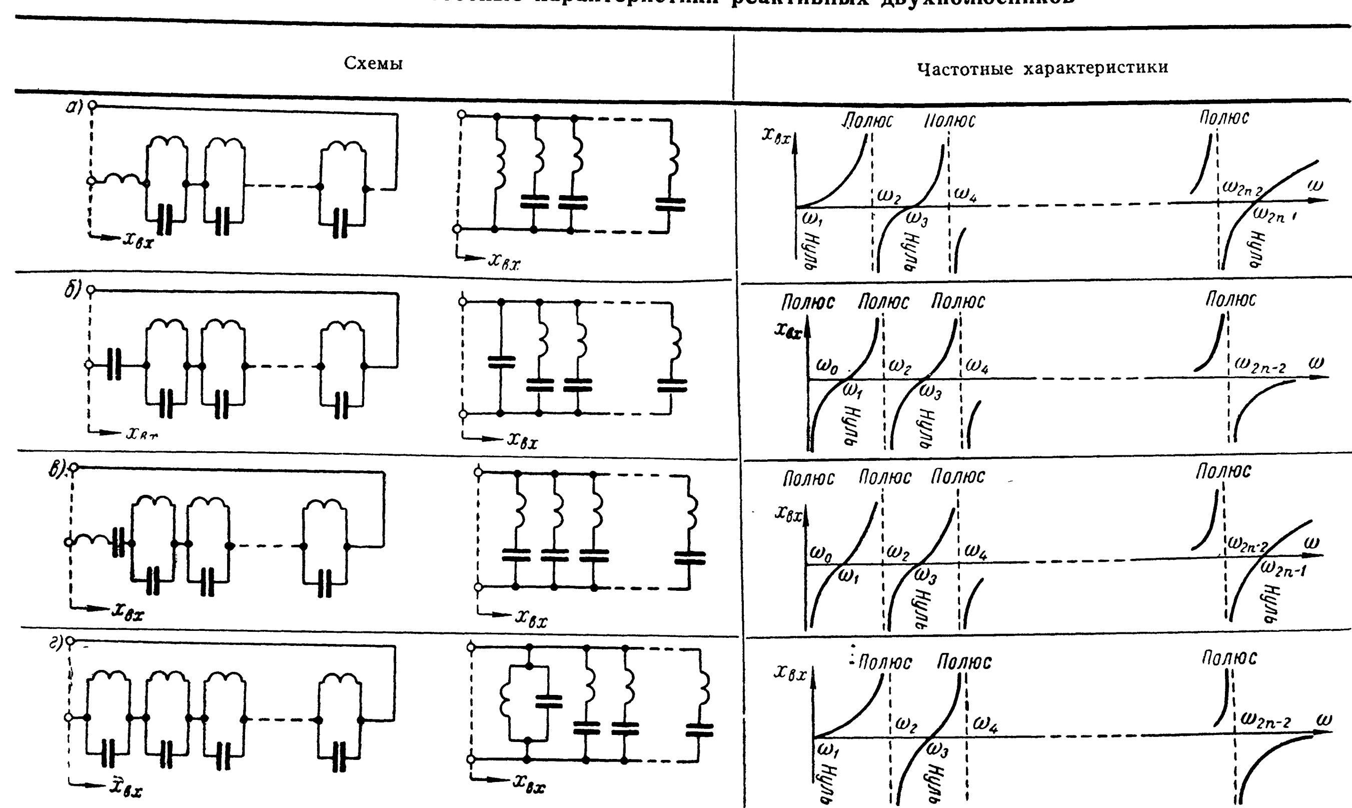
Итак, действительно, частотные характеристики двухполюсника рис. 4-34, *а* имеют совершенно такой же вид, как и двухполюсника рис. 4-33, *а*. Такие двухполюсники, у которых частотные характеристики совпадают на всех частотах, называются **эквивалентными**. Разумеется, для того чтобы характеристики строго (численно) совпадали, необходимо соответствующим образом подобрать параметры эквивалентного двухполюсника.

Нетрудно заметить, что цепь рис. 4-34, *а* представляет собой не что иное, как параллельный контур II вида. Следовательно, контур II вида, в отличие от простейшего контура I вида, имеет две резонансные частоты.

Таблица 4-1

Схемы и частотные характеристики реактивных двухполюсников

Схемы	Частотные характеристики



Сопоставление схем двух рассмотренных двухполюсников показывает, что если в первом из них (рис. 4-33, а) последовательно в цепь включено индуктивное сопротивление ωL_0, то во втором (рис. 4-34, *а*) сопротивление такого же (индуктивного) характера включено параллельно входным зажимам. Далее, если в первой схеме последовательно с L_0 включен параллельный контур L_2, C_2, то в эквивалентном двухполюснике параллельно L_1 включается последовательный контур L_3, C_3.

Трехэлементные реактивные двухполюсники имеют две резонансные частоты. Более сложные двухполюсники, составленные из большего числа элементов, могут иметь большее число резонансных частот.

Так, например, если к цепи рис. 4-33, *а* добавить еще ряд последовательно соединенных параллельных контуров (или к схеме рис. 4-34, *а* ряд параллельно соединенных последовательных контуров), получатся две эквивалентные друг другу схемы, показанные в табл. 4-1, схема *а*. Система имеет множество резонансных частот, причем частоты «последовательного резонанса» (нули) и «параллельного резонанса» (полюсы) чередуются.

Схемы при $\omega = 0$ (постоянный ток) имеют входное сопротивление $Z(0) = 0$, а для бесконечно большой частоты $Z(\infty) = \infty$. Поэтому первым в характеристике наблюдается нуль, а последним — полюс; эта характеристика имеет внешний нуль и внешний полюс.

Кроме рассмотренного, возможны и другие варианты построения сложных реактивных двухполюсников, содержащих множество колебательных контуров.

Схемы *б* табл. 4-1 представляют разрыв (холостой ход) для постоянного тока, а для бесконечно высокой частоты — короткое замыкание. Поэтому частотная характеристика их имеет внешний полюс $\omega = 0$ и внешний нуль $\omega = \infty$.

В цепях *в* (табл. 4-1) путь для постоянного тока также отсутствует, но для $\omega = \infty$ входное сопротивление бесконечно велико. Схемы имеют частотную характеристику с двумя внешними полюсами.

Наконец, схемы *г* представляют короткое замыкание и для постоянного тока, и для бесконечно высокой частоты. Поэтому их частотная характеристика с двумя внешними нулями.

Путем обобщения выражения (4-99) можно показать, что для любой из схем табл. 4-1 входное сопротивление может быть выражено формулой

$$Z_{\text{вх}} = \frac{j\omega H(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2) \ldots (\omega^2 - \omega_{2n-1}^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2) \ldots (\omega^2 - \omega_{2n-2}^2)}. \qquad (4\text{-}100)$$

Здесь n — число независимых контуров; H — постоянный коэффициент; $\omega_0 = 0$. Частоты ω_1, ω_3, ..., ω_{2n-1} являются нулями, а частоты ω_0, ω_2, ω_4, ..., ω_{2n-2} — полюсами функции $Z_{\text{вх}}(\omega)$.

Рассматривая частотные кривые табл. 4-1, можно установить некоторые общие свойства этих зависимостей. Как было уже отмечено, нули и полюсы чередуются. Знак сопротивления $x_{\text{вх}}$ при переходе через каждые нуль и полюс изменяется на обратный. Производная $x_{\text{вх}}$ по частоте всегда положительна:

$$\frac{\partial x_{\text{вх}}}{\partial \omega} > 0. \qquad (4\text{-}101)$$

4-6. Цепочечные колебательные системы (связанные колебательные контуры)

а) Основные схемы

В радиотехнике широко применяются четырехполюсники, построенные по цепочечной схеме, каждое звено которой составляет колебательный контур. Такие системы называются обычно связанными колебательными контурами.

На рис. 4-35 показаны схемы цепочечных колебательных систем. Взаимные сопротивления (входящие в состав каждого из двух смежных контуров) называют *сопротивлениями связи*. В схеме, изображенной на рис. 4-35, *а*, сопротивления связи имеют индуктивный характер. Такой способ связи контуров именуют

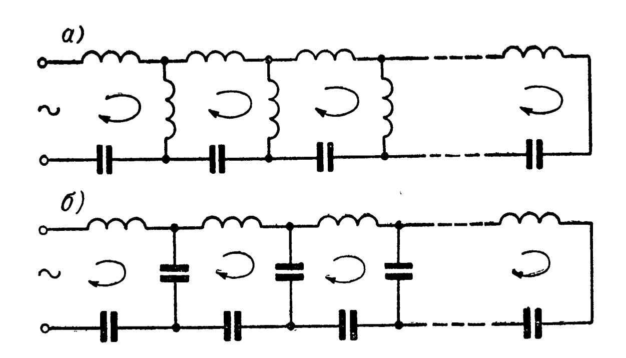


Рис. 4-35. Цепочечные колебательные системы.

индуктивным. В схеме рис. 4-35, *б* сопротивление связи емкостного характера. Этот вид связи называют *емкостным*.

Системы связанных контуров обладают ценными свойствами. Очень важным из них является возможность осуществления частот-

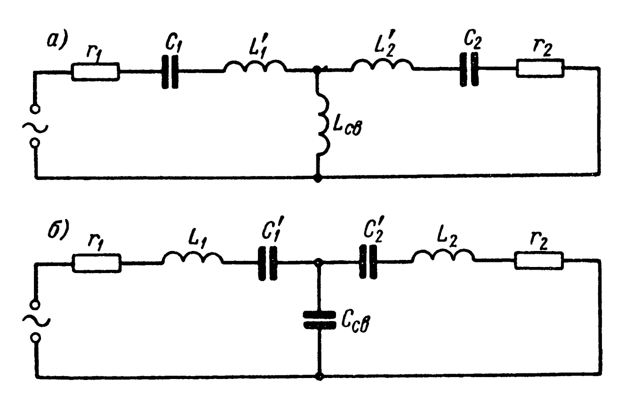


Рис. 4-36. Система двух связанных колебательных контуров.

ной характеристики, по форме своей приближающейся к прямоугольнику (см. рис. 4-2, *б*). Этим система связанных контуров выгодно отличается от одиночного контура.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением систем, составленных из двух связанных между собой колебательных контуров. Тот

контур, в котором включен источник питания, будем называть первичным, а связанный с ним контур — вторичным.

Основными видами связи между контурами являются индуктивная (рис. 4-36, *а*) и емкостная (рис. 4-36, *б*). На схемах рис. 4-36 наряду с реактивными элементами контуров показаны их активные сопротивления r_1 и r_2. Весьма распространенная схема с трансформаторной связью (рис. 4-37, *а*) может быть представлена, как это показано в § 3-7, п. «в», эквивалентной схемой рис. 4-37, *б*, которая не отличается принципиально от системы с индуктивно связанными контурами (рис. 4-36, *а*).

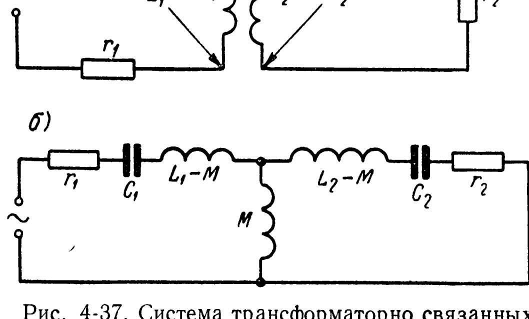


Рис. 4-37. Система трансформаторно связанных колебательных контуров (*а*) и ее эквивалентная схема (*б*).

Для количественной оценки степени связи между контурами воспользуемся понятием коэффициента связи (§ 3-7, п. «б»).

Применительно к трансформаторной схеме (рис. 4-37, *а*), коэффициент связи аналогично (3-184)

$$k = \sqrt{K_{12}K_{21}} = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}} = \frac{|x_{св}|}{\sqrt{x_{L_1}x_{L_2}}}. \qquad (4\text{-}102)$$

Здесь K_{21} и K_{12} — коэффициенты передачи напряжения из первого контура во второй и из второго в первый соответственно;

$L_1 = L_1' + L_1''$ — полная индуктивность первичного контура;

$L_2 = L_2' + L_2''$ — полная индуктивность вторичного контура;

$x_{L1} = \omega L_1$ и $x_{L2} = \omega L_2$ — индуктивные сопротивления соответственно первичного и вторичного контуров;

$|x_{св}| = \omega M$ — абсолютная величина реактивного сопротивления связи между контурами.

Аналогично определяется коэффициент связи для схемы рис. 4-36, *а*, которую часто называют автотрансформаторной. В этой схеме полные индуктивности контуров

$$L_1 = L_1' + L_{св} \quad \text{и} \quad L_2 = L_2' + L_{св};$$

сопротивление связи

$$|x_{св}| = \omega L_{св};\qquad(4\text{-}103)$$

коэффициент связи

$$k = \frac{L_{св}}{\sqrt{L_1 L_2}}.\qquad(4\text{-}104)$$

В емкостной схеме (рис. 4-36, *б*) сопротивление связи имеет емкостный характер,

$$|x_{св}| = \frac{1}{\omega C_{св}},\qquad(4\text{-}105)$$

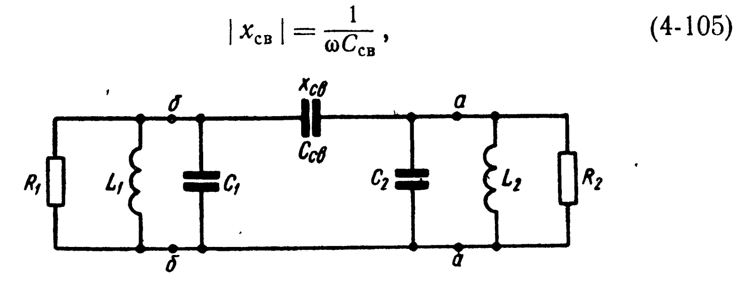


Рис. 4-38. Система двух контуров, связанных внешней емкостной связью.

а коэффициент связи

$$k = \frac{|x_{св}|}{\sqrt{x_{C1} x_{C2}}} = \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{C_{св}}.\qquad(4\text{-}106)$$

Здесь $x_{C1} = \frac{1}{\omega C_1}$ и $x_{C2} = \frac{1}{\omega C_2}$ — емкостные сопротивления соответственно первичного и вторичного контуров;

$C_1 = \frac{C_1' C_{св}}{C_1' + C_{св}}$ — полная емкость первичного контура;

$C_2 = \frac{C_2' C_{св}}{C_2' + C_{св}}$ — полная емкость вторичного контура.

Все рассмотренные схемы построены по принципу Т-образных четырехполюсников, их называют **схемами с внутренней связью**.

Другим классом связанных контуров являются системы, построенные по принципу П-образных четырехполюсников и называемые **схемами с внешней связью** (рис. 4-38).

Роль параллельных плеч П-образного четырехполюсника здесь играют связываемые контуры параллельного питания L_1, C_1, R_1 и L_2, C_2, R_2. Последовательное сопротивление (в схеме рис. 4-38 емкостное сопротивление $|x_{св}|$) является сопротивлением связи.

Для П-образных схем сохраняется понятие коэффициента связи, установленное выше.

Коэффициент передачи K_{21} теперь будет равен отношению напряжения на сопротивлении $x'_{C2} = \frac{1}{\omega C_2}$ при разомкнутых точках *а-а* к напряжению на первом контуре, т. е. на сопротивлении $x_{св} + x'_{C2}$,

$$K_{21} = \frac{x'_{C2}}{x_{св} + x'_{C2}}.$$

Аналогично коэффициент передачи K_{12} равен отношению напряжения на сопротивлении $x'_{C1} = \frac{1}{\omega C_1}$ при разомкнутых точках *б-б* к напряжению на сопротивлении $x_{св} + x'_{C1}$:

$$K_{12} = \frac{x'_{C1}}{x'_{C1} + x_{св}}.$$

Коэффициент связи

$$k = \sqrt{K_{21}K_{12}} = \sqrt{\frac{x'_{C1}\, x'_{C2}}{(x'_{C1} + x_{св})(x'_{C2} + x_{св})}}.$$

Если от сопротивлений перейдем к проводимостям: [1]

$$b'_1 = \frac{1}{x'_1}, \quad b'_2 = \frac{1}{x'_2}, \quad b_{св} = \frac{1}{x_{св}},$$

то после простых преобразований получим формулу, справедливую как для емкостной, так и для индуктивной внешней связи,

$$k = \frac{|b_{св}|}{\sqrt{(b'_1 + b_{св})(b'_2 + b_{св})}}. \qquad (4\text{-}107)$$

Это выражение подобно (4-102). Только теперь место сопротивлений занимают соответствующие проводимости.

Применяя формулу (4-107) к схеме рис. 4-38, получим

$$k = \frac{C_{св}}{\sqrt{(C_1 + C_{св})(C_2 + C_{св})}}. \qquad (4\text{-}108)$$

б) Входное сопротивление системы связанных контуров. Первичный ток

Система двух связанных колебательных контуров является для питающего ее генератора двухполюсником, обладающим определенным входным сопротивлением $Z_{вх}$.

Изобразим рассматриваемую систему в виде Т-образного четырехполюсника (рис. 4-39) и рассчитаем ее входное сопротивление при условии питания цепи в точках *1-1*.

---

[1] В П-образных схемах под величинами x'_1 и x'_2 надо понимать однородные с сопротивлением связи реактивные сопротивления параллельных ветвей.

Если бы первичный контур был одиночным, т. е. если бы выход системы в точках *2-2* был разомкнут, входное сопротивление равнялось бы собственному полному сопротивлению первичного контура:

$$Z_1 = Z_a + Z_{св}. \qquad (4\text{-}109)$$

Аналогично при питании системы в точках *2-2* и при разомкнутых точках *1-1* входное сопротивление

$$Z_2 = Z_b + Z_{св}. \qquad (4\text{-}110)$$

Теперь найдем входное сопротивление в точках *1-1* при замкнутых накоротко точках *2-2*

$$Z_{вх} = Z_a + \frac{Z_b Z_{св}}{Z_b + Z_{св}}.$$

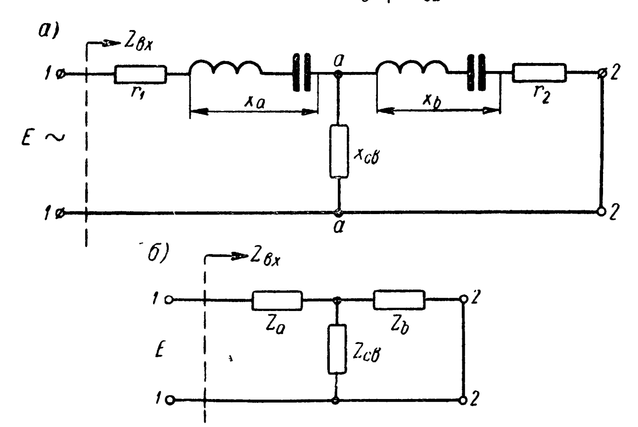


Рис. 4-39. Т-образная схема связанных контуров (*а*) и обобщенная схема (*б*).

Подставив сюда вместо Z_a его значение из (4-109) и вместо Z_b его значение из (4-110), получим

$$Z_{вх} = Z_1 - \frac{Z_{св}^2}{Z_2}. \qquad (4\text{-}111)$$

Сопоставление (4-111) с (4-109) показывает, что после того как первичный контур оказался связанным со вторичным контуром, его полное сопротивление изменилось на величину $-Z_{св}^2/Z_2$.

В первичный контур «вносится» сопротивление

$$Z_{вн} = -\frac{Z_{св}^2}{Z_2}, \qquad (4\text{-}112)$$

называемое **полным вносимым сопротивлением**.

Входное сопротивление становится

$$Z_{вх} = Z_1 + Z_{вн}, \qquad (4\text{-}113)$$

где $Z_1 = r_1 + jx_1$.

Таким образом, эквивалентная схема системы как двухполюсника может быть представлена рис. 4-40, *а*.

Перепишем (4-112), приняв во внимание, что $Z_{св} = jx_{св}$ и $Z_2 = r_2 + jx_2$:

$$Z_{вн} = \frac{x_{св}^2}{r_2 + jx_2}.$$

Освободившись от мнимости в знаменателе, получим

$$Z_{вн} = \frac{x_{св}^2}{r_2^2 + x_2^2} r_2 - j \frac{x_{св}^2}{r_2^2 + x_2^2} x_2. \quad (4\text{-}114)$$

Отсюда видно, что в общем случае вносимое сопротивление представляет собой комплексную величину

$$Z_{вн} = r_{вн} + jx_{вн},$$

причем активная составляющая его

$$r_{вн} = \frac{x_{св}^2}{r_2^2 + x_2^2} r_2 = \frac{x_{св}^2}{z_2^2} r_2 \quad (4\text{-}115)$$

и реактивная составляющая

$$x_{вн} = -\frac{x_{св}^2}{r_2^2 + x_2^2} x_2 = -\frac{x_{св}^2}{z_2^2} x_2. \quad (4\text{-}116)$$

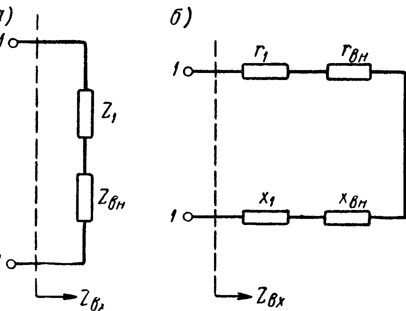


Рис. 4-40. Эквивалентные схемы первичной цепи.

Итак, входное сопротивление системы связанных контуров может быть представлено следующим образом:

$$Z_{вх} = (r_1 + r_{вн}) + j(x_1 + x_{вн}) = r_{вх} + jx_{вх}; \quad (4\text{-}117)$$

поэтому эквивалентная схема рис. 4-40, *а* может быть заменена схемой рис. 4-40, *б*.

Ток (первичный), потребляемый системой от источника питания E, определяется формулой закона Ома:

$$I_1 = \frac{E}{Z_{вх}} = \frac{E}{Z_1 + Z_{вн}} = \frac{E}{(r_1 + r_{вн}) + j(x_1 + x_{вн})}. \quad (4\text{-}118)$$

Как активное, так и реактивное вносимые сопротивления в сильной степени зависят от реактивного сопротивления вторичного контура x_2. Величина же последнего, в свою очередь, определяется параметрами вторичного контура L_2 и C_2 и частотой:

$$x_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}.$$

При малых расстройках вторичного контура относительно частоты питающего напряжения

$$x_2 \approx 2\rho_2 \frac{\Delta\omega}{\omega_{02}},$$

где $\rho_2 = \sqrt{\frac{L_2}{C_2}}$ — характеристическое сопротивление вторичного контура;

$\omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$ — резонансная частота вторичного контура;

$\Delta\omega/\omega_{02}$ — относительная расстройка вторичного контура.

Подставляя это значение x_2 в (4-115), получим

$$r_{вн} = \frac{x_{св}^2}{r_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x_2^2}{r_2^2}} \approx \frac{x_{св}^2}{r_2} \cdot \frac{1}{1 + \left(2Q_2 \frac{\Delta\omega}{\omega_{02}}\right)^2} = \frac{x_{св}^2}{r_2} \cdot \frac{1}{1 + \xi_2^2}, \quad (4\text{-}119)$$

где Q_2 — добротность вторичного контура;

$\xi_2 = 2Q_2 \frac{\Delta\omega}{\omega_{02}}$ — обобщенная расстройка вторичного контура.

Для реактивного вносимого сопротивления вместо (4-116) получаем

$$x_{вн} = -\frac{x_{св}^2}{r_2} \cdot \frac{\frac{x_2}{r_2}}{1 + \frac{x_2^2}{r_2^2}} = -\frac{x_{св}^2}{r_2} \cdot \frac{\xi_2}{1 + \xi_2^2}. \quad (4\text{-}120)$$

Выражения (4-119) и (4-120) аналогичны формулам (4-68) и (4-69) для составляющих входного сопротивления параллельного колебательного контура. Это вполне естественно, так как двухполюсник, включенный между точками *а-а* (см. рис. 4-39) первичного контура и определяющий вносимое сопротивление, представляет собой не что иное, как параллельный колебательный контур (II или III вида — в зависимости от знака сопротивления $x_{св}$).

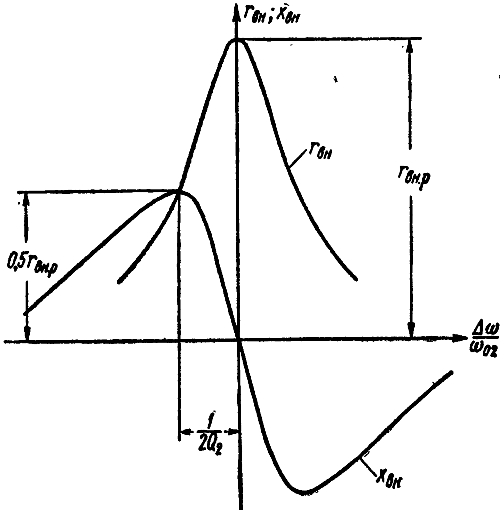


Рис. 4-41. Частотные характеристики составляющих вносимого сопротивления.

На рис. 4-41 показаны частотные характеристики составляющих вносимого сопротивления: $r_{вн}\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{02}}\right)$ и $x_{вн}\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{02}}\right)$. Они построены в предположении, что при малых расстройках сопротивление связи $x_{св}$ от частоты не зависит, и имеют такой же вид, как соответствующие зависимости параллельного колебательного контура (см. рис. 4-21).

Из выражения (4-119) и рис. 4-41 видно, что активное вносимое сопротивление достигает максимального значения

$$r_{\text{вн. р}} = \frac{x_{\text{св}}^2}{r_2}, \tag{4-121}$$

когда вторичный контур настроен в резонанс ($x_2 = 0$).

Реактивное вносимое сопротивление при резонансе вторичного контура равно нулю. Когда $x_2 > 0$, вносимое сопротивление $x_{\text{вн}} < 0$ и, наоборот, при $x_2 < 0$ реактивное вносимое сопротивление $x_{\text{вн}} > 0$. По абсолютному своему значению $|x_{\text{вн}}|$ имеет два максимума, равных $r_{\text{вн.р}}/2$ и соответствующих относительным расстройкам $\pm 1/2Q_2$.

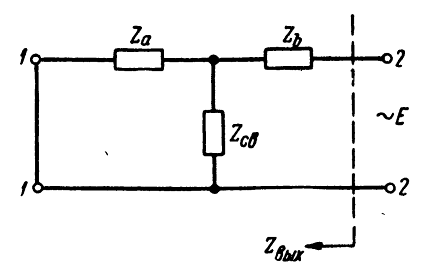


Рис. 4-42. К расчету выходного сопротивления.

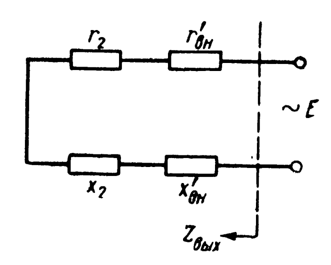


Рис. 4-43. Составляющие выходного сопротивления.

При очень больших расстройках как $r_{\text{вн}}$, так и $x_{\text{вн}}$ стремятся к нулю, т. е. сильная расстройка вторичного контура практически равноценна его размыканию.

Положим теперь, что питание системы контуров происходит в точках *2-2* (при короткозамкнутых зажимах *1-1*), т. е. допустим, что э. д. с. E перенесена из первого контура во второй (рис. 4-42).

Сопротивление между точками *2-2*, которое назовем в ы х о д н ы м с о п р о т и в л е н и е м системы, может быть рассчитано точно таким же путем, как было рассчитано входное сопротивление. Применяя этот метод, получим аналогично (4-111), что

$$Z_{\text{вых}} = Z_2 - \frac{Z_{\text{св}}^2}{Z_1} = Z_2 + Z'_{\text{вн}}. \tag{4-122}$$

Здесь

$$Z'_{\text{вн}} = -\frac{Z_{\text{св}}^2}{Z_1} = r'_{\text{вн}} + jx'_{\text{вн}} \tag{4-123}$$

— полное сопротивление, которое вносилось бы из первого контура во второй, если бы питание системы производилось со стороны точек *2-2*.

Подобно (4-115) и (4-116) найдем, что активная и реактивная составляющие сопротивления $Z'_{\text{вн}}$

$$r'_{\text{вн}} = \frac{x_{\text{св}}^2}{z_1^2} r_1, \tag{4-124}$$

$$x'_{\text{вн}} = -\frac{x_{\text{св}}^2}{z_1^2} x_1, \tag{4-125}$$

и эквивалентная схема цепи со стороны точек *2-2* приобретает вид рис. 4-43.

При питании системы в точках *2-2* ток, отдаваемый генератором, будет

$$\dot{I}_1' = \frac{\dot{E}}{Z_{вых}} = \frac{\dot{E}}{Z_2 + Z'_{вн}} = \frac{\dot{E}}{(r_2 + r'_{вн}) + j(x_2 + x'_{вн})}. \qquad (4\text{-}126)$$

в) Принцип взаимности. Вторичный ток системы связанных контуров

Полезным эффектом в системе связанных контуров, питаемой э. д. с. E, является мощность, выделяемая выходным (вторичным) током в активном сопротивлении r_2 вторичного контура, или падение напряжения, создаваемое этим током на каком-либо из элементов вторичного контура.

Расчет тока на выходе системы произведем для двух случаев:

1) когда питание цепи производится в точках *1-1* (рис. 4-44, *а*);

2) когда источник питания включен в точках *2-2* (рис. 4-44, *в*).

Для определения тока $\dot{I}_2$ (рис. 4-44, *а*) воспользуемся методом эквивалентного генератора э. д. с., для чего исследуемую схему заменим эквивалентной схемой рис. 4-44, *б*.

Здесь э. д. с. эквивалентного генератора $\dot{E}_э$ равна напряжению холостого хода, получаемому между точками *2-2*, когда они разомкнуты. Так как при этом через ветвь Z_b ток не проходит,

$$\dot{E}_э = \dot{E}\frac{Z_{св}}{Z_a + Z_{св}} = \dot{E}\frac{Z_{св}}{Z_1}.$$

Внутреннее сопротивление эквивалентного генератора $Z_{iэ}$ равно сопротивлению влево от точек *2-2* при короткозамкнутых точках *1-1*.

Согласно рис. 4-42 это сопротивление есть не что иное, как выходное сопротивление системы $Z_{вых}$, т. е. в соответствии с (4-122)

$$Z_{iэ} = Z_{вых} = Z_2 - \frac{Z_{св}^2}{Z_1}.$$

Для определения тока $\dot{I}_2'$ (рис. 4-44, *в*) воспользуемся методом эквивалентного генератора э. д. с., для чего исследуемую схему заменим эквивалентной схемой рис. 4-44, *г*.

Здесь э. д. с. эквивалентного генератора $\dot{E}_э'$ равна напряжению холостого хода, получаемому между точками *1-1*, когда они разомкнуты. Так как при этом через ветвь Z_a ток не проходит,

$$\dot{E}_э' = \dot{E}\frac{Z_{св}}{Z_b + Z_{св}} = \dot{E}\frac{Z_{св}}{Z_2}.$$

Внутреннее сопротивление эквивалентного генератора $Z_{iэ}'$ равно сопротивлению вправо от точек *1-1* при короткозамкнутых точках *2-2*.

Согласно рис. 4-39 это сопротивление есть не что иное, как входное сопротивление системы $Z_{вх}$, т. е. в соответствии с (4-111)

$$Z_{iэ}' = Z_{вх} = Z_1 - \frac{Z_{св}^2}{Z_2}.$$

Таким образом, искомый ток

$$I_2 = \frac{E_э}{Z_{iэ}} = \frac{E\frac{Z_{св}}{Z_1}}{Z_2 - \frac{Z_{св}^2}{Z_1}}$$

или, иначе,

$$I_2 = \frac{E Z_{св}}{Z_1 Z_2 - Z_{св}^2}. \quad (4\text{-}127)$$

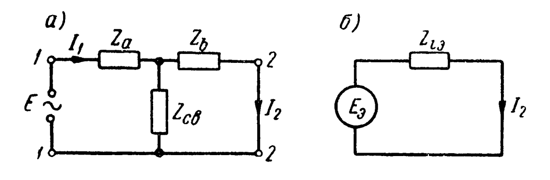
Таким образом, искомый ток

$$I_2' = \frac{E_э'}{Z_{iэ}'} = \frac{E\frac{Z_{св}}{Z_2}}{Z_1 - \frac{Z_{св}^2}{Z_2}}$$

или, иначе,

$$I_2' = \frac{E Z_{св}}{Z_1 Z_2 - Z_{св}^2}. \quad (4\text{-}127а)$$

Сопоставление (4-127) и (4-127а) говорит о том, что как при питании системы слева (в точках *1-1*), так и при питании справа (в точках *2-2*) выходной ток получается одним и тем же.



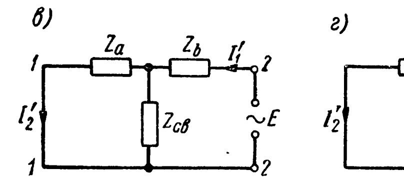


Рис. 4-44. К формулировке теоремы взаимности.

Этот важный результат, справедливый для любой линейной цепи, выражает так называемый п р и н ц и п в з а и м н о с т и, который может быть сформулирован следующим образом: *если э. д. с. **E**, включенная в некотором участке A сколь угодно сложной линейной цепи, не содержащей других источников энергии, создает ток **I** в другом участке B цепи, то эта же э. д. с., будучи включена в участок B, вызовет в участке A тот же ток **I**. При переносе э. д. с. из одного участка цепи в другой зажимы, к которым она была подключена, должны быть замкнуты накоротко.*

Использование принципа взаимности в ряде случаев существенно облегчает расчет сложных электрических цепей.

Выражения (4-127) и (4-127а) могут быть преобразованы в несколько иные, полезные для расчета формулы. При этом в соответствии с принципом взаимности для определения тока I_2 можно пользоваться либо схемой питания слева (рис. 4-44, *а*), либо схемой питания справа (рис. 4-44, *в*). Вынося в знаменателе формулы (4-127) за скобки Z_2, получим

$$I_2 = \frac{EZ_{св}}{Z_2\left(Z_1 - \frac{Z_{св}^2}{Z_1}\right)} = \frac{EZ_{св}}{Z_2 Z_{вх}}. \quad (4\text{-}128)$$

Если исходить из того, что питание цепи происходит слева, то согласно (4-118)

$$\frac{E}{Z_{вх}} = I_1;$$

поэтому

$$I_2 = \frac{I_1 Z_{св}}{Z_2}. \qquad (4\text{-}129)$$

Теперь в знаменателе (4-127) вынесем за скобки Z_1, тогда

$$I_2 = \frac{EZ_{св}}{Z_1\left(Z_2 - \frac{Z_{св}^2}{Z_1}\right)} = \frac{EZ_{св}}{Z_1 Z_{вых}}. \qquad (4\text{-}130)$$

Эта форма выражения вторичного тока соответствует схеме питания цепи справа. Действительно, согласно (4-126)

$$\frac{E}{Z_{вых}} = I'_1,$$

поэтому

$$I_2 = \frac{I'_1 Z_{св}}{Z_1}. \qquad (4\text{-}131)$$

В дальнейшем в зависимости от постановки задачи будем пользоваться той или иной формулой вторичного тока.

г) Настройка системы связанных контуров

Настройкой системы связанных контуров называется подбор значений параметров контуров, обеспечивающих получение максимального тока I_2 при заданной частоте ω и неизменной э. д. с. E источника питания. Так как активные сопротивления контуров r_1 и r_2, как правило, заданы и не подлежат изменению, процесс настройки сводится к подбору оптимальных значений реактивных параметров системы x_1, x_2 и $x_{св}$.

1. Частные резонансы. Для отыскания условий осуществления настройки контуров обратимся к формулам (4-128) и (4-130). Из этих формул следует, что имеются две основные возможности получения максимального значения тока I_2.

Первая из них заключается в том, что подбором параметров контуров добиваются минимального значения модуля входного сопротивления $Z_{вх} = r_{вх} + jx_{св}$ [см. (4-128)], чего можно достичь, сделав $x_{вх} = 0$.

Такой режим работы системы носит название первого частного резонанса.

Другой метод настройки основан на том, что стремятся получить наименьшую величину выходного сопротивления $Z_{вых} = r_{вых} + jx_{вых}$ [см. (4-130)]. Для этого необходимо, чтобы $x_{вых} = 0$.

Получаемый при этом режим называют вторым частным резонансом.

Условием первого частного резонанса является выполнение равенства

$$x_{вх} = x_1 + x_{вн} = 0. \qquad (4\text{-}132)$$

Это равенство означает, что реактивное сопротивление двухполюсника, эквивалентного входу системы (рис. 4-40, *б*), должно быть равно нулю, т. е. этот двухполюсник должен быть настроен в резонанс.

Учитывая (4-116), получим условие (4-132) в виде

$$x_1 = \frac{x_{св}^2}{z_2^2} x_2. \qquad (4\text{-}133)$$

Настройку на первый частный резонанс производят подбором реактивного сопротивления первичного контура, например, изменением емкости C_1 контура. При этом остальные параметры схемы $x_{св}$ и x_2 остаются неизменными.

Таким образом, при осуществлении первого частного резонанса

$$x_1 = \text{var};$$
$$x_{св} = \text{const}; \quad x_2 = \text{const}.$$

Значение тока I_2, которое может быть при этом достигнуто, найдем, воспользовавшись (4-128). Так как согласно (4-132) входное реактивное сопротивление $x_{вх} = 0$, в формулу (4-128) следует подставить $Z_{вх} = r_{вх} = r_1 + r_{вн}$. Тогда, считая $Z_{св} = jx_{св}$, получим

$$I_2^{\text{I}} = \frac{jx_{св}E}{Z_2(r_1 + r_{вн})}. \qquad (4\text{-}134)$$

Амплитуда вторичного тока

$$I_2^{\text{I}} = \frac{x_{св}E}{z_2(r_1 + r_{вн})} = \frac{x_{св}E}{z_2\left(r_1 + \frac{x_{св}^2}{z_2^2} r_2\right)}. \qquad (4\text{-}135)$$

Условием второго частного резонанса, как было указано, является равенство нулю реактивной составляющей выходного сопротивления:

$$x_{вых} = x_2 + x'_{вн} = 0. \qquad (4\text{-}136)$$

Это означает, что должен быть настроен в резонанс двухполюсник (рис. 4-43), эквивалентный системе связанных контуров, которая рассматривается со стороны точек *2-2*, т. е. при передаче справа налево.

Приняв во внимание (4-125), найдем, что условие (4-136) выполняется, если

$$x_2 = \frac{x_{св}^2}{z_1^2} x_1. \qquad (4\text{-}137)$$

Настройку на второй частный резонанс производят регулировкой реактивного сопротивления x_2, т. е., например, изменением емкости C_2 вторичного контура при неизменных величинах $x_{св}$ и x_1.

Таким образом, при настройке на второй частный резонанс

$$x_2 = \text{var}; \quad x_{св} = \text{const}; \quad x_1 = \text{const}.$$

Достигаемое при этом значение вторичного тока найдем, если в (4-130) подставим $Z_{вых} = r_{вых} = r_2 + r'_{вн}$. Тогда, имея в виду, что $Z_{св} = jx_{св}$, получим

$$\dot{I}_2^{II} = \frac{jx_{св}\dot{E}}{Z_1(r_2 + r'_{вн})}. \qquad (4\text{-}138)$$

Амплитуда вторичного тока

$$I_2^{II} = \frac{x_{св}E}{z_1(r_2 + r'_{вн})} = \frac{x_{св}E}{z_1\left(r_2 + \frac{x_{св}^2}{z_1^2}r_1\right)}. \qquad (4\text{-}139)$$

2. Основной (индивидуальный) резонанс. Особый интерес представляет случай, когда оба контура, будучи уединенными, настроены каждый в резонанс, т. е. $x_1 = x_2 = 0$, а сопротивление связи имеет произвольное неизменное значение: $x_{св} = \text{const}$.

Такой режим работы системы будем называть основным, или индивидуальным, резонансом.

Как видно из (4-133) и (4-137), при основном резонансе оказываются также выполненными условия обоих частных резонансов.

Значение комплексной амплитуды вторичного тока при основном резонансе $\dot{I}_{2р}$ может быть получено из любого выражения для тока $\dot{I}_2$, если в нем положить $x_1 = x_2 = 0$, а, значит, $Z_1 = r_1$; $Z_2 = r_2$.

Считая $Z_{св} = jx_{св}$, найдем, что

$$\dot{I}_{2р} = \frac{jx_{св}\dot{E}}{r_1 r_2 + x_{св}^2} \qquad (4\text{-}140)$$

и амплитуда этого тока

$$I_{2р} = \frac{x_{св}E}{r_1 r_2 + x_{св}^2} = \frac{x_{св}E}{r_2\left(r_1 + \frac{x_{св}^2}{r_2}\right)}. \qquad (4\text{-}141)$$

По величине своей ток $I_{2р}$ значительно превосходит те значения, которые могут быть достигнуты при частных резонансах. Поэтому, если только конструктивные условия допускают, стремятся каждый из контуров индивидуально настраивать на частоту источника.

Для настройки системы на основной резонанс необходимо предварительно настроить первичный контур в отсутствие обратной реакции вторичного контура, для чего последний должен быть или

разомкнут, или резко расстроен. Эта операция производится так же, как в случае одиночного контура: изменением x_1 (например, емкости C_1) добиваются получения максимального тока в первичном контуре.

Далее, замкнув цепь вторичного контура, изменяют реактивное сопротивление x_2 (например, изменением емкости C_2). Когда $x_2 = 0$, т. е. сопротивление z_2 минимально и равно r_2, ток во вторичном контуре достигает максимального значения $I_2 = I_{2р}$. Так как при этом сопротивление, вносимое в первичную цепь, становится максимальным (см. рис. 4-41), первичный ток приобретает минимальное значение $I_1 = I_{1р}$ (рис. 4-45).

Таким образом, об индивидуальной настройке в резонанс вторичного контура можно судить или по максимуму вторичного тока, или по минимуму тока первичного контура.

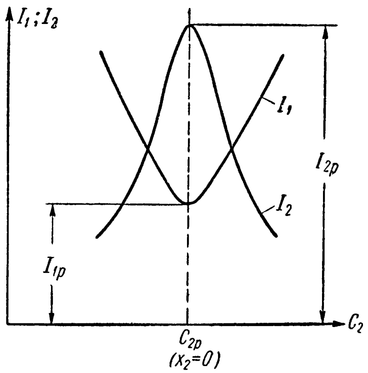


Рис. 4-45. Зависимость токов контуров от емкости вторичного контура.

3. Сложный резонанс. Полученные выражения вторичного тока при частных и основном резонансах показывают, что есть возможность дальнейшего увеличения вторичного тока до некоторого наибольшего (максимум максиморум) значения, если после операций по регулировке величины x_1 или x_2 подобрать наивыгоднейшее значение сопротивления связи $x_{св}$.

Допустим, что в системе осуществлен первый частный резонанс. Обращаясь к формуле (4-135), видим, что сопротивление $x_{св}$ входит как в числитель, так и в знаменатель. Имеется оптимальное значение $x_{св} = x_{св.опт}$, при котором функция $I_2^{I}(x_{св})$ достигает максимума.

Положив производную $\frac{\partial I_2^{I}}{\partial x_{св}} = 0$, найдем, что

$$x_{св.\,опт} = z_2 \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}, \qquad (4\text{-}142)$$

а подставив (4-142) в (4-135), получим значение вторичного тока, достигаемое при подборе наивыгоднейшей связи,

$$I_{2mm} = \frac{E}{2\sqrt{r_1 r_2}}. \qquad (4\text{-}143)$$

Это значение тока I_2 является действительно наибольшим, так как регулировкой реактивных параметров системы оно уже не может быть увеличено.

Точно такой же результат в отношении тока I_2 мы получили бы, если бы предположили, что первоначально был осуществлен не первый частный резонанс, а второй, после чего подобрана наивыгоднейшая связь. Только оптимальное сопротивление связи, которое получается в результате приравнивания нулю производной тока I_2^{II} [см. (4-139)] по $x_{св}$, в этом случае

$$x_{св. опт} = z_1 \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}. \qquad (4\text{-}144)$$

Режим системы, при котором выполнено условие одного из частных резонансов и подобрана наивыгоднейшая связь между контурами, носит название сложного резонанса.

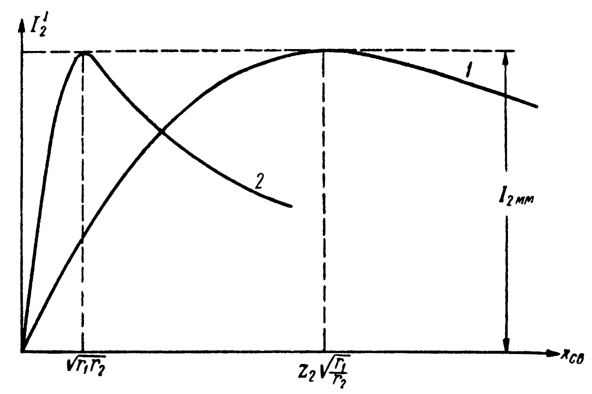


Рис. 4-46. Зависимость тока вторичного контура от сопротивления связи.

Наличие оптимальной связи между контурами легко объясняется следующими физическими соображениями. С увеличением сопротивления связи, с одной стороны, увеличивается напряжение, вводимое первичным током во вторичный контур, $I_1 x_{св}$, однако, с другой стороны, увеличение связи влечет за собой возрастание обратной реакции вторичного контура на первичный. Вследствие этого увеличиваются вносимые сопротивления и должен уменьшаться ток I_1, а стало быть, и напряжение $I_1 x_{св}$. Отсюда следует, что должна иметься наивыгоднейшая связь, при которой ток $I_2 = \frac{I_1 x_{св}}{z}$ достигает максимума.

Изменение тока I_2^I в зависимости от сопротивления связи $x_{св}$ иллюстрируется кривой 1 рис. 4-46.

Условию (4-142) нетрудно придать и такой вид:

$$\frac{x_{св. опт}^2}{z_2^2} r_2 = r_{вн} = r_1, \qquad (4\text{-}145)$$

т. е. вносимое активное сопротивление должно быть равно собственному активному сопротивлению первичного контура.

Принимая во внимание (4-132), условие сложного резонанса системы можем выразить следующим образом: комплекс полного вносимого сопротивления должен быть равен сопряженному комплексу собственного полного сопротивления первичного контура:

$$Z_{вн} = \hat{Z}_1 \qquad (4\text{-}146)$$

или

$$r_{вн} + jx_{вн} = r_1 - jx_1.$$

Рассмотрим теперь тот частный случай, когда в системе осуществлен основной (индивидуальный) резонанс, т. е. $x_1 = x_2 = 0$.

При этом оптимальное сопротивление связи согласно (4-142) или (4-144) будет (так как $z_1 = r_1$ и $z_2 = r_2$)

$$x_{св.\,опт} = \sqrt{r_1 r_2}. \qquad (4\text{-}147)$$

Что касается тока I_2, то он достигнет той же величины I_{2mm} [см. (4-143)]. Однако теперь для этого требуется значительно меньшая связь, так как

$$\frac{x_{св.\,опт.\,р}}{x_{св.\,опт}} = \frac{r_2}{z_2} \ll 1.$$

На рис. 4-46 кривой *2* показана зависимость $I_{2р}(x_{св})$ для индивидуально настроенных контуров.

Таким образом, и с точки зрения необходимой связи между контурами весьма желательно иметь в системе основной резонанс, т. е. индивидуально настраивать каждый из контуров.

Случай сложного резонанса, при котором оба контура индивидуально настроены, называют полным резонансом.

В заключение выведем выражение для оптимального коэффициента связи $k_{опт}$, которое окажется полезным в дальнейшем.

Если колебательный контур близок к резонансу, а именно такой случай представляет для радиотехники наибольший интерес, то индуктивное и емкостное сопротивления элементов контура приближенно равны между собой и равны характеристике контура:

$$x_L \approx x_C \approx \rho.$$

Поэтому выражения для коэффициента связи (4-102), (4-106) могут быть переписаны так:

$$k \approx \frac{x_{св}}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}}, \qquad (4\text{-}148)$$

где ρ_1 и ρ_2 — характеристические сопротивления соответственно первичного и вторичного контуров.

Если же сюда вместо $x_{св}$ подставим (4-147), получим значение оптимального коэффициента связи

$$k_{опт} = \sqrt{\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2}} = \frac{1}{\sqrt{Q_1 Q_2}} = \sqrt{d_1 d_2}, \qquad (4\text{-}149)$$

где $Q_1 = \frac{1}{d_1}$ и $Q_2 = \frac{1}{d_2}$ — добротности контуров.

При идентичных контурах $\left(Q_1 = Q_2 = Q = \frac{1}{d}\right)$

$$k_{опт} = \frac{1}{Q} = d. \qquad (4\text{-}150)$$

Из полученных выражений видно, что оптимальный коэффициент связи тем меньше, чем больше добротности связываемых между собой контуров. Так как добротность радиотехнических контуров имеет величину примерно 100—300, коэффициенты связи обычно исчисляются немногими процентами или долями процента.

д) Энергетические соотношения в системе связанных контуров

Передача энергии через четырехполюсник (систему связанных контуров) сопровождается потерями в активном сопротивлении r_1 первичного контура.

Эффективность передачи энергии характеризуется **коэффициентом полезного действия системы связанных контуров**

$$\eta_к = \frac{P_2}{P_2 + P_1}, \qquad (4\text{-}151)$$

где $P_2 = \frac{1}{2} I_2^2 r_2$ — полезная мощность в активном сопротивлении нагрузки;

$P_1 = \frac{1}{2} I_1^2 r_1$ — мощность, теряемая в активном сопротивлении первичного контура.

Принимая во внимание, что

$$I_2 = \frac{I_1 x_{св}}{z_2},$$

получим

$$P_2 = 0{,}5 I_1^2 \frac{x_{св}^2}{z_2^2} r_2 = 0{,}5 I_1^2 r_{вн}, \qquad (4\text{-}152)$$

т. е. мощность, в действительности расходуемую вторичным током в сопротивлении r_2, можно рассматривать как мощность, выделяемую током I_1 в сопротивлении $r_{вн}$.

Подставляя (4-152) в (4-151), найдем

$$\eta_к = \frac{r_{вн}}{r_1 + r_{вн}} = \frac{1}{1 + \frac{r_1}{r_{вн}}}. \qquad (4\text{-}153)$$

Полученная формула соответствует к. п. д. эквивалентной схемы рис. 4-40, *б*, если полагать, что r_1 — внутреннее сопротивление

источника питания. Коэффициент полезного действия системы связанных контуров определяется только соотношением собственного активного сопротивления первичного контура r_1 и вносимого сопротивления $r_{вн}$. На рис. 4-47 приведена зависимость $\eta_к(r_{вн}/r_1)$. Она показывает, что с точки зрения к. п. д. выгодно всемерно увеличивать отношение $r_{вн}/r_1$, так как при $\frac{r_{вн}}{r_1} \to \infty$ к. п. д. стремится к единице.

Однако, с другой стороны, как было показано, вторичный ток, а стало быть, и полезная мощность $P_2 = 0,5\, I_2^2 r_2$ достигает максимального значения при $r_{вн} = r_1$, когда к. п. д. равен всего лишь 0,5. На рис. 4-47 приведена также и кривая $\frac{P_2}{P_{2макс}}\left(\frac{r_{вн}}{r_1}\right)$, иллюстрирующая это положение.

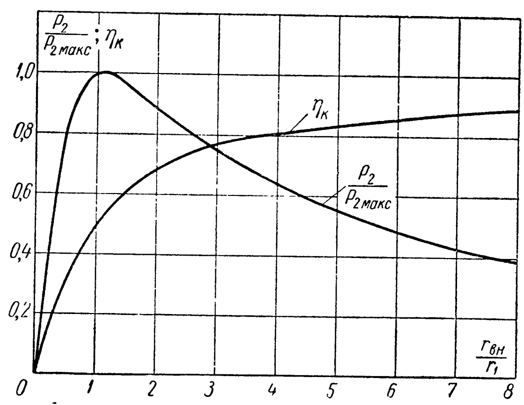


Рис. 4-47. Зависимость полезной мощности и к. п. д. от отношения $r_{вн}/r_1$.

Совершенно аналогичные соотношения были получены нами и для простейшей цепи постоянного тока (§ 2-4), питаемой генератором с заданным внутренним сопротивлением.

Из формулы (4-153) следует, тчо при заданных активных сопротивлениях контуров и неизменной связи коэффициент полезного действия достигает максимального значения, если вторичный контур настроен в резонанс. Действительно, из формулы (4-121) и рис. 4-41 видно, что при настроенном вторичном контуре ($x_2 = 0$) вносимое сопротивление максимально и составляет $r_{вн.\,р} = \frac{x_{св}^2}{r_2}$. Увеличение же $r_{вн}$ обеспечивает возрастание к. п. д. Значит, и с точки зрения получения высокого к. п. д. желательно работать с настроенным вторичным контуром.

Коэффициент полезного действия при $x_2 = 0$

$$\eta_{к.\,р} = \frac{r_{вн.\,р}}{r_1 + r_{вн.\,р}} = \frac{x_{св}^2}{r_1 r_2 + x_{св}^2}. \qquad (4\text{-}154)$$

Дальнейшее увеличение к. п. д. может быть достигнуто путем увеличения $x_{св}$.

Изображенный на рис. 4-40, *б* двухполюсник (в режиме основного резонанса $x_{вн} = 0$ и $x_1 = 0$) имеет добротность

$$Q_н = \frac{\rho_1}{r_1 + r_{вн.\,р}}. \qquad (4\text{-}155)$$

Эта величина представляет собой добротность нагруженного первичного контура, т. е. добротность его с учетом вносимого активного сопротивления.

Нетрудно выразить к. п. д. системы контуров через величину $Q_н$. Умножив числитель и знаменатель (4-154) на ρ_1, получим

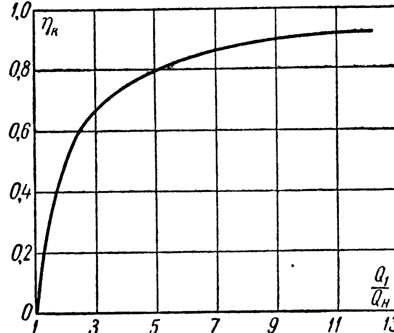


Рис. 4-48. Зависимость $\eta_к\,(Q_1/Q_н)$.

$$\eta_{к.\,р} = Q_н \frac{r_{вн.\,р}}{\rho_1}.$$

Так как согласно (4-155)

$$\frac{r_{вн.\,р}}{\rho_1} = \frac{1}{Q_н} - \frac{1}{Q_1},$$

где $Q_1 = \frac{\rho_1}{r_1}$ — добротность ненагруженного первичного контура, то

$$\eta_{к.\,р} = 1 - \frac{Q_н}{Q_1}. \qquad (4\text{-}156)$$

Часто при проектировании радиотехнических цепей величина добротности нагруженного контура $Q_н$ является заданной. Так, например, для пропускания определенной полосы частот $Q_н$ должна быть не более определенной величины. Формула (4-156) дает возможность в этих условиях разумно выбрать величину Q_1.

Кривая $\eta_к\left(\frac{Q_1}{Q_н}\right)$ на рис. 4-48 построена по формуле (4-156). Как видно из этой кривой, увеличение $Q_1/Q_н$ сверх значения порядка 8—10 незначительно сказывается на к. п. д. системы. Следовательно, если $Q_н$ задано, то стремиться к увеличению добротности контура свыше $Q_1 \approx (8 \div 10) Q_н$ практически не имеет смысла.

Выбор значения Q_1 при заданных $Q_н$ и $\eta_{к.\,р}$ может быть произведен по формуле

$$Q_1 = \frac{Q_н}{1 - \eta_{к.\,р}}, \qquad (4\text{-}157)$$

полученной из (4-156).

4-7. Частотные характеристики системы связанных колебательных контуров

Изучение частотных свойств системы связанных контуров имеет большое значение, так как оно дает возможность судить о полосе частот, пропускаемых системой, и о равномерности амплитуды колебаний в полосе пропускания.

Поставим перед собой цель исследования зависимости тока вторичного контура от частоты воздействия $I_2(\omega)$.

а) Графическое исследование

Амплитуда вторичного тока находится в прямой зависимости от тока первичного контура $\left(I_2 = \frac{I_1 x_{св}}{z_2}\right)$. Последний же при заданной э. д. с. источника E определяется входным сопротивлением $Z_{вх}$.

Поэтому средоточим прежде всего внимание на частотной зависимости $z_{вх}(\omega)$.

Модуль полного входного сопротивления

$$z_{вх} = \sqrt{r_{вх}^2 + x_{вх}^2} = \sqrt{(r_1 + r_{вн})^2 + (x_1 + x_{вн})^2}.$$

Найдем функции $r_{вх}(\omega)$ и $x_{вх}(\omega)$ и представим их в виде графиков.

Для простоты полагаем, что резонансные частоты обоих контуров равны между собой:

$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \omega_0.$$

Зависимость активного вносимого сопротивления от относительной расстройки была уже рассмотрена выше [формула (4-119) и рис. 4-41]. Если считать, что собственное активное сопротивление первичного контура r_1 от частоты не зависит, то $r_{вх} = r_1 + r_{вн}$ будет зависеть от частоты так, как это показано на рис. 4-49, *а*.

Реактивное входное сопротивление $x_{вх}$ состоит из двух слагаемых x_1 и $x_{вн}$. Оба они зависят от частоты.

Собственное реактивное сопротивление

$$x_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \approx 2\rho_1 \frac{\Delta\omega}{\omega_0}.$$

При малых расстройках x_1 изменяется в зависимости от частоты практически по прямой линии (рис. 4-49, *б*). Что касается вносимого сопротивления $x_{вн}$, то его зависимость от частоты была изучена ранее [формула (4-120) и рис. 4-41].

На рис. 4-49, *б* нанесены кривые x_1, $x_{вн}$ и $x_{вх} = x_1 + x_{вн}$ в зависимости от частоты ω.

Очень важно обратить внимание на то, что результирующее реактивное сопротивление обращается в нуль при частоте индивидуальной настройки контуров ω_0, а также при частотах $\omega_{II_p} > \omega_0$ и $\omega_{I_p} < \omega_0$. Новые резонансные частоты, появившиеся в системе благодаря взаимной связи контуров, называются **частотами связи**. Бóльшая из них ω_{II_p} носит название **быстрой частоты связи**; меньшая ω_{I_p} — **медленной частоты связи**.

Полное входное сопротивление $z_{вх}$ (рис. 4-49, *в*) получается как геометрическая сумма $r_{вх}$ и $x_{вх}$.

Резонанс, наблюдаемый при частоте ω_0, очевидно, аналогичен резонансу параллельного контура: реактивное сопротивление $x_{вх}$ равно нулю, а вносимое активное сопротивление достигает максимума. Поэтому входное активное сопротивление и равное ему при $\omega = \omega_0$ полное входное сопротивление $z_{вх}$ оказываются относительно большими:

$$z_{вх.\,р} = r_{вх.\,р} = \frac{x_{св}^2}{r_2} + r_1.$$

Следовательно, входная проводимость $y_{вх}$ и пропорциональный ей первичный ток $I_1 = y_{вх}E$ (рис. 4-49, *г*) имеют при частоте ω_0 относительно малые величины: $y_{вх} = y_{вх.р}$ и $I_{1р} = y_{вх.р}\,E$.

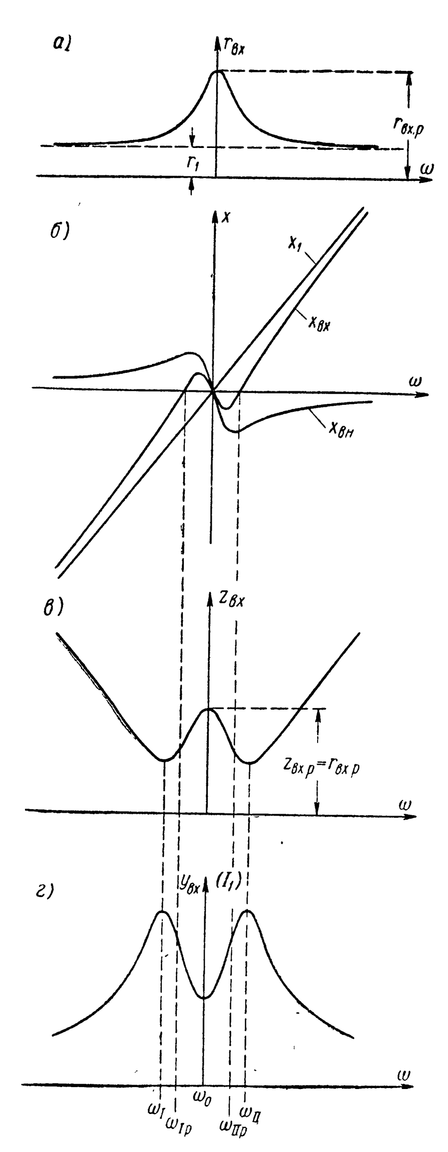


Рис. 4-49. Частотные характеристики первичного контура.

При небольшом отклонении частоты источника от ω_0 величина входного реактивного сопротивления $x_{вх}$ изменяется незначительно, в то время как активная составляющая входного сопротивления $r_{вх}$ резко уменьшается. В результате в этой области частот $z_{вх}$ падает. При значительных расстройках $|x_{вх}|$ растет почти так же, как x_1, а $r_{вх}$ почти не изменяется. Следствием этого является возрастание $z_{вх}$. Из сказанного очевидно, что, как показывает рис. 4-49, *в* и *г*, кривая $z_{вх}(\omega)$ при некоторых частотах, лежащих «по бокам» от ω_0, имеет два минимума, а кривая $I_1(\omega)$ — два максимума.

Итак, резонансная кривая первичного контура, связанного со вторичным, имеет характерную д в у г о р б у ю форму.

Частоты экстремальных значений первичного тока ω_I и ω_{II} и частоты (резонансные), при которых входное реактивное сопротивление обращается в нуль ($\omega_{Iр}$ $\omega_{IIр}$), несколько отличаются друг от друга, как это видно на рис. 4-49. Однако это различие невелико и обычно с достаточной степенью точности считают эти частоты совпадающими ($\omega_I \approx \omega_{Iр}$; $\omega_{II} \approx \omega_{IIр}$).

Появление в системе двух новых резонансных частот (волн) носит название д в у в о л н и с т о с т и, или д в у г о р б о с т и.

Напомним, что цепи, обладающие рядом резонансных частот, встречались нам уже ранее — при изучении сложных реактивных двухполюсников. Система двух связанных контуров, если считать их свободными от потерь,

также может рассматриваться как частный случай сложного реактивного двухполюсника.

Обратимся, например, к схеме с индуктивной связью (рис. 4-36, *а*) и, пренебрегая активными сопротивлениями, изобразим ее в виде двух последовательно соединенных двухполюсников (рис. 4-50) с входными сопротивлениями x' и x''.

Первый из них представляет собой последовательный контур L'_1, C_1, резонансная частота которого $\omega' = \frac{1}{\sqrt{L'_1 C_1}}$ несколько больше общей для обоих контуров резонансной частоты

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L'_1 + L_{св}) C_1}} = \frac{1}{\sqrt{(L'_2 + L_{св}) C_2}}.$$

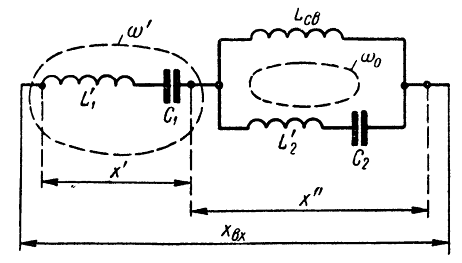


Рис. 4-50. Реактивный двухполюсник, эквивалентный системе связанных контуров.

На рис. 4-51 представлена зависимость $x'(\omega)$.

Второй двухполюсник является колебательным контуром II вида. Его частотная характеристика, как было показано в § 4-5, имеет вид рис. 4-34. На рис. 4-51 она изображена в виде графика $x''(\omega)$.

По отношению к входным зажимам система представляет собой сложный реактивный двухполюсник, сопротивление которого $x_{вх} = x' + x''$. В результате суммирования ординат кривых $x'(\omega)$ и $x''(\omega)$ получена кривая $x_{вх}(\omega)$ рис. 4-51. Она свидетельствует о том, что система действительно обладает тремя резонансными частотами: ω_I, ω_0 и ω_{II}. Нули и полюсы характеристики чередуются. После первого внешнего полюса $\omega = 0$ следует: нуль $\omega = \omega_I$, полюс $\omega = \omega_0$, нуль $\omega = \omega_{II}$ и второй внешний полюс $\omega = \infty$.

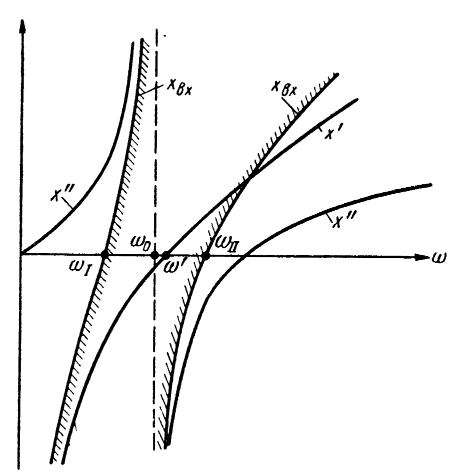


Рис. 4-51. Частотные характеристики двухполюсника рис. 4-50.

Допустим теперь, что коэффициент связи между контурами увеличен по сравнению с тем, для которого построены кривые рис. 4-49.

Сопротивление $Z_{вх.р} = r_{вх.р}$ возрастает, поэтому впадина в двугорбой кривой становится более глубокой (рис. 4-52, *а*). Далее, хотя кривая x_1 остается неизменной, ординаты кривой $x_{вн}$ по абсолютной величине становятся бо́льшими. Поэтому частоты связи сильнее отличаются от частоты ω_0. Итак, с увеличением связи двуволнистость проявляется более резко; частоты связи раздвигаются по шкале частот.

Наоборот, при очень слабой связи (рис. 4-52, *б*) сопротивление $r_{вн} \ll r_1$, поэтому $r_{вх} \approx r_1$. Реактивное вносимое сопротивление также очень мало. Вследствие этого кривая $x_{вх}$ пересекает ось частот только в одной точке: $\omega = \omega_0$. Двугорбости в кривой I_1 не наблюдается. Только верхушка кривой становится более плоской. Однако, если бы можно было при той же связи уменьшить активное сопротивление вторичного контура r_2, т. е. повысить добротность контура, то характеристика $x_{вн}$ пошла бы так, как показано пункти-

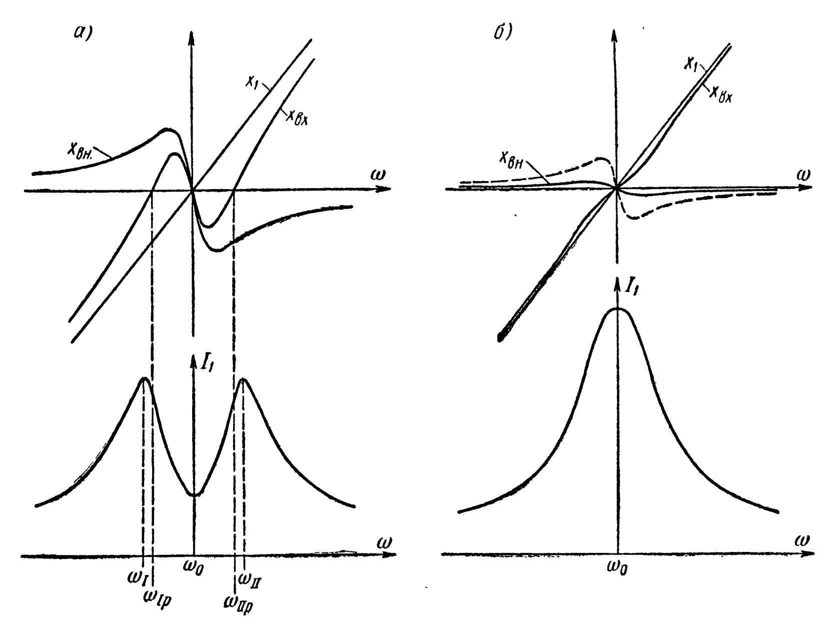


Рис. 4-52. Частотные характеристики первичного контура при сильной (*а*) и слабой (*б*) связи.

ром на рис. 4-52, *б*. Очевидно, что при этом вновь оказалось бы возможным получение двугорбой кривой резонанса.

Из всего сказанного должно быть ясно, что двуволнистость в первичном контуре наблюдается не при любом коэффициенте связи, а только в том случае, когда коэффициент связи превосходит некоторую определенную величину. Эту величину можно назвать **первичным критическим коэффициентом связи**. Он зависит от добротности вторичного контура, уменьшаясь с ее увеличением. В пределе, если вторичный контур свободен от потерь, первичный критический коэффициент связи равен нулю, т. е. двуволнистость имеет место при сколь угодно малой связи.

Рассмотрим теперь форму резонансной характеристики вторичного тока.

Для того чтобы иметь возможность наглядно сравнить ее с подобной же характеристикой первичного тока, представим резонансную кривую тока I_2 в относительных величинах $\frac{I_2}{I_{2р}}(\omega)$, где $I_{2р}$ — вторичный ток при $\omega = \omega_0$, Имеем

$$I_2 = \frac{I_1 x_{св}}{z_2}, \quad I_{2р} = \frac{I_{1р} x_{св}}{r_2}.$$

Отсюда

$$\frac{I_2}{I_{2р}} = \frac{I_1}{I_{1р}} \cdot \frac{r_2}{z_2}.$$

Таким образом, частотная характеристика нормированного вторичного тока представляет собой произведение ординат двух графиков: резонансной характеристики тока первичного контура

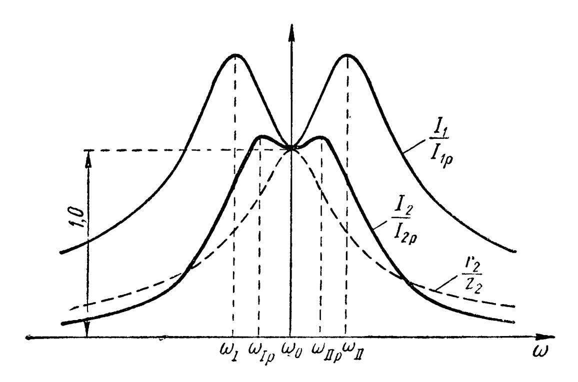


Рис. 4-53. Резонансная характеристика вторичного тока.

$\frac{I_1}{I_{1р}}(\omega)$ и кривой резонанса одиночно взятого вторичного контура $\frac{r_2}{z_2}(\omega)$.

На рис. 4-53 приведены обе эти зависимости, а также график произведения их ординат. В полосе частот $\omega_I < \omega < \omega_{II}$ кривые, ординаты которых перемножаются, имеют крутизну разных знаков, поэтому верхняя часть характеристики $\frac{I_2}{I_{2р}}(\omega)$ получается более плоской, чем у $\frac{I_1}{I_{1р}}(\omega)$. При частотах же $\omega > \omega_{II}$ и $\omega < \omega_I$ знаки крутизны функции $\frac{I_1}{I_{1р}}(\omega)$ и $\frac{r_2}{z_2}(\omega)$ совпадают, поэтому I_2 спадает весьма резко. Частоты, соответствующие максимумам I_2, равны частотам связи $\omega_{Iр}$ и $\omega_{IIр}$, при которых $x_{вх} = 0$.

Из этих рассуждений следует, что двуволнистость во вторичном контуре проявляется менее резко, чем в первичном контуре. В част-

ности, при некоторой связи между контурами может случиться, что первичный ток изменяется по двугорбой кривой, а во вторичном токе двуволнистости не наблюдается. Стало быть, вторичный критический коэффициент связи, определяющий двуволнистость вторичного тока, больше, чем первичный критический коэффициент. Он, очевидно, зависит от величин добротности обоих контуров.

Форма резонансной кривой вторичного тока при достаточно сильной связи контуров приближается к прямоугольной, что во многих случаях весьма желательно. В этом заключается основная причина широкого применения связанных систем, в частности в радиоприемных устройствах.

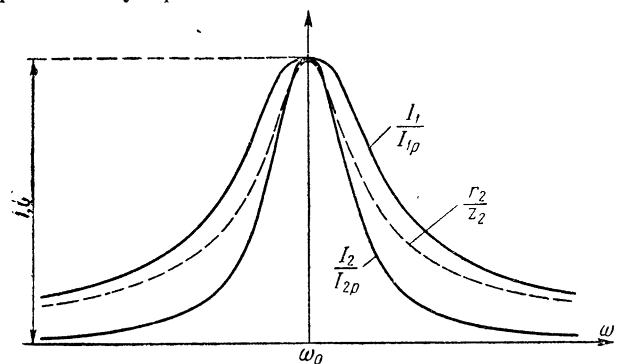


Рис. 4-54. Частотные характеристики при очень слабой связи.

При слабой связи, когда коэффициент связи меньше, чем первичный критический коэффициент, частотные кривые имеют вид рис. 4-54. В этом случае резонансная характеристика вторичного тока получается более острой (полоса пропускания меньшей), чем в том случае, когда вторичный контур питается непосредственно от внешней э. д. с.

Высказанные качественные соображения находят свое подтверждение в количественном анализе частотных характеристик.

б) Уравнения частотных характеристик

Ограничимся выводом уравнения частотной характеристики амплитуды вторичного тока как представляющей наибольший интерес.

По существу говоря, любое из выражений тока вторичного контура, например (4-127), дает искомую зависимость I_2 от частоты. Однако в таком виде выражение (4-127) ненаглядно и малоудобно для анализа. Преобразуем это уравнение, полагая, что резонансные частоты связанных контуров одинаковы:

$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}} = \omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}} = \omega_0.$$

Добротности контуров различны: $Q_1 \neq Q_2$.

Полные сопротивления контуров согласно (4-27) могут быть представлены так:

$$Z_1 = r_1(1 + j\xi_1), \quad Z_2 = r_2(1 + j\xi_2),$$

где ξ_1 и ξ_2 — обобщенные расстройки первого и второго контуров соответственно.

Подставив эти выражения в (4-127) и имея в виду, что $Z_{св} = jx_{св}$, получим

$$I_2 = \frac{j\frac{x_{св}}{r_1 r_2}E}{(1 + j\xi_1)(1 + j\xi_2) + \frac{x_{св}^2}{r_1 r_2}} = jE\frac{\frac{x_{св}}{r_1 r_2}}{1 - \xi_1\xi_2 + \frac{x_{св}^2}{r_1 r_2} + j(\xi_1 + \xi_2)}. \quad (4\text{-}158)$$

От частоты источника зависят величины ξ_1, ξ_2 и $x_{св}$. Однако в небольшой области частот, примыкающей к $\omega = \omega_0$, сопротивление связи изменяется незначительно. Поэтому в дальнейшем можно полагать $x_{св}$ не зависящим от частоты; тогда частота источника будет определять только величины ξ_1 и ξ_2, причем в соответствии с (4-29)

$$\xi_1 = Q_1\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \approx Q_1\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = Q_1\gamma,$$

$$\xi_2 = Q_2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \approx Q_2\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = Q_2\gamma.$$

Здесь

$$\gamma = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \approx 2\frac{\Delta\omega}{\omega_0}. \quad (4\text{-}159)$$

Если принять во внимание (4-148), можно заметить, что входящая в (4-158) величина

$$\frac{x_{св}}{\sqrt{r_1 r_2}} = \frac{x_{св}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\sqrt{\frac{\rho_1\rho_2}{r_1 r_2}} \approx k\sqrt{Q_1 Q_2};$$

далее, согласно (4-143)

$$\frac{E}{\sqrt{r_1 r_2}} = 2I_{2mm}.$$

С учетом этих замечаний уравнение (4-158) приводится к виду:

$$I_2 = jI_{2mm}\frac{2k\sqrt{Q_1 Q_2}}{1 + Q_1 Q_2(k^2 - \gamma^2) + j(Q_1 + Q_2)\gamma}, \quad (4\text{-}160)$$

откуда

$$\frac{I_2}{I_{2mm}} = \frac{2k\sqrt{Q_1 Q_2}}{\sqrt{[1 + Q_1 Q_2(k^2 - \gamma^2)]^2 + (Q_1 + Q_2)^2\gamma^2}}. \quad (4\text{-}161)$$

Это выражение и представляет собой уравнение амплитудно-частотной характеристики, определяющее величину тока I_2 в долях тока максимум максиморум как функцию параметра γ, в который

входит частота. Как и следовало ожидать, форма характеристики зависит лишь от коэффициента связи k и добротностей контуров Q_1 и Q_2.

При частоте $\omega = \omega_0$, т. е. при $\gamma = 0$, ток

$$I_{2p} = I_{2mm} \frac{2k \sqrt{Q_1 Q_2}}{1 + k^2 Q_1 Q_2}. \quad (4\text{-}162)$$

Поделив (4-161) на (4-162), получим уравнение резонансной характеристики в относительных единицах:

$$\frac{I_2}{I_{2p}} = \frac{1 + k^2 Q_1 Q_2}{\sqrt{[1 + Q_1 Q_2 (k^2 - \gamma^2)]^2 + (Q_1 + Q_2)^2 \gamma^2}}. \quad (4\text{-}163)$$

Обследуем, при каких частотах, т. е. при каких значениях параметра γ, вторичный ток принимает экстремальные значения. С этой целью продифференцируем по γ подкоренное выражение в формулах (4-161) и (4-163) и приравняем производную нулю. В результате получим

$$\gamma \left\{ (Q_1 + Q_2)^2 - 2Q_1 Q_2 [1 + (k^2 - \gamma^2) Q_1 Q_2] \right\} = 0.$$

Это уравнение имеет три решения. Первое из них

$$\gamma_0 = 0 \quad \text{или} \quad \omega = \omega_0$$

соответствует максимуму резонансной кривой при отсутствии двугорбости или впадине двугорбой кривой, если система двуволниста.

Остальные два решения получаются после приравнивания нулю выражения, стоящего в фигурных скобках. В результате найдем

$$\gamma^2_{\mathrm{I,\,II}} = k^2 - \frac{Q_1^2 + Q_2^2}{2Q_1^2 Q_2^2}.$$

Обозначим

$$\sqrt{\frac{Q_1^2 + Q_2^2}{2Q_1^2 Q_2^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{Q_1^2} + \frac{1}{Q_2^2}\right)} = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2}{2}} = k_{\text{кр}}. \quad (4\text{-}164)$$

Тогда

$$\gamma^2_{\mathrm{I,\,II}} = k^2 - k^2_{\text{кр}}$$

и

$$\gamma_{\mathrm{I,\,II}} = \pm \sqrt{k^2 - k^2_{\text{кр}}}. \quad (4\text{-}165)$$

Если $k < k_{\text{кр}}$, т. е. если коэффициент связи меньше некоторой критической величины, то решение (4-165) получается мнимым, не имеющим физического смысла. В этом случае есть лишь одна частота $\omega = \omega_0$, при которой ток I_2 максимален; система одноволниста.

Если же $k > k_{\text{кр}}$, то имеются дополнительные частоты $\omega_{\mathrm{I}p}$ и $\omega_{\mathrm{II}p}$ (соответствующие величинам γ_{I} и γ_{II}), при которых I_2 приобретает наибольшее значение. Это — знакомые нам частоты связи.

Величина $k_{кр}$, очевидно, представляет собой **вторичный критический коэффициент связи**, о котором уже говорилось.[1] Как видно из (4-164), $k_{кр}$ определяется только значениями добротности контуров Q_1 и Q_2.

Имея в виду, что $\gamma = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$, получим на основании (4-165) значения частот связи

$$\omega_{Iр} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \sqrt{k^2 - k_{кр}^2}}}, \qquad (4\text{-}166)$$

$$\omega_{IIр} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \sqrt{k^2 - k_{кр}^2}}}.$$

Как и следовало ожидать, одна из частот связи $\omega_{IIр}$ несколько больше, чем частота первоначальной настройки ω_0, а вторая $\omega_{Iр}$ — несколько ниже ω_0. Чем больше коэффициент связи, тем сильнее отличаются $\omega_{Iр}$ и $\omega_{IIр}$ друг от друга и от ω_0.

Если $k \gg k_{кр}$, приближенные выражения для частот связи принимают вид

$$\omega_{Iр} \approx \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}, \qquad \omega_{IIр} \approx \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}. \qquad (4\text{-}167)$$

Часто в радиотехнических устройствах применяются связанные системы, в которых использованы идентичные колебательные контуры. Такие контуры имеют не только одинаковые резонансные частоты, но и равные добротности:

$$\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0; \quad Q_1 = Q_2 = Q.$$

В этом весьма важном случае приведенные выше формулы существенно упрощаются.

Для критического коэффициента связи вместо (4-164) получим

$$k_{кр} = \frac{1}{Q} = d. \qquad (4\text{-}168)$$

Сопоставляя это с (4-150), убеждаемся, что

$$k_{кр} = k_{опт},$$

т. е. при связи идентичных контуров критический и оптимальный коэффициенты связи численно совпадают.

Найдем значение вторичного тока для случая связи контуров, имеющих одинаковые резонансные частоты и равные добротности. Из (4-161) получим

$$\frac{I_2}{I_{2mm}} = \frac{2kQ}{\sqrt{[1 + Q^2(k^2 - \gamma^2)]^2 + 4Q^2\gamma^2}} = \frac{2kQ}{\sqrt{[1 + Q^2k^2 - \xi^2]^2 + 4\xi^2}}. \qquad (4\text{-}169)$$

[1] В дальнейшем, называя этот коэффициент, будем опускать слово «вторичный».

Здесь $\xi = Q\gamma$ — обобщенная расстройка.

При резонансной частоте ($\omega = \omega_0$), т. е. при $\gamma = \xi = 0$,

$$\frac{I_{2р}}{I_{2mm}} = \frac{2kQ}{1 + k^2Q^2}. \qquad (4\text{-}170)$$

Уравнение нормированной относительно тока $I_{2р}$ характеристики найдем, поделив (4-169) на (4-170)

$$\frac{I_2}{I_{2р}} = \frac{1 + k^2Q^2}{\sqrt{[1 + Q^2(k^2 - \gamma^2)]^2 + 4Q^2\gamma^2}} = \frac{1 + k^2Q^2}{\sqrt{[1 + k^2Q^2 - \xi^2]^2 + 4\xi^2}}. \qquad (4\text{-}171)$$

Прежде чем изображать графически семейство частотных характеристик $\frac{I_2}{I_{2mm}}(\xi)$ при разных величинах связи, определим некоторые характерные точки этих кривых.

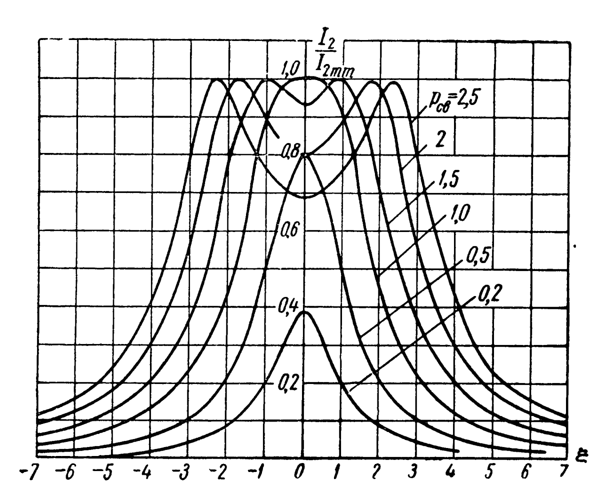


Рис. 4-55. Частотные характеристики системы связанных контуров.

Максимальное значение тока в «горбах» резонансных двугорбых характеристик $I_{2г}$ найдем, подставив в формулу (4-169) условие получения максимума $I_{2р}$ [см. (4-165)]

$$k^2 - \gamma^2 = k^2_{кр} = \frac{1}{Q^2};$$

получим

$$I_{2г} = I_{2mm};$$

при любом коэффициенте связи $k > k_{кр}$ ток в «горбах» резонансной кривой равен току максимум максиморум.

Если коэффициент связи равен критическому значению $\left(k = k_{кр} = \frac{1}{Q}\right)$, уравнение для I_2 принимает вид

$$(I_2)_{k=k_{кр}} = \frac{I_{2mm}}{\sqrt{1 + \frac{Q^2\gamma^2}{4}}} = \frac{I_{2mm}}{\sqrt{1 + \frac{\xi^2}{4}}}. \qquad (4\text{-}172)$$

Отсюда видно, что при критической связи кривая резонанса имеет один горб и максимальное значение I_2 при $\omega = \omega_0$ (т. е. $\gamma = \xi = 0$) равно I_{2mm}.

На рис. 4-55 приведены кривые частотных характеристик, рассчитанные по приведенным выше формулам. Они построены в обобщенных координатах. По оси ординат отложен вторичный ток, нормированный относительно тока максимум максиморум, I_2/I_{2mm}, а по оси абсцисс — обобщенная расстройка $\xi = Q\gamma \approx 2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$.

Параметром для семейства кривых является величина

$$p_{св} = \frac{k}{k_{кр}} = kQ,$$

называемая часто **параметром связи**.

Кривые наглядно подтверждают все высказанные соображения. Полезно сравнить эти кривые с аналогичной характеристикой одиночного контура (см. рис. 4-9).

в) Полоса пропускания системы связанных колебательных контуров

Говоря о полосе пропускания системы связанных контуров, можно сохранить для этого понятия то же определение, которым мы пользуемся в случае одиночного колебательного контура, а именно, полосой пропускания условно называть область частот, на границах которой отклик составляет не менее $1/\sqrt{2}$ от своего максимального значения. Однако при этом надо учитывать характерные особенности формы резонансных кривых двухконтурной системы.

Рассмотрим сначала случай связи, большей критической ($p_{св} > 1$), когда кривая резонанса тока вторичного контура двугорба, но впадина составляет величину большую, чем $\frac{1}{\sqrt{2}} I_{mm}$ (рис. 4-56, *а*)[1].

Так как

$$\xi = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q,$$

значения обобщенной расстройки, соответствующие границам полосы пропускания, будут определяться выражением

$$|\xi_0| = \frac{\Delta\omega_к}{\omega_0} Q. \qquad (4\text{-}173)$$

[1] Имеется в виду, что контуры идентичны ($\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$; $Q_1 = Q_2 = Q$).

Для рассматриваемого случая величина ξ_0 может быть найдена из (4-169), если считать в этой формуле $\frac{I_2}{I_{2mm}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

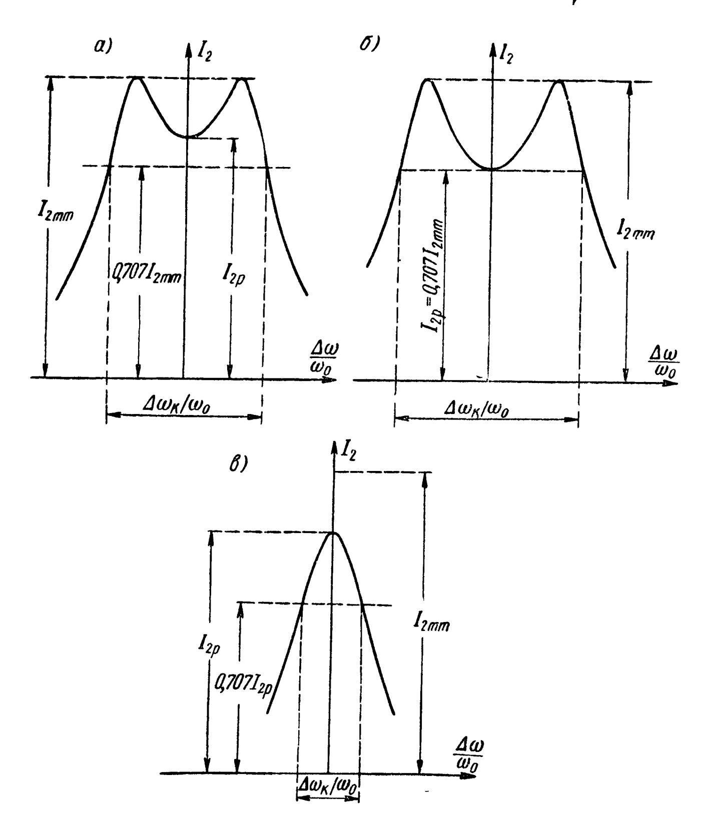


Рис. 4-56. К расчету полосы пропускания системы связанных контуров.

Приняв во внимание, что $kQ = p_{св}$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2p_{св}}{\sqrt{(1 + p_{св}^2 - \xi_0^2)^2 + 4\xi_0^2}}.$$

Решив уравнение относительно ξ_0^2 и сохраняя решения (положительные), имеющие физический смысл, найдем

$$\xi_0^2 = p_{св}^2 + 2p_{св} - 1$$

или

$$\frac{\Delta\omega_к}{\omega_0} Q = |\xi_0| = \sqrt{p_{св}^2 + 2p_{св} - 1}. \qquad (4\text{-}174)$$

Формулой (4-174), определяющей зависимость полосы пропускания от степени связи и справедливой для $p_{св} \geqslant 1$, можно пользоваться, пока ток во впадине $\frac{I_{2р}}{I_{2mm}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$.

Действительно, при более глубокой впадине в форме частотной характеристики неравномерность отклика становится настолько большой, что само понятие полосы пропускания теряет смысл.

Предельное значение $p_{св} = p_{св.пр}$, при котором $\frac{I_{2р}}{I_{2mm}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx$ $\approx 0{,}707$ (рис. 4-56, *б*), можно найти из формулы (4-170), приравняв в ней левую часть 0,707. Произведя расчет, получим

$$(kQ)_{пр} = p_{св.\,пр} = 2{,}41.$$

Подставив это значение параметра связи в (4-174), найдем, что полоса пропускания

$$\left(\frac{\Delta\omega_к}{\omega_0}\right)_{пр} = \frac{3{,}1}{Q} = 3{,}1d,$$

т. е. в 3,1 раза больше, чем у одиночно взятого колебательного контура.

Из формулы (4-174) можно также найти полосу пропускания для случая связи, равной критической, когда кривая резонанса одногорба и имеет несколько уплощенную верхнюю часть. Подставляя в (4-174) $p_{св} = 1$, получим

$$\left(\frac{\Delta\omega_к}{\omega_0}\right)_{кр} = \frac{\sqrt{2}}{Q} = \sqrt{2}d;$$

полоса пропускания оказывается в $\sqrt{2}$ большей, чем у одиночного контура.

Для определения полосы пропускания при работе со связью, меньшей критической ($p_{св} < 1$) формула (4-174) непригодна, так как максимальная величина I_2 в этом случае равна не I_{2mm}, а $I_{2р}$ (рис. 4-56, *в*). Расчет полосы пропускания должен производиться по формуле (4-171), в левую часть которой следует подставлять $\frac{I_2}{I_{2р}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. В результате получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 + p_{св}^2}{\sqrt{(1 + p_{св}^2 - \xi_0^2)^2 + 4\xi_0^2}}.$$

Решив это уравнение относительно ξ_0^2 (сохраняем только решения, дающие положительные значения ξ_0^2), найдем

$$\xi_0^2 = \sqrt{2(1 + p_{св}^4)} - (1 - p_{св}^2)$$

или

$$|\xi_0| = \sqrt{\sqrt{2(1 + p_{св}^4)} - (1 - p_{св}^2)}\,. \qquad (4\text{-}175)$$

В предельном случае очень слабой связи ($p_{св} \to 0$) величина

$$\left| \xi_0 \right|_{p_{св} \to 0} = 0{,}64$$

и

$$\left(\frac{\Delta\omega_к}{\omega_0}\right)_{p_{св} \to 0} = \frac{0{,}64}{Q} = 0{,}64d.$$

Следовательно, при очень слабой связи полоса пропускания составляет приблизительно 0,64 полосы одиночного контура.

На рис. 4-57 представлена кривая зависимости относительной полосы пропускания (увеличенной в Q раз) от параметра связи $p_{св}$. Часть кривой, соответствующая $p_{св} \leqslant 1$, рассчитана по (4-175).

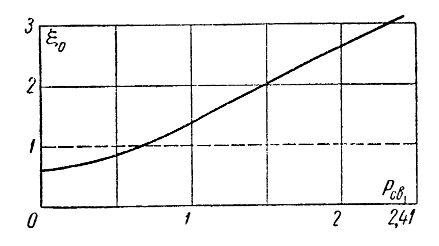


Рис. 4-57. Зависимость полосы пропускания от параметра связи.

Для значений $p_{св}$, лежащих в пределах $1 \leqslant p_{св} \leqslant 2{,}41$, расчет величины $|\xi_0|$ произведен по формуле (4-174).

Если параметр связи $p_{св} > 2{,}41$, то, как указано, понятие полосы пропускания теряет смысл.

Пунктирная прямая, проведенная на рис. 4-57 на уровне $\xi_0 = 1$, соответствует полосе пропускания одиночного контура.

Когда коэффициент связи между контурами составляет 0,68 от критического, полоса пропускания двухконтурной системы не отличается от полосы одиночного контура. Для более сильной связи ($p_{св} > 0{,}68$) система связанных контуров имеет более широкую полосу, чем одиночный контур, а при $p_{св} < 0{,}68$ — более узкую.

г) Частоты связи контуров, имеющих различные резонансные частоты

Тот случай, когда контуры предварительно, до связи их между собой, настроены на разные частоты ($\omega_{01} \neq \omega_{02}$), рассмотрим упрощенно, считая, что контуры не имеют потерь, т. е. $r_1 = r_2 = 0$. Так как согласно этому допущению $Q_1 = Q_2 = \infty$, критические коэффициенты связи равны нулю, т. е. двуволнистость имеет место при сколь угодно малой связи.

Ограничимся нахождением частот связи для рассматриваемого случая, воспользовавшись условием, что при этих частотах

$$x_{вх} = x_1 + x_{вн} = 0.$$

Согласно (4-116)

$$x_{вн} = -\frac{x_{св}^2}{z_2^2} x_2,$$

но при $r_2 = 0$ сопротивление $z_2 = x_2$, поэтому

$$x_{вн} = -\frac{x_{св}^2}{x_2}.$$

Формула для нахождения частот связи приобретает вид:

$$x_1 - \frac{x_{св}^2}{x_2} = 0$$

или

$$x_1 x_2 = x_{св}^2. \qquad (4\text{-}176)$$

Примем для определенности, что связь между контурами индуктивная (трансформаторная), т. е. $x_{св} = \omega M$. Тогда, учитывая, что

$$x_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \quad и \quad x_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2},$$

вместо (4-176) получим

$$\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right) = \omega^2 M^2$$

или

$$\left(\omega^2 - \frac{1}{L_1 C_1}\right)\left(\omega^2 - \frac{1}{L_2 C_2}\right) = \frac{\omega^4 M^4}{L_1 L_2}.$$

Так как

$$\frac{M^2}{L_1 L_2} = k^2; \quad \frac{1}{L_1 C_1} = \omega_{01}^2; \quad \frac{1}{L_2 C_2} = \omega_{02}^2,$$

то уравнение для определения частот запишется так[1]:

$$(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2) = k^2 \omega^4. \qquad (4\text{-}177)$$

Решение этого уравнения дает

$$\omega_{I,\,II} = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 \mp \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4\omega_1^2 \omega_2^2 (1 - k^2)}}{2(1 - k^2)}}. \qquad (4\text{-}178)$$

Полученное выражение для частот связи громоздко и ненаглядно. Поэтому результаты расчета по формуле (4-178) целесообразно представить в виде графика рис. 4-58; величины по координатным осям его отложены в относительных единицах. По оси абсцисс нанесено отношение резонансных частот контуров ω_2/ω_1, по оси ординат — отношение быстрой частоты связи к резонансной частоте первичного контура $\frac{\omega_{II}}{\omega_1} > 1$, а также отношение медленной частоты связи к резонансной частоте первичного контура $\frac{\omega_I}{\omega_1} < 1$. Параметром семейства кривых является коэффициент связи k.

График включает в себя как частный случай частоты связи идентичных контуров ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$), рассчитанные выше [формулы (4-167)]. Эти формулы для контуров без потерь являются точными.

Вертикальная прямая, проведенная через точку оси абсцисс $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1$, пересекает кривые графика в точках, находимых из формул (4-167). Для каждого k получается одна пара точек пересечения с кривыми, определяющая ω_I и ω_{II}. С увеличением связи эти точки все более раздвигаются, с уменьшением связи — сближаются и при $k = 0$ сливаются в одну точку с координатами *1,1*.

Представим себе теперь, что контуры сильно расстроены относительно друг друга, например, ω_2 вдвое больше, чем ω_1.

---

[1] В дальнейшем резонансные частоты контуров будем обозначать ω_1 и ω_2 без индекса «0», а частоты связи ω_I и ω_{II} без индекса «р».

Для $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 2$ из графика находим частоты связи при заданном k; для быстрой частоты связи получаем $\frac{\omega_{II}}{\omega_1} > 2$ и для медленной частоты $\frac{\omega_I}{\omega_1} < 1$.

Таким образом, быстрая частота связи всегда больше наибольшей из резонансных частот контуров, а медленная частота связи — меньше наименьшей.

Неограниченное увеличение одной из резонансных частот $\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \to \infty\right)$ приводит к тому, что быстрая частота связи также неограниченно возрастает $\left(\frac{\omega_{II}}{\omega_1} \to \infty\right)$, а медленная частота связи стремится к меньшей из собственных частот $\left(\frac{\omega_I}{\omega_1} \to 1\right)$.

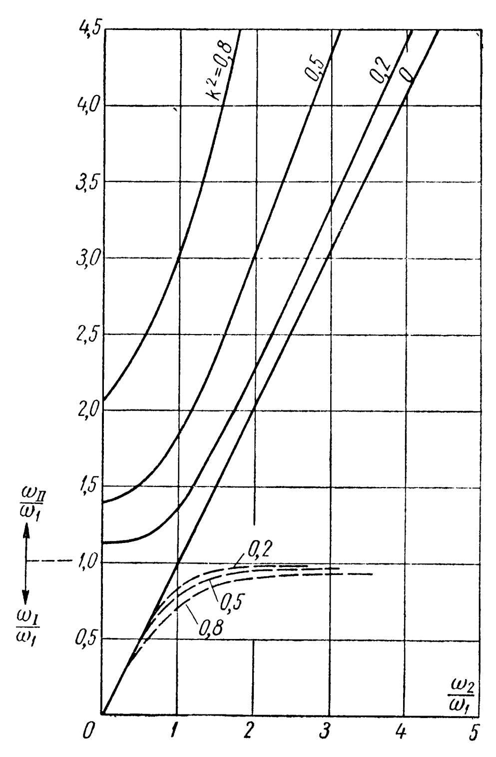


Рис. 4-58. Зависимость частот связи от отношения резонансных частот контуров.

Неограниченное уменьшение одной из резонансных частот $\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \to 0\right)$ влечет за собой неограниченное уменьшение медленной частоты связи $\left(\frac{\omega_I}{\omega_1} \to 0\right)$, так как она должна оставаться меньше меньшей из резонансных частот.

Быстрая же частота связи должна оставаться выше большей из частот контуров, т. е. частоты ω_1; поэтому отношение $\frac{\omega_{II}}{\omega_1}$ стремится к определенному пределу, большему единицы. Эти предельные значения $\frac{\omega_{II}}{\omega_1}$, разные для различных коэффициентов связи, можно отсчитать на оси ординат по точкам пересечения с осью ординат кривых $\frac{\omega_{II}}{\omega_1}$. Предельные значения $\frac{\omega_{II}}{\omega_1}$ можно также без труда получить из (4-178), если положить $\omega_2 = 0$:

$$\left(\frac{\omega_{II}}{\omega_1}\right)_{\omega_2=0} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}.$$

Интересно заметить, что при сильной расстройке контуров, когда $\frac{\omega_2}{\omega_1} \gg 1$, величина медленной частоты связи почти не зависит от $\frac{\omega_2}{\omega_1}$, т. е. от параметров (емкости, индуктивности) контуров. Быстрая же частота связи при этом

изменяется почти пропорционально $\frac{\omega_2}{\omega_1}$. Аналогично этому, если $\frac{\omega_2}{\omega_1} \ll 1$, то быстрая частота связи остается практически неизменной при изменении параметров контуров. Медленная же частота связи в этих условиях сильно зависит от ω_2/ω_1.

Независимость (в определенных условиях) одной из частот связи от параметров контуров представляет большой принципиальный и практический интерес. Это явление используется в радиотехнике, например, в целях стабилизации частоты.

ГЛАВА ПЯТАЯ

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЧЕТЫРЁХПОЛЮСНИКОВ

5-1. Введение

По своей схеме и вообще по своему внутреннему устройству четырехполюсники могут быть весьма разнообразны. Непосредственное применение к сложным четырехполюсникам основных законов электрических цепей может привести к чрезмерно громоздким выражениям, малоудобным для анализа.

В общей теории четырехполюсников устанавливаются зависимости, справедливые для любого четырехполюсника, независимо от схемы составляющих его элементов. Использование этих зависимостей во многих случаях существенно облегчает и упрощает расчет сложных электрических цепей.

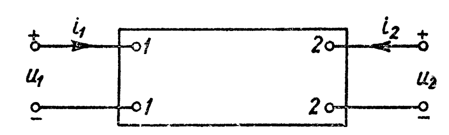


Рис. 5-1. Четырехполюсник.

Режим работы четырехполюсника (рис. 5-1) полностью определен, если известны напряжения и токи u_1; i_1; u_2 ; i_2.

Задача ставится следующим образом. Две из четырех величин, определяющих режим четырехполюсника, известны. Их можно рассматривать как заданные в о з д е й с т в и я на цепь. Требуется найти о т к л и к и на эти воздействия, т. е. две остальные величины. Что касается вопроса о том, какие из этих величин заданы,

Таблица 5-1

Напряжения и токи на входе и выходе четырехполюсника

Номера вариантов	1	2	3	4	5	6
Воздействия	u_1, u_2	i_1, i_2	u_2, i_2	i_1, u_2	u_1, i_2	u_1, i_1
Отклики	i_1, i_2	u_1, u_2	u_1, i_1	u_1, i_2	i_1, u_2	u_2, i_2

а какие должны быть найдены, то в зависимости от конкретных условий может встретиться один из шести вариантов, сведенных в табл. 5-1.

Для решения поставленной задачи необходимо располагать системой двух уравнений с двумя неизвестными, которые называются основными уравнениями теории четырехполюсников.

С вывода этих уравнений мы и начнем изложение общей теории четырехполюсников.

5-2. Основные уравнения теории четырехполюсников. Первичные параметры четырехполюсника

а) Система Y (g)-параметров

Из табл. 5-1 следует, что возможны шесть вариантов записи основных уравнений четырехполюсника.

Остановимся на варианте № 1, когда заданы первичное и вторичное напряжения u_1 и u_2, а искомыми (откликами) являются токи i_1 и i_2.

При такой постановке задачи токи i_1 и i_2 представляют собой некоторые функции напряжений u_1 и u_2, т. е.

$$i_1 = f_1(u_1;\ u_2); \tag{5-1}$$

$$i_2 = f_2(u_1;\ u_2). \tag{5-2}$$

Примем в качестве условно положительных те направления напряжений и токов, которые отмечены на рис. 5-1, и положим, что напряжения изменяются на бесконечно малые величины du_1 и du_2. Соответствующие изменения токов определяются полными дифференциалами:

$$di_1 = \frac{\partial f_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_2} du_2 = \frac{\partial i_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial i_1}{\partial u_2} du_2; \tag{5-3}$$

$$di_2 = \frac{\partial f_2}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_2}{\partial u_2} du_2 = \frac{\partial i_2}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial i_2}{\partial u_2} du_2. \tag{5-4}$$

Входящие в эти уравнения в качестве коэффициентов частные производные имеют размерность проводимости и называются g-параметрами четырехполюсника.

Введем обозначения:

$$\frac{\partial i_1}{\partial u_1} = g_{11}; \tag{5-5}$$

$$\frac{\partial i_1}{\partial u_2} = g_{12}; \tag{5-6}$$

$$\frac{\partial i_2}{\partial u_1} = g_{21}; \tag{5-7}$$

$$\frac{\partial i_2}{\partial u_2} = g_{22}. \tag{5-8}$$

Тогда уравнения (5-3) и (5-4) можно будет переписать так:

$$di_1 = g_{11}du_1 + g_{12}du_2; \qquad (5\text{-}9)$$

$$di_2 = g_{21}du_1 + g_{22}du_2. \qquad (5\text{-}10)$$

Если четырехполюсник составлен из линейных элементов, параметры его постоянны (не зависят от режима цепи) и между приращениями токов и напряжений существует прямая зависимость, выражаемая системой линейных уравнений (5-9) — (5-10).

В линейном четырехполюснике эти уравнения справедливы не только для бесконечно малых, но также и для конечных приращений, т. е.

$$\Delta i_1 = g_{11}\Delta u_1 + g_{12}\Delta u_2; \qquad (5\text{-}11)$$

$$\Delta i_2 = g_{21}\Delta u_1 + g_{22}\Delta u_2. \qquad (5\text{-}12)$$

Полученные выражения позволяют дать определение и уяснить физический смысл параметров линейного четырехполюсника.

Из уравнения (5-11) следует, что

$$g_{11} = \frac{\Delta i_1}{\Delta u_1} \text{ при } \Delta u_2 = 0, \text{ т. е. } u_2 = \text{const}. \qquad (5\text{-}13)$$

Параметр g_{11} называется входной проводимостью при постоянном напряжении на выходе.

Далее,

$$g_{12} = \frac{\Delta i_1}{\Delta u_2} \text{ при } \Delta u_1 = 0, \text{ т. е. } u_1 = \text{const}; \qquad (5\text{-}14)$$

этот параметр называется обратной проходной проводимостью при постоянном напряжении на входе.

Из уравнения (5-12) следует, что параметр, называемый прямой проходной проводимостью при постоянном напряжении на выходе,

$$g_{21} = \frac{\Delta i_2}{\Delta u_1} \text{ при } \Delta u_2 = 0, \text{ т. е. } u_2 = \text{const}. \qquad (5\text{-}15)$$

Наконец, как видно из (5-12), параметр

$$g_{22} = \frac{\Delta i_2}{\Delta u_2} \text{ при } \Delta u_1 = 0, \text{ т. е. } u_1 = \text{const} \qquad (5\text{-}16)$$

и называется выходной проводимостью при неизменном входном напряжении.

Изменения (приращения) напряжения Δu_1 и Δu_2 могут быть как постоянными величинами, так и величинами переменными во времени. Особенно интересен тот случай, когда приращения Δu_1 и Δu_2 являются гармоническими функциями времени. Тогда в линейном четырехполюснике токи (отклики) будут

также иметь синусоидальную форму, и основные уравнения (5-11) и (5-12) могут быть записаны в символическом виде. При такой записи приращения токов и напряжений должны быть заменены комплексными амплитудами переменных токов I_1; I_2 и напряжений U_1; U_2. При этом надо иметь в виду, что параметры четырехполюсника при переменных токах являются, вообще говоря, комплексными величинами, содержащими как активную, так и реактивную составляющие, т. е. вместо вещественных g-параметров в уравнениях должны фигурировать комплексные Y-параметры.

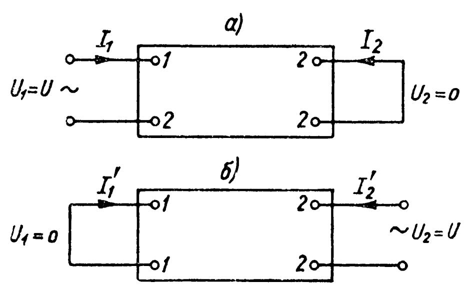


Рис. 5-2. К определению параметров четырехполюсника.

С учетом этих замечаний основные уравнения для комплексных амплитуд напряжений и токов линейного четырехполюсника запишем следующим образом:

$$I_1 = Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2; \quad (5\text{-}17)$$

$$I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2. \quad (5\text{-}18)$$

Из этих уравнений следует, что

$Y_{11} = \frac{I_1}{U_1}$ при $U_2 = 0$, т. е. при короткозамкнутом (для переменного тока) выходе;

$Y_{12} = \frac{I_1}{U_2}$ при $U_1 = 0$, т. е. при короткозамкнутом входе;

$Y_{21} = \frac{I_2}{U_1}$ при $U_2 = 0$, т. е. при короткозамкнутом выходе;

$Y_{22} = \frac{I_2}{U_2}$ при $U_1 = 0$, т. е. при короткозамкнутом входе.

Таким образом, все параметры могут быть найдены (в частности, экспериментально) по результатам двух опытов: 1) при коротком замыкании выхода и при питании четырехполюсника слева (рис. 5-2, *а*); 2) при короткозамкнутом входе и при питании четырехполюсника справа (рис. 5-2, *б*).

Если четырехполюсник питается слева, его иногда называют **прямым**, а при питании справа — **обратным**.

Систему уравнений (5-17) — (5-18) можно записать в такой, более компактной форме: [1]

$$\begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Vmatrix} = \| Y \| \times \begin{Vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Vmatrix}. \quad (5\text{-}19)$$

[1] Краткие сведения о матрицах приведены в приложении 1.

Здесь

$$\|Y\| = \begin{Vmatrix} Y_{11} Y_{12} \\ Y_{21} Y_{22} \end{Vmatrix} \qquad (5\text{-}20)$$

— матрица проводимостей или, короче, Y-матрица.

Для пассивного четырехполюсника, т. е. четырехполюсника, внутри которого нет источников энергии, справедлив принцип взаимности. Применим теорему взаимности к схеме рис. 5-2.

Пусть пассивный четырехполюсник питается слева напряжением $U_1 = U$, и через его короткозамкнутые вторичные зажимы проходит ток I_2 (рис. 5-5, *а*). Если перенести источник напряжения к зажимам *2-2* ($U_2 = U$), то через замкнутые накоротко зажимы *1-1* (рис. 5-2, *б*) будет согласно принципу взаимности проходить ток $I'_1 = I_2$.

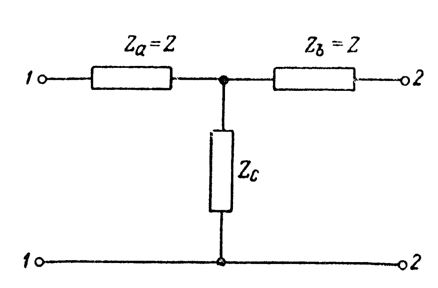


Рис. 5-3. Т-образный симметричный четырехполюсник.

Из уравнения (5-18) при $U_1 = U$ и $U_2 = 0$ имеем

$$I_2 = Y_{21} U.$$

Из (5-17) следует, что при $U_2 = U$ и $U_1 = 0$

$$I'_1 = Y_{12} U.$$

Так как $I_2 = I'_1$, то

$$Y_{12} = Y_{21}, \qquad (5\text{-}21)$$

т. е. *в пассивном четырехполюснике прямая и обратная проходные проводимости равны между собой.*

Если при переносе источника напряжения к зажимам *2-2* остаются равными не только выходные токи I_2 и I'_1, но и токи на входе I_1 и I'_2, то такой четырехполюсник называется симметричным. Иначе говоря, симметричным называется пассивный четырехполюсник, обладающий тем свойством, что перемена местами источника питания и нагрузки (поворот четырехполюсника «на 180°») не изменяет токов и напряжений во внешних цепях.

Примером симметричного пассивного четырехполюсника может служить схема Т-образного четырехполюсника (рис. 5-3), у которого «продольные» сопротивления равны между собой: $Z_a = Z_b = Z$.

Из (5-17) следует, что при $U_1 = U$ и $U_2 = 0$

$$I_1 = Y_{11} U,$$

а при $U_2 = U$ и $U_1 = 0$ ток

$$I'_2 = Y_{22} U.$$

В симметричном четырехполюснике $I_1 = I'_2$; поэтому

$$Y_{11} = Y_{22}, \qquad (5\text{-}22)$$

т. е. *в симметричном пассивном четырехполюснике входная и выходная проводимости равны между собой.*

б) Система Z (r)-параметров

Пусть для некоторого четырехполюсника заданными являются токи i_1 и i_2, а искомыми — напряжения u_1 и u_2 (вариант № 2 табл. 5-1), т. е.

$$u_1 = f_1(i_1;\ i_2); \tag{5-23}$$

$$u_2 = f_2(i_1;\ i_2). \tag{5-24}$$

Тогда полные дифференциалы

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial i_1} di_1 + \frac{\partial u_1}{\partial i_2} di_2 = r_{1\,1}\,di_1 + r_{1\,2}\,di_2; \tag{5-25}$$

$$du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial i_1} di_1 + \frac{\partial u_2}{\partial i_2} di_2 = r_{2\,1}\,di_1 + r_{2\,2}\,di_2. \tag{5-26}$$

Здесь r_{11}; r_{12}; r_{21}; r_{22} — так называемые r-параметры четырехполюсника, равные соответственно частным производным $\frac{\partial u_1}{\partial i_1}$; $\frac{\partial u_1}{\partial i_2}$; $\frac{\partial u_2}{\partial i_1}$; $\frac{\partial u_2}{\partial i_2}$.

Для гармонически изменяющихся во времени токов и напряжений в цепях линейного четырехполюсника основные уравнения могут быть записаны, аналогично (5-17) и (5-18), в виде

$$\dot{U}_1 = Z_{1\,1}\dot{I}_1 + Z_{1\,2}\dot{I}_2; \tag{5-27}$$

$$\dot{U}_2 = Z_{2\,1}\dot{I}_1 + Z_{2\,2}\dot{I}_2. \tag{5-28}$$

Коэффициенты этих уравнений $Z_{1\,1}$, $Z_{1\,2}$, $Z_{2\,1}$, $Z_{2\,2}$ представляют собой Z-параметры, которые согласно (5-27) и (5-28) определяются следующим образом:

$Z_{1\,1} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}$ при $\dot{I}_2 = 0$, холостой ход вторичной цепи;

$Z_{1\,2} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2}$ при $\dot{I}_1 = 0$, холостой ход первичной цепи;

$Z_{2\,1} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}$ при $\dot{I}_2 = 0$, холостой ход вторичной цепи;

$Z_{2\,2} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}$ при $\dot{I}_1 = 0$, холостой ход первичной цепи.

Уравнения четырехполюсника в системе Z-параметров могут быть также выражены через матрицу сопротивлений

$$\| Z \| = \begin{Vmatrix} Z_{1\,1} & Z_{1\,2} \\ Z_{2\,1} & Z_{2\,2} \end{Vmatrix} \tag{5-29}$$

в виде

$$\begin{Vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Vmatrix} = \| Z \| \times \begin{Vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{Vmatrix}. \tag{5-30}$$

Для заданного четырехполюсника его Z- и Y-параметры, разумеется, однозначно связаны между собой, и переход от одной системы параметров к другой может быть осуществлен без особого труда.

Так, для того чтобы перейти от Y-параметров к Z-параметрам, систему уравнений (5-17)—(5-18) следует решить относительно $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$. В результате получается:

$$\dot{U}_1 = \frac{Y_{2\,2}}{|Y|}\dot{I}_1 - \frac{Y_{1\,2}}{|Y|}\dot{I}_2;$$

$$\dot{U}_2 = -\frac{Y_{2\,1}}{|Y|}\dot{I}_1 + \frac{Y_{1\,1}}{|Y|}\dot{I}_2.$$

Здесь

$$|Y| = \begin{vmatrix} Y_{11} Y_{12} \\ Y_{21} Y_{22} \end{vmatrix} = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21} \qquad (5\text{-}31)$$

определитель матрицы проводимостей.

Сравнивая полученные выражения для U_1 и U_2 с уравнениями (5-27)—(5-28) и приравнивая соответствующие коэффициенты, находим формулы, связывающие Z-параметры четырехполюсника с его Y-параметрами:

$$Z_{11} = \frac{Y_{22}}{|Y|}; \qquad (5\text{-}32)$$

$$Z_{12} = -\frac{Y_{12}}{|Y|}; \qquad (5\text{-}33)$$

$$Z_{21} = -\frac{Y_{21}}{|Y|}; \qquad (5\text{-}34)$$

$$Z_{22} = \frac{Y_{11}}{|Y|}. \qquad (5\text{-}35)$$

Имея в виду полученное ранее выражение (5-21), характеризующее пассивный четырехполюсник, и сопоставляя его с (5-33) и (5-34), приходим к выводу, что в пассивном четырехполюснике

$$Z_{12} = Z_{21}. \qquad (5\text{-}36)$$

Из сравнения (5-22) с (5-32) и (5-35) следует, что условие симметричности четырехполюсника в системе Z-параметров имеет вид:

$$Z_{11} = Z_{22}. \qquad (5\text{-}37)$$

в) Система a-параметров

Когда четырехполюсник выполняет роль промежуточного звена между источником энергии и сопротивлением нагрузки, заданными часто являются параметры нагрузки u_2, i_2, а искомыми величины, характеризующие режим на входе четырехполюсника. Такая постановка задачи соответствует варианту № 3 табл. 5-1. В этих условиях

$$u_1 = f_1(u_2;\ i_2); \qquad (5\text{-}38)$$

$$i_1 = f_2(u_2;\ i_2). \qquad (5\text{-}39)$$

Если будем искать соотношения между комплексными амплитудами гармонически изменяющихся напряжений и токов, то, применяя ту же методику, которая привела нас к уравнениям в системах Y- и Z-параметров, получим

$$\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{U}_2 + \boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{I}_2; \qquad (5\text{-}40)$$

$$\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{U}_2 + \boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{I}_2. \qquad (5\text{-}41)$$

Входящие в эти уравнения в общем случае комплексные коэффициенты $\boldsymbol{a}_{11}$, $\boldsymbol{a}_{12}$, $\boldsymbol{a}_{21}$ и $\boldsymbol{a}_{22}$ носят название $\boldsymbol{a}$-параметров четырехполюсника.

Прежде чем устанавливать значение и физический смысл a-параметров, отметим, что когда выход четырехполюсника включен на

пассивный двухполюсник (нагрузку), целесообразнее условно положительные направления токов и напряжений считать в соответствии со схемой рис. 5-4. Здесь положительное направление тока I_2 обратно тому, что было принято на рис. 5-1. Поэтому для схемы рис. 5-4 уравнения (5-40) и (5-41) должны быть записаны в виде

$$U_1 = a_{11}U_2 - a_{12}I_2 = AU_2 + BI_2; \quad (5\text{-}42)$$

$$I_1 = a_{21}U_2 - a_{22}I_2 = CU_2 + DI_2. \quad (5\text{-}43)$$

В уравнениях (5-42) и (5-43) приняты новые обозначения параметров:

$$\left.\begin{aligned} A &= a_{11}, \\ B &= -a_{12}, \\ C &= a_{21}, \\ D &= -a_{22}. \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}44)$$

Этими обозначениями обычно пользуются, когда в качестве условно положительных направлений токов принимают направления, указанные на схеме рис. 5-4. Таким образом, a-параметры соответствуют схеме рис. 5-1, а параметры A, B, C, D — схеме рис. 5-4.

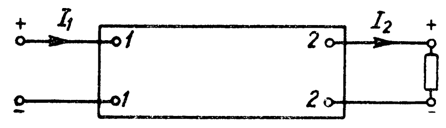


Рис. 5-4. Условно-положительные направления токов и напряжений при определении параметров A, B, C, D.

Из уравнения (5-42) следует, что

$$a_{11} = A = \frac{U_1}{U_2} \text{ при } I_2 = 0,$$

т. е. безразмерный параметр A имеет смысл коэффициента трансформации напряжения при разомкнутом выходе. Иначе говоря, он равен обратной величине коэффициента передачи при холостом ходе четырехполюсника, т. е.

$$A = \left|\frac{U_1}{U_2}\right|_{I_2=0} = \frac{1}{K_{\text{х. х}}(j\omega)}. \quad (5\text{-}45)$$

Из того же уравнения (5-42) видно, что

$$B = -a_{12} = \frac{U_1}{I_2} \text{ при } U_2 = 0, \quad (5\text{-}46)$$

т. е. в режиме короткого замыкания на выходе. Параметр B имеет размерность сопротивления.

Из (5-43) вытекает, что

$$a_{21} = C = \frac{I_1}{U_2} \text{ при } I_2 = 0, \quad (5\text{-}47)$$

т. е. в режиме холостого хода.

Этот параметр имеет размерность проводимости.

Наконец, как видно из (5-43), параметр

$$D = -a_{22} = \frac{I_1}{I_2} \text{ при } U_2 = 0, \quad (5\text{-}48)$$

т. е. в режиме короткого замыкания. Параметр D безразмерный. Он имеет смысл коэффициента трансформации тока при коротком замыкании выхода четырехполюсника.

Основные уравнения четырехполюсника в a-параметрах можно записать в виде

$$\begin{Vmatrix} U_1 \\ I_1 \end{Vmatrix} = \|a\| \times \begin{Vmatrix} U_2 \\ I_2 \end{Vmatrix}, \quad (5\text{-}49)$$

где

$$\|a\| = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}. \quad (5\text{-}50)$$

Параметры a (или соответственно A, B, C, D) нетрудно связать с Y-параметрами.

С этой целью решим систему уравнений (5-17) — (5-18) относительно U_1 и I_1. В результате найдем

$$U_1 = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} U_2 + \frac{1}{Y_{21}} I_2,$$

$$I_1 = -\frac{|Y|}{Y_{21}} U_2 + \frac{Y_{11}}{Y_{21}} I_2.$$

Сопоставив эти выражения с уравнениями (5-40) и (5-41) и приняв во внимание (5-44), получим:

$$a_{11} = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} = A; \quad (5\text{-}51)$$

$$a_{12} = \frac{1}{Y_{21}} = -B; \quad (5\text{-}52)$$

$$a_{21} = -\frac{|Y|}{Y_{21}} = C; \quad (5\text{-}53)$$

$$a_{22} = \frac{Y_{11}}{Y_{21}} = -D. \quad (5\text{-}54)$$

Значения параметров A, B, C, D связаны между собой интересной зависимостью. Составим выражение $AD - BC$, подставив в него значения параметров из (5-51) — (5-54). Тогда получим

$$AD - BC = \frac{Y_{12}}{Y_{21}}. \quad (5\text{-}55)$$

Для пассивного четырехполюсника $Y_{12} = Y_{21}$ [см. (5-21)]. Поэтому

$$AD - BC = 1. \quad (5\text{-}56)$$

Эта важная зависимость показывает, что только три параметра четырехполюсника могут быть заданы независимо, четвертый же определяется однозначно из (5-56).

Если четырехполюсник симметричен, то $Y_{11} = Y_{22}$ [см. (5-22)]. Из (5-51) и (5-54) видно, что для симметричного четырехполюсника

$$A = D. \tag{5-57}$$

Поэтому для пассивного симметричного четырехполюсника соотношение (5-56) приобретает вид

$$A^2 - BC = 1, \tag{5-56а}$$

т. е. только два из трех параметров такого четырехполюсника являются независимыми. Таким образом, симметричный пассивный четырехполюсник полностью характеризуется любыми двумя из трех параметров A, B, C.

г) Другие системы параметров

Мы рассмотрели три наиболее часто используемые системы параметров четырехполюсника (Y, Z, a), соответствующие первым трем вариантам табл. 5-1.

Остановимся теперь вкратце на остальных системах параметров, которые находят значительно меньшее применение.

Когда заданными являются комплексные амплитуды тока на входе I_1 и напряжения на выходе U_2 (вариант № 4 табл. 5-1), искомые величины U_1 и I_2 могут быть найдены, если выразить основные уравнения четырехполюсника в так называемых h-параметрах:

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= h_{11} I_1 + h_{12} U_2, \\ I_2 &= h_{21} I_1 + h_{22} U_2. \end{aligned}\right\} \tag{5-58}$$

Значения каждого из h-параметров определяются из двух опытов: короткого замыкания выхода ($U_2 = 0$) и холостого хода первичной цепи ($I_1 = 0$).

В том случае, когда задаются величины U_1 и I_2 (вариант № 5 табл. 5-1), остальные две величины I_1 и U_2 определяются из уравнений:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= f_{11} U_1 + f_{12} I_2, \\ U_2 &= f_{21} U_1 + f_{22} I_2. \end{aligned}\right\} \tag{5-59}$$

Входящие в эти выражения так называемые f-параметры могут быть найдены из двух опытов: холостого хода вторичной цепи ($I_2 = 0$) и короткого замыкания на входе ($U_1 = 0$).

Последний возможный вариант записи основных уравнений четырехполюсника (вариант № 6 табл. 5-1) соответствует переходу от «входа» (U_1, I_1) к «выходу» (U_2, I_2):

$$\left.\begin{aligned} U_2 &= b_{11} U_1 + b_{12} I_1, \\ I_2 &= b_{21} U_1 + b_{22} I_1. \end{aligned}\right\} \tag{5-60}$$

Значения b-параметров определяются двумя опытами: холостого хода входной цепи ($I_1 = 0$) и короткого замыкания входа ($U_1 = 0$).

Все параметры — h, b, f — являются в общем случае комплексными величинами.

В матричной форме последние три системы уравнений имеют вид:

$$\begin{Vmatrix} U_1 \\ I_2 \end{Vmatrix} = \|h\| \times \begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Vmatrix}; \tag{5-61}$$

$$\begin{Vmatrix} I_1 \\ U_2 \end{Vmatrix} = \|f\| \times \begin{Vmatrix} U_1 \\ I_2 \end{Vmatrix}; \tag{5-62}$$

$$\begin{Vmatrix} U_2 \\ I_2 \end{Vmatrix} = \|b\| \times \begin{Vmatrix} U_1 \\ I_1 \end{Vmatrix}. \tag{5-63}$$

Таблица 5 2

Формулы перехода от одной системы параметров четырехполюсника к другой системе

Из системы → / В систему ↓	Z	Y	a	h	f	b
Z	$\begin{matrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{Y_{22}}{\lvert Y\rvert} & \frac{-Y_{12}}{\lvert Y\rvert} \\ \frac{-Y_{21}}{\lvert Y\rvert} & \frac{Y_{11}}{\lvert Y\rvert} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{a_{11}}{a_{21}} & \frac{-\lvert a\rvert}{a_{21}} \\ \frac{1}{a_{21}} & \frac{-a_{22}}{a_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\lvert h\rvert}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ \frac{-h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{f_{11}} & \frac{-f_{12}}{f_{11}} \\ \frac{f_{21}}{f_{11}} & \frac{\lvert f\rvert}{f_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-b_{22}}{b_{21}} & \frac{1}{b_{21}} \\ \frac{-\lvert b\rvert}{b_{21}} & \frac{b_{11}}{b_{21}} \end{matrix}$
Y	$\begin{matrix} \frac{Z_{22}}{\lvert Z\rvert} & \frac{-Z_{12}}{\lvert Z\rvert} \\ \frac{-Z_{21}}{\lvert Z\rvert} & \frac{Z_{11}}{\lvert Z\rvert} \end{matrix}$	$\begin{matrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{a_{22}}{a_{21}} & \frac{-\lvert a\rvert}{a_{12}} \\ -\frac{1}{a_{21}} & \frac{-a_{11}}{a_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{11}} & \frac{-h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\lvert h\rvert}{h_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\lvert f\rvert}{f_{22}} & \frac{f_{12}}{f_{22}} \\ \frac{-f_{21}}{f_{22}} & \frac{1}{f_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-b_{11}}{b_{12}} & \frac{1}{b_{12}} \\ \frac{-\lvert b\rvert}{b_{12}} & \frac{b_{22}}{b_{12}} \end{matrix}$
a	$\begin{matrix} \frac{Z_{11}}{Z_{22}} & \frac{-\lvert Z\rvert}{Z_{21}} \\ \frac{1}{Z_{21}} & \frac{-Z_{22}}{Z_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-Y_{22}}{Y_{21}} & \frac{1}{Y_{21}} \\ \frac{-\lvert Y\rvert}{Y_{21}} & \frac{Y_{11}}{Y_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} a_{11}=A & a_{12}=-B \\ a_{21}=C & a_{22}=-D \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-\lvert h\rvert}{h_{21}} & \frac{h_{11}}{h_{21}} \\ \frac{-h_{22}}{h_{21}} & \frac{1}{h_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{f_{21}} & \frac{-f_{22}}{f_{21}} \\ \frac{f_{11}}{f_{21}} & \frac{-\lvert f\rvert}{f_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{b_{22}}{\lvert b\rvert} & \frac{-b_{12}}{\lvert b\rvert} \\ \frac{-b_{21}}{\lvert b\rvert} & \frac{b_{11}}{\lvert b\rvert} \end{matrix}$

Из системы → / В систему ↓	Z	Y	a	h	f	b
h	$\begin{matrix} \frac{\lvert Z \rvert}{Z_{22}} & \frac{Z_{12}}{Z_{22}} \\ -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} & \frac{1}{Z_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{Y_{11}} & -\frac{Y_{12}}{Y_{11}} \\ \frac{Y_{21}}{Y_{11}} & \frac{\lvert Y \rvert}{Y_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{a_{12}}{a_{22}} & \frac{\lvert a \rvert}{a_{22}} \\ \frac{1}{a_{22}} & -\frac{a_{21}}{a_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{f_{22}}{\lvert f \rvert} & -\frac{f_{12}}{\lvert f \rvert} \\ -\frac{f_{21}}{\lvert f \rvert} & \frac{f_{11}}{\lvert f \rvert} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{b_{12}}{b_{11}} & \frac{1}{b_{11}} \\ \frac{\lvert b \rvert}{b_{11}} & \frac{b_{21}}{b_{11}} \end{matrix}$
f	$\begin{matrix} \frac{1}{Z_{11}} & -\frac{Z_{12}}{Z_{11}} \\ \frac{Z_{21}}{Z_{11}} & \frac{\lvert Z \rvert}{Z_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\lvert Y \rvert}{Y_{22}} & \frac{Y_{12}}{Y_{22}} \\ -\frac{Y_{21}}{Y_{22}} & \frac{1}{Y_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{a_{21}}{a_{11}} & \frac{\lvert a \rvert}{a_{11}} \\ \frac{1}{a_{11}} & -\frac{a_{12}}{a_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{h_{22}}{\lvert h \rvert} & -\frac{h_{12}}{\lvert h \rvert} \\ -\frac{h_{21}}{\lvert h \rvert} & \frac{h_{11}}{\lvert h \rvert} \end{matrix}$	$\begin{matrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{b_{21}}{b_{22}} & \frac{1}{b_{22}} \\ \frac{\lvert b \rvert}{b_{22}} & \frac{b_{12}}{b_{22}} \end{matrix}$
b	$\begin{matrix} \frac{Z_{22}}{Z_{12}} & -\frac{\lvert Z \rvert}{Z_{12}} \\ \frac{1}{Z_{12}} & -\frac{Z_{11}}{Z_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{Y_{11}}{Y_{12}} & \frac{1}{Y_{12}} \\ -\frac{\lvert Y \rvert}{Y_{12}} & \frac{Y_{22}}{Y_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{a_{22}}{\lvert a \rvert} & -\frac{a_{12}}{\lvert a \rvert} \\ -\frac{a_{21}}{\lvert a \rvert} & \frac{a_{11}}{\lvert a \rvert} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{12}} & -\frac{h_{11}}{h_{12}} \\ \frac{h_{22}}{h_{12}} & -\frac{\lvert h \rvert}{h_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\lvert f \rvert}{f_{12}} & \frac{f_{22}}{f_{12}} \\ -\frac{f_{11}}{f_{12}} & \frac{1}{f_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{matrix}$

Примечание. $\lvert Z \rvert = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$; $\lvert h \rvert = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}$

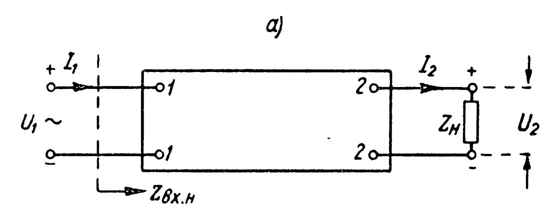
$\lvert Y \rvert = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$; $\lvert f \rvert = f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}$

$\lvert a \rvert = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$; $\lvert b \rvert = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$

Если известны параметры четырехполюсника в одной из шести систем, всегда возможен переход к любой из других систем. Необходимые для этого формулы пересчета, включая и полученные выше (5-32) — (5-35) и (5-51) — (5-54), сведены в справочную табл. 5-2.

5-3. Входное и выходное сопротивления четырехполюсника

Рассмотрим линейный пассивный четырехполюсник, к первичным зажимам которого подведено гармоническое напряжение U_1, а вторичные замкнуты на сопротивление нагрузки $Z_н$ (рис. 5-5, *а*).



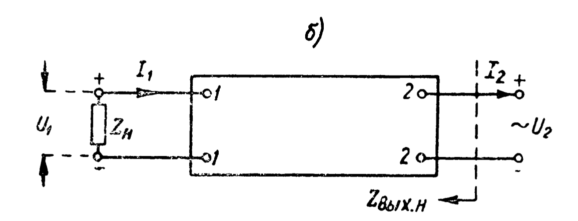


Рис. 5-5. К расчету входного и выходного сопротивлений четырехполюсника.

Найдем входное сопротивление цепи

$$Z_{вх.\,н} = \frac{U_1}{I_1}.$$

Для этого воспользуемся уравнениями четырехполюсника в *A, B, C, D*-параметрах, в соответствии с чем выбраны условно положительные направления токов и напряжений на рис. 5-5.

Поделив (5-42) на (5-43) и имея в виду, что $Z_н = \frac{U_2}{I_2}$, получим

$$Z_{вх.\,н} = \frac{AU_2 + BI_2}{CU_2 + DI_2} = \frac{AZ_н + B}{CZ_н + D}. \tag{5-64}$$

Значение входного сопротивления определяется параметрами (внутренним устройством) четырехполюсника и величиной сопротивления нагрузки $Z_н$.

В том частном случае, когда $Z_н = 0$, т. е. в режиме короткого замыкания, входное сопротивление

$$Z_{вх.\,к.\,з} = \frac{B}{D}. \qquad (5\text{-}65)$$

Если же выходные зажимы четырехполюсника разомкнуты ($Z_н = \infty$), то, разделив числитель и знаменатель формулы (5-64) на $Z_н$, найдем, что входное сопротивление в режиме холостого хода

$$Z_{вх.\,х.\,х} = \frac{A}{C}. \qquad (5\text{-}66)$$

Желая найти выходное сопротивление нагруженного четырехполюсника $Z_{вых.н}$, мы должны считать, что он питается справа (рис. 5-5, *б*), а его клеммы *1-1* замкнуты на сопротивление $Z_н$.

Прежде чем рассчитать величину $Z_{вых.н}$, решим систему основных уравнений (5-42) — (5-43) относительно $\boldsymbol{U}_2$ и $\boldsymbol{I}_2$. Приняв во внимание соотношение (5-56), получим

$$\boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{D}\boldsymbol{U}_1 - \boldsymbol{B}\boldsymbol{I}_1; \qquad (5\text{-}67)$$

$$\boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{C}\boldsymbol{U}_1. \qquad (5\text{-}68)$$

Выходное сопротивление

$$Z_{вых.\,н} = -\frac{\boldsymbol{U}_2}{\boldsymbol{I}_2}, \qquad (5\text{-}69)$$

а сопротивление нагрузки

$$Z_н = -\frac{\boldsymbol{U}_1}{\boldsymbol{I}_1}. \qquad (5\text{-}70)$$

Знак минус в этих выражениях поставлен потому, что при питании справа и при положительных $\boldsymbol{U}_2$ и $\boldsymbol{U}_1$ токи $\boldsymbol{I}_2$ и $\boldsymbol{I}_1$ имеют направление, обратное тому, которое принято за положительное.

Подставив (5-67) и (5-68) в (5-69) и имея в виду (5-70), получим

$$Z_{вых.\,н} = \frac{\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}_1 - \boldsymbol{B}\boldsymbol{I}_1}{\boldsymbol{C}\boldsymbol{U}_1 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_1} = \frac{\boldsymbol{D}Z_н + \boldsymbol{B}}{\boldsymbol{C}Z_н + \boldsymbol{A}}. \qquad (5\text{-}71)$$

Отсюда следует, что в режиме короткого замыкания

$$Z_{вых.\,к.\,з} = \frac{B}{A}, \qquad (5\text{-}72)$$

а в режиме холостого хода

$$Z_{вых.\,х.\,х} = \frac{D}{C}. \qquad (5\text{-}73)$$

Если четырехполюсник симметричный, то $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}$ [см. (5-57)]. Тогда, как видно из (5-64) и (5-71),

$$Z_{вх.\,н} = Z_{вых.\,н}.$$

Этот результат подтверждает то, что поворот симметричного четырехполюсника «на 180°» не меняет режима источника питания.

Итак, зная параметры четырехполюсника, можно легко рассчитать его входное и выходное сопротивления при любых заданных значениях сопротивления нагрузки.

5-4. Вторичные параметры четырехполюсника

Наряду с введенными в рассмотрение параметрами четырехполюсника, которые можно назвать п е р в и ч н ы м и, при решении многих задач оказывается удобным пользоваться другими, так называемыми в т о р и ч н ы м и параметрами. К ним относятся: характеристические сопротивления, коэффициент трансформации и коэффициент распространения.

а) Характеристические сопротивления

Пусть имеется некоторый линейный пассивный четырехполюсник (рис. 5-6). Можно ли найти такие два сопротивления (назовем их Z_{01} и Z_{02},) которые обладали бы следующими свойствами:

1) при нагрузке выхода четырехполюсника на сопротивление Z_{02} его входное сопротивление равно Z_{01} (рис. 5-6, *а*);

2) при нагрузке входа четырехполюсника на Z_{01} его выходное сопротивление равно Z_{02} (рис. 5-6, *б*)?

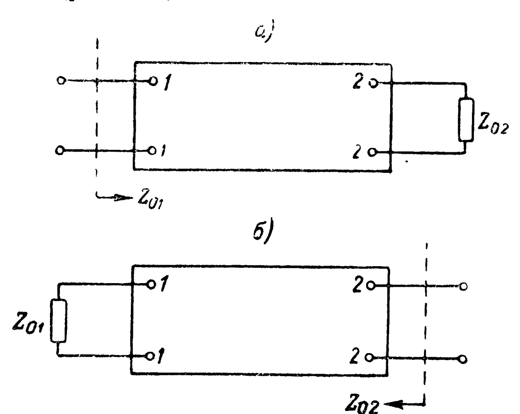


Рис. 5-6. К определению характеристических сопротивлений.

Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к выражениям (5-64) и (5-71) для входного и выходного сопротивлений. В первое из них вместо $Z_н$ подставим Z_{02}, а вместо $Z_{вх.н}$ — сопротивление Z_{01}. Соответственно в выражении (5-71) напишем Z_{01} вместо $Z_н$ и Z_{02} вместо $Z_{вых.н}$.

В результате получим систему из двух уравнений:

$$Z_{01} = \frac{AZ_{02} + B}{CZ_{02} + D}; \qquad (5\text{-}74)$$

$$Z_{02} = \frac{DZ_{01} + B}{CZ_{01} + A}. \qquad (5\text{-}75)$$

Решив совместно эти уравнения, найдем

$$Z_{01} = \pm \sqrt{\frac{AB}{CD}}; \tag{5-76}$$

$$Z_{02} = \pm \sqrt{\frac{BD}{AC}}. \tag{5-77}$$

Итак, на поставленный в начале этого параграфа вопрос должен быть дан утвердительный ответ.

Сопротивления Z_{01} и Z_{02}, обладающие сформулированными выше свойствами, могут быть названы входным характеристическим сопротивлением (Z_{01}) и выходным характеристическим сопротивлением (Z_{02}).

Хотя формально система уравнений (5-74) — (5-75) имеет четыре (а не два) решения, два из них должны быть отброшены как не имеющие физического смысла. Вопрос о выборе знаков решений (5-76) и (5-77) должен специально решаться в каждом конкретном случае в зависимости от внутреннего устройства (схемы) четырехполюсника. В дальнейшей записи условно будем опускать знаки плюс (минус) перед корнем.

Как видно из (5-76) и (5-77), величины характеристических сопротивлений зависят только от первичных параметров четырехполюсника: $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{D}$. Поэтому Z_{01} и Z_{02} могут рассматриваться так же, как вторичные параметры четырехполюсника.

Сравнивая (5-76) с (5-65) и (5-66), замечаем, что

$$Z_{01} = \sqrt{Z_{\text{вх. к. з}} Z_{\text{вх. х. х}}}, \tag{5-78}$$

т. е. входное характеристическое сопротивление равно среднему геометрическому из входных сопротивлений при коротком замыкании и холостом ходе.

Аналогично сравнение (5-77) с (5-72) и (5-73) показывает, что

$$Z_{02} = \sqrt{Z_{\text{вых. к. з}} Z_{\text{вых. х. х}}}, \tag{5-79}$$

т. е. выходное характеристическое сопротивление равняется среднему геометрическому из выходных сопротивлений при коротком замыкании и холостом ходе.

Выражения (5-78) и (5-79) позволяют определить характеристические сопротивления из опытов холостого хода и короткого замыкания.

Четырехполюсник, в котором сопротивление нагрузки $Z_{\text{н}}$ равно выходному характеристическому сопротивлению Z_{02} (рис. 5-7), будем называть согласованным на выходе.

Для симметричного четырехполюсника оба характеристические сопротивления совпадают: $Z_{01} = Z_{02} = Z_0$. Как видно из (5-74) и (5-75), характеристическое сопротивление симметричного четырехполюсника ($\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}$)

$$Z_0 = \sqrt{\frac{B}{C}}. \tag{5-80}$$

Если симметричный четырехполюсник согласован на выходе, т. е. нагружен на сопротивление $Z_н = Z_0$ (рис. 5-8), то его входное сопротивление равно той же величине Z_0.

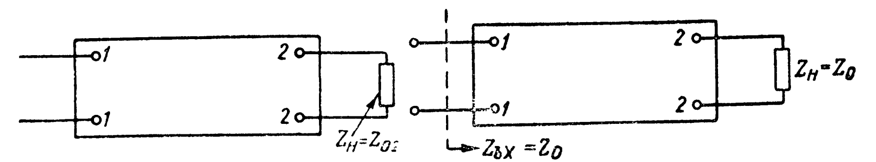


Рис. 5-7. Четырехполюсник, согласованный на выходе.

Рис. 5-8. Симметричный четырехполюсник, согласованный на выходе.

В симметричном четырехполюснике, разумеется, остается справедливым соотношение

$$Z_0 = \sqrt{Z_{вх.\,к.\,з} Z_{вх.\,х.\,х}} = \sqrt{Z_{вых.\,к.\,з} Z_{вых.\,х.\,х}}. \qquad (5\text{-}81)$$

б) Коэффициент трансформации и коэффициент распространения

Пусть имеется четырехполюсник с согласованной нагрузкой, т. е. сопротивление нагрузки

$$Z_н = \frac{U_2}{I_2} = Z_{02} = \sqrt{\frac{BD}{AC}}.$$

Тогда основные уравнения

$$U_1 = AU_2 + BI_2,$$
$$I_1 = CU_2 + DI_2$$

для этого четырехполюсника принимают следующий вид:

$$U_1 = U_2\left(A + \sqrt{\frac{ABC}{D}}\right); \qquad (5\text{-}82)$$

$$I_1 = I_2\left(D + \sqrt{\frac{DBC}{A}}\right). \qquad (5\text{-}83)$$

Введем в рассмотрение величину

$$m_т = \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} = \sqrt{\frac{A}{D}}, \qquad (5\text{-}84)$$

которую назовем коэффициентом трансформации четырехполюсника. Подробнее смысл его будет уточнен несколько позже. Отметим пока, что для симметричного четырехполюсника

$$m_{т.\,сим} = 1. \qquad (5\text{-}85)$$

Из выражений для U_1 (5-82), I_1 (5-83) и $m_т$ (5-84) получаем

$$\frac{1}{m_т} \cdot \frac{U_1}{U_2} = \sqrt{AD} + \sqrt{BC}; \qquad (5\text{-}86)$$

$$m_т \frac{I_1}{I_2} = \sqrt{AD} + \sqrt{BC}, \qquad (5\text{-}87)$$

т. е. отношение напряжений на входе и выходе согласованного четырехполюсника, уменьшенное в $m_т$ раз, равно подобному же отношению токов, увеличенному в $m_т$ раз.

Для этих двух равных между собой отношений примем обозначение

$$\frac{1}{m_т} \cdot \frac{U_1}{U_2} = m_т \frac{I_1}{I_2} = e^{\Gamma}. \tag{5-88}$$

Величина Г называется коэффициентом распространения четырехполюсника. Из (5-88) следует, что

$$\Gamma = \ln \frac{U_1}{m_т U_2} = \ln \frac{m_т I_1}{I_2} = \ln(\sqrt{AD} + \sqrt{BC}), \tag{5-89}$$

т. е. коэффициент распространения определяется первичными параметрами четырехполюсника и может рассматриваться как один из его вторичных параметров.

При коэффициенте трансформации $m_т = 1$, т. е. в случае симметричного четырехполюсника, коэффициент распространения представляет собой натуральный логарифм отношения комплексов напряжений (или токов) на входе и выходе согласованного четырехполюсника.

Если в некотором четырехполюснике коэффициент распространения $\Gamma = 0$, то

$$\left.\begin{aligned} \frac{U_1}{U_2} &= m_т, \\ \frac{I_1}{I_2} &= \frac{1}{m_т}. \end{aligned}\right\} \tag{5-90}$$

Отсюда должен быть ясен смысл коэффициента $m_т$. Он представляет собой коэффициент трансформации напряжения (или обратная ему величина — коэффициент трансформации тока) четырехполюсника, коэффициент распространения которого $\Gamma = 0$. Такой четырехполюсник является идеальным трансформатором. В реальном же четырехполюснике для определения отношения U_1/U_2 коэффициент трансформации $m_т$ должен быть умножен на e^{Γ}; аналогично для расчета отношения токов I_1/I_2 на e^{Γ} следует умножить коэффициент $1/m_т$.

Согласно определению характеристических сопротивлений входное сопротивление согласованного четырехполюсника (см. рис. 5-6)

$$Z_{вх} = Z_{01}.$$

Имея в виду (5-84), получаем

$$Z_{вх} = m_т^2 Z_{02} = m_т^2 Z_н, \tag{5-91}$$

т. е. согласованный четырехполюсник является трансформатором сопротивления, трансформирующим сопротивлением нагрузки в $m_т^2$ раз. Отсюда же видно, что, как и следовало

ожидать, симметричный четырехполюсник ($m_т = 1$) с согласованной нагрузкой не трансформирует сопротивления ($Z_{вх} = Z_0 = Z_н$).

Теперь, используя вновь введенные вторичные параметры четырехполюсника, основным уравнениям (5-42) — (5-43) можно придать иной вид. Будем при этом рассматривать общий случай, когда четырехполюсник не согласован: $Z_н \neq Z_{02}$. Прежде всего первичные параметры $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{D}$ выразим через вторичные параметры Г, Z_{01} и Z_{02}. Согласно (5-86) и (5-88) имеем

$$\left.\begin{aligned} e^{\Gamma} &= \sqrt{\boldsymbol{AD}} + \sqrt{\boldsymbol{BC}}, \\ e^{-\Gamma} &= \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{AD}} + \sqrt{\boldsymbol{BC}}}. \end{aligned}\right\} \tag{5-92}$$

Умножив и разделив второе из этих выражений на $\sqrt{\boldsymbol{AD}} - \sqrt{\boldsymbol{BC}}$ и учитывая, что $\boldsymbol{AD} - \boldsymbol{BC} = 1$, получим

$$e^{-\Gamma} = \sqrt{\boldsymbol{AD}} - \sqrt{\boldsymbol{BC}}. \tag{5-93}$$

Сложим (5-92) и (5-93), тогда

$$\frac{e^{\Gamma} + e^{-\Gamma}}{2} = \operatorname{ch} \Gamma = \sqrt{\boldsymbol{AD}}. \tag{5-94}$$

Теперь вычтем (5-93) из (5-92), получим

$$\frac{e^{\Gamma} - e^{-\Gamma}}{2} = \operatorname{sh} \Gamma = \sqrt{\boldsymbol{BC}}. \tag{5-95}$$

Далее, из (5-74) и (5-75) находим

$$\sqrt{Z_{01} Z_{02}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{C}}}. \tag{5-96}$$

Наконец, выше имели (5-84).

Решая совместно уравнения (5-94), (5-95), (5-96) и (5-84), найдем интересующую нас зависимость первичных параметров четырехполюсника от его вторичных параметров.

Перемножим (5-94) и (5-84), тогда

$$\boldsymbol{A} = \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \operatorname{ch} \Gamma = m_т \operatorname{ch} \Gamma. \tag{5-97}$$

Разделив (5-94) на (5-84), получим

$$\boldsymbol{D} = \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \operatorname{ch} \Gamma = \frac{1}{m_т} \operatorname{ch} \Gamma. \tag{5-98}$$

Перемножая (5-95) и (5-96), находим

$$\boldsymbol{B} = \sqrt{Z_{01} Z_{02}} \operatorname{sh} \Gamma. \tag{5-99}$$

Наконец, поделив (5-95) на (5-96), определим

$$\boldsymbol{C} = \frac{\operatorname{sh} \Gamma}{\sqrt{Z_{01} Z_{02}}}. \tag{5-100}$$

Найденные значения A, B, C и D подставляем в основные уравнения (5-42) и (5-43), после чего эти уравнения приводятся к виду

$$U_1 = \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}}\,[U_2 \operatorname{ch}\Gamma + Z_{02} I_2 \operatorname{sh}\Gamma] = m_{\text{т}}\,[U_2 \operatorname{ch}\Gamma + Z_{02} I_2 \operatorname{sh}\Gamma]; \qquad (5\text{-}101)$$

$$I_1 = \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}}\left[I_2 \operatorname{ch}\Gamma + \frac{U_2}{Z_{02}} \operatorname{sh}\Gamma\right] = \frac{1}{m_{\text{т}}}\left[I_2 \operatorname{ch}\Gamma + \frac{U_2}{Z_{02}} \operatorname{sh}\Gamma\right]. \qquad (5\text{-}102)$$

Большой практический интерес представляет применение выведенных соотношений к симметричному четырехполюснику. В этом случае все соотношения в значительной мере упрощаются.

Так как для симметричного четырехполюсника $A = D$ и $Z_{01} = Z_{02} = Z_0$, т. е. $m_{\text{т}} = 1$, то формулы (5-97), (5-98), (5-99) и (5-100) обращаются в следующие:

$$A = D = \operatorname{ch}\Gamma; \qquad (5\text{-}103)$$

$$B = Z_0 \operatorname{sh}\Gamma; \qquad (5\text{-}104)$$

$$C = \frac{\operatorname{sh}\Gamma}{Z_0}. \qquad (5\text{-}105)$$

Коэффициент распространения симметричного четырехполюсника будет выражаться формулой, которая получается из (5-89) при $A = D$,

$$\Gamma = \ln(A + \sqrt{BC})$$

или, так как $A^2 - BC = 1$,

$$\Gamma = \ln(A + \sqrt{A^2 - 1}). \qquad (5\text{-}106)$$

Коэффициент Γ представляет собой, вообще говоря, комплексную величину

$$\Gamma = b + ja_{\text{к}}. \qquad (5\text{-}107)$$

Выясним смысл и значение величин b и a_k.

Если симметричный четырехполюсник согласован, то, как это следует из (5-89),

$$\Gamma = \ln\frac{U_1}{U_2} = \ln\frac{I_1}{I_2}. \qquad (5\text{-}108)$$

Отношение комплексных амплитуд U_1/U_2 можно представить в показательной форме:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{U_1}{U_2} e^{j\varphi_K},$$

где φ_K — угол сдвига фаз между напряжениями U_1 и U_2.

Отсюда следует, что

$$\ln \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \ln \frac{U_1}{U_2} + j\varphi_K.$$

Сравнивая это выражение с (5-107), видим, что

$$b = \ln \frac{U_1}{U_2}; \tag{5-109}$$

$$a = \varphi_K. \tag{5-110}$$

Коэффициент b называется собственным (или волновым) затуханием четырехполюсника. Он представляет собой натуральный логарифм отношения амплитуд напряжений (токов) согласованного четырехполюсника и характеризует степень изменения амплитуд напряжения и тока при переходе от входа четырехполюсника к его выходу.

Коэффициент φ_K, который называется коэффициентом фазы (или фазовой постоянной), равен углу сдвига фаз между входным и выходным напряжениями (токами) согласованного четырехполюсника.

Нетрудно выразить коэффициент распространения Г через величину коэффициента передачи (передаточной функции) согласованного четырехполюсника $K(j\omega)$. Получим

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = e^{-\Gamma} \tag{5-111}$$

или, имея в виду (5-108) и (5-109), найдем, что затухание

$$b = \ln \frac{1}{K}, \tag{5-112}$$

где $K = \frac{U_2}{U_1}$ — модуль передаточной функции.

Что касается фазовой постоянной φ_K, то она равна аргументу передаточной функции.

Итак, при прохождении гармонического колебания через согласованный четырехполюсник амплитуда его уменьшается в e^b раз, а фаза изменяется на угол φ_K. (Напомним, что если выходное напряжение отстает по фазе от входного, то угол $\varphi_K > 0$).

Обычно большой интерес представляет соотношение мощностей на выходе P_2 и входе P_1 согласованного четырехполюсника.

Положим, что характеристическое сопротивление чисто активно. Тогда мощность, потребляемая сопротивлением нагрузки (так как $Z_н = Z_0$),

$$P_2 = \frac{U_2^2}{2Z_0}. \tag{5-113}$$

Мощность, подводимая источником питания к входу четырехполюсника (так как $Z_{вх} = Z_н = Z_0$),

$$P_1 = \frac{U_1^2}{2Z_0}. \tag{5-114}$$

Их отношение, т. е. коэффициент полезного действия четырехполюсника

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{U_2^2}{U_1^2} = e^{-2b}. \qquad (5\text{-}115)$$

в) Логарифмические единицы затухания

Величину затухания четырехполюсника можно характеризовать отношением U_1/U_2 (или I_1/I_2). Однако, основываясь на (5-109), затухание можно оценивать числом, равным показателю степени, в которую надо возвести основание натуральных логарифмов e, чтобы получить отношение U_1/U_2 (или I_1/I_2). Это число содержит в себе b единиц, которые называют неперами.

Таким образом, непер есть логарифмическая единица отношения двух напряжений или токов:

$$b = \ln\frac{U_1}{U_2} = \ln\frac{I_1}{I_2}\ [\text{неп}].$$

Затуханию $b = 1$ *неп*, очевидно, соответствует отношение

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_2} = e^1 \approx 2{,}78;$$

отношение же $\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_2} = 1$ соответствует затуханию $b = 0$.

На рис. 5-9 показана зависимость затухания в неперах от величины отношения $\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_2}$.

Приняв во внимание (5-115), затухание, выраженное в неперах, можно представить так:

$$b = \frac{1}{2}\ln\frac{P_1}{P_2}\ [\text{неп}], \qquad (5\text{-}116)$$

т. е. оно равно половине натурального логарифма отношения мощностей на входе и выходе четырехполюсника.

На оси абсцисс графика рис. 5-9 нанесена также и шкала $\frac{P_1}{P_2} = \frac{U_1^2}{U_2^2} = \frac{I_1^2}{I_2^2}$. Соотношению мощностей $\frac{P_1}{P_2} = 100$ соответствует затухание $b \approx 2{,}3$ *неп*; величине $\frac{P_1}{P_2} = 10\,000$ соответствует $b \approx$ $\approx 4{,}6$ *неп* и т. д.

Наряду с непером в радиотехнике пользуются другой логарифмической единицей, называемой бел. Введение этой единицы базируется на применении десятичных логарифмов взамен натуральных.

Затухание, выраженное в белах, равно степени, в которую надо возвести 10, чтобы получить отношение мощностей P_1/P_2, т. е.

$$b = \lg\frac{P_1}{P_2}\ [\text{б}] \qquad (5\text{-}117)$$

или, так как $\frac{P_1}{P_2} = \frac{U_1^2}{U_2^2} = \frac{I_1^2}{I_2^2}$, то

$$b = 2\lg\frac{U_1}{U_2} = 2\lg\frac{I_1}{I_2}\ [\text{б}]. \qquad (5\text{-}118)$$

Единица бел малоудобна, так как она слишком крупна. Поэтому обычно пользуются более мелкой единицей, равной 0,1 *б* и называемой д е ц и б е л.

Выражая отношение мощностей или напряжений (токов) в децибелах, вместо (5-117) и (5-118) получим:

$$b = 10 \lg \frac{P_1}{P_2} \ [\partial б]; \qquad (5\text{-}119)$$

$$b = 20 \lg \frac{U_1}{U_2} = 20 \lg \frac{I_1}{I_2} \ [\partial б]. \qquad (5\text{-}120)$$

На оси ординат рис. 5-9 наряду со шкалой неперов нанесена также и шкала децибел. Отношению мощностей $\frac{P_1}{P_2} = 10^6$, как

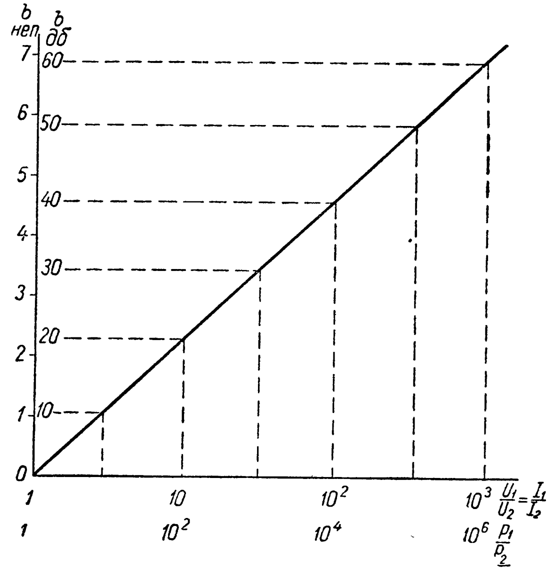


Рис. 5-9. Связь логарифмических единиц с отношением $\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_2}$.

видно, соответствует затухание, равное 60 *дб*; отношению $\frac{P_1}{P_2} = 10^4$ — затухание 40 *дб* и т. д.

Неперы и децибелы, очевидно, связаны между собой постоянным коэффициентом. Выразив одно и то же соотношение мощностей в неперах [см. (5-116)] и децибелах [см. (5-119)], получим

$$b = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2} \approx 1{,}15 \lg \frac{P_1}{P_2} \ [неп],$$

$$b = 10 \lg \frac{P_1}{P_2} \ [\partial б],$$

откуда

$$1 \ \partial б \approx 0{,}115 \ неп; \ 1 \ неп \approx 8{,}7 \ \partial б.$$

Логарифмическими единицами уровней в настоящее время широко пользуются не только применительно к четырехполюсникам, но и вообще для измерения отношения каких-либо напряжений (токов), обозначаемых ниже через U' и U''.

Если это отношение больше единицы:

$$b = \frac{U'}{U''} > 1,$$

то, будучи выражено в логарифмических единицах, например в децибелах, оно будет величиной положительной:

$$b = 20 \lg \frac{U'}{U''} > 0.$$

Если же $U' < U''$, т. е. их отношение меньше единицы:

$$b = \frac{U'}{U''} < 1,$$

то оно же, выраженное в децибелах, будет отрицательно:

$$b = 20 \lg \frac{U'}{U''} < 0.$$

5-5. Эквивалентные схемы пассивных линейных четырехполюсников

Чтобы применить изложенную теорию к расчету конкретных цепей, необходимо знать три из четырех параметров четырехполюсника $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ (или вторичные параметры Г, $Z_{0\,1}$, $Z_{0\,2}$).

В том случае, когда внутреннее устройство четырехполюсника неизвестно или недоступно, параметры можно определить экспериментально из опытов холостого хода и короткого замыкания. Если же схема четырехполюсника известна, то параметры его в каждом отдельном случае могут быть рассчитаны по заданным значениям сопротивлений элементов, его составляющих. Для облегчения этого расчета желательно привести четырехполюсник к упрощенной эквивалентной схеме, содержащей минимальное количество элементов.

Простейшими эквивалентными схемами, к которым обычно могут быть приведены схемы четырехполюсников, являются изображенные на рис. 5-10 Г-, Т- и П-образные схемы. Составляющие их элементы Z_a, Z_b и Z_c являются в общем случае комплексными сопротивлениями.

Пусть известны сопротивления Z_a, Z_b и Z_c элементов Т-образного четырехполюсника. Найдем выражения, определяющие зависимость первичных параметров $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ от этих сопротивлений.

Напишем уравнения Кирхгофа для схемы рис. 5-10, *в*:

$$\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{I}_3; \quad (5\text{-}121)$$

$$\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{I}_1 Z_a + \boldsymbol{I}_2 Z_b + \boldsymbol{U}_2. \quad (5\text{-}122)$$

Преобразуем эти выражения, чтобы привести их к виду основных уравнений четырехполюсника (5-42)—(5-43).

Из схемы рис. 5-10, *в* видно, что

$$\boldsymbol{I}_3 = \frac{\boldsymbol{U}_2 + \boldsymbol{I}_2 Z_b}{Z_c}.$$

Поэтому

$$\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{I}_2 + \frac{\boldsymbol{U}_2 + \boldsymbol{I}_2 Z_b}{Z_c} = \frac{1}{Z_c} \boldsymbol{U}_2 + \left(1 + \frac{Z_b}{Z_c}\right) \boldsymbol{I}_2. \quad (5\text{-}123)$$

Сопоставляя это с (5-43), видим, что для Т-образного четырехполюсника

$$C = \frac{1}{Z_c}; \tag{5-124}$$

$$D = 1 + \frac{Z_b}{Z_c}. \tag{5-125}$$

Подставим теперь в (5-122) вместо I_1 его значение из (5-123); тогда получим

$$U_1 = \left(1 + \frac{Z_a}{Z_c}\right) U_2 + \left(Z_a + Z_b + \frac{Z_a Z_b}{Z_c}\right) I_2. \tag{5-126}$$

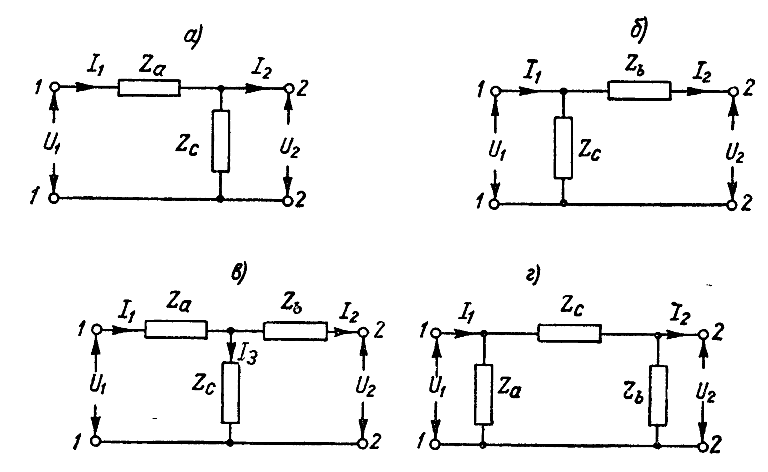


Рис. 5-10. Эквивалентные схемы четырехполюсников: *а* и *б* — Г-образные; *в* — Т-образная; *г* — П-образная.

Если сравнить (5-126) с (5-42), станет очевидным, что в Т-образном четырехполюснике

$$A = 1 + \frac{Z_a}{Z_c}; \tag{5-127}$$

$$B = Z_a + Z_b + \frac{Z_a Z_b}{Z_c}. \tag{5-128}$$

Таким образом, формулы (5-124), (5-125), (5-127) и (5-128) дают возможность, зная данные эквивалентной схемы Т-четырехполюсника, найти его первичные параметры.

Теперь не составит труда определить и характеристические сопротивления Т-четырехполюсника.

Согласно (5-76) входное характеристическое сопротивление

$$Z_{01} = \sqrt{\frac{AB}{CD}}.$$

Подставляя сюда найденные значения первичных параметров A, B, C, D, получим зависимость $Z_{0\,1}$ от сопротивлений элементов Т-образного четырехполюсника

$$Z_{0\,1} = \sqrt{\frac{Z_a + Z_c}{Z_b + Z_c}(Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_a Z_c)}. \tag{5-129}$$

Выходное характеристическое сопротивление

$$Z_{02}=\sqrt{\frac{BD}{AC}}=\sqrt{\frac{Z_b+Z_c}{Z_a+Z_c}(Z_aZ_b+Z_bZ_c+Z_aZ_c)}. \qquad (5\text{-}130)$$

Решение многих задач облегчается, если для Т-образного четырехполюсника воспользоваться обозначениями:

$$Z_{\mathrm{I}}=Z_a+Z_c; \qquad (5\text{-}131)$$

$$Z_{\mathrm{II}}=Z_b+Z_c. \qquad (5\text{-}132)$$

Величина Z_{I} представляет собой полное сопротивление цепи (первичной), составленной из последовательно соединенных Z_a и Z_c, т. е. входное сопротивление на зажимах *1-1* при разомкнутом выходе *2-2*. Аналогично Z_{II} — полное сопротивление цепи (вторичной), составленной из элементов Z_b и Z_c, т. е. выходное сопротивление на зажимах *2-2* при разомкнутых точках *1-1*.

Учитывая (5-131) и (5-132), после простых преобразований найдем для параметров Т-образного четырехполюсника $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ новые выражения:

$$\boldsymbol{A}=\frac{Z_{\mathrm{I}}}{Z_c}; \qquad (5\text{-}133)$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{Z_{\mathrm{I}}Z_{\mathrm{II}}-Z_c^2}{Z_c}=\frac{Z_{\mathrm{I}}Z_{\mathrm{II}}}{Z_c}-Z_c; \qquad (5\text{-}134)$$

$$\boldsymbol{C}=\frac{1}{Z_c};$$

$$\boldsymbol{D}=\frac{Z_{\mathrm{II}}}{Z_c}. \qquad (5\text{-}135)$$

Теперь характеристические сопротивления могут быть выражены так:

$$Z_{01}=\sqrt{\frac{Z_{\mathrm{I}}}{Z_{\mathrm{II}}}(Z_{\mathrm{I}}Z_{\mathrm{II}}-Z_c^2)}; \qquad (5\text{-}136)$$

$$Z_{02}=\sqrt{\frac{Z_{\mathrm{II}}}{Z_{\mathrm{I}}}(Z_{\mathrm{I}}Z_{\mathrm{II}}-Z_c^2)}. \qquad (5\text{-}137)$$

Для того чтобы Т-четырехполюсник был симметричным, необходимо соблюдение условия $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}$. Как видно из (5-127) и (5-125), это условие выполняется, если сопротивления Z_a и Z_b равны между собой (см. рис. 5-3).

Действительно, происходит ли при этом передача слева направо или справа налево — режим во внешних цепях остается неизменным.

Сопротивления первичной Z_{I} и вторичной Z_{II} цепей в симметричном Т-четырехполюснике также равны между собой: $Z_{\mathrm{I}}=Z_{\mathrm{II}}=Z$.

Для первичных параметров Т-образного симметричного четырехполюсника, учитывая, что $Z_a=Z_b$ и $Z_{\mathrm{I}}=Z_{\mathrm{II}}=Z$, получим:

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}=1+\frac{Z_a}{Z_c}=\frac{Z}{Z_c}; \qquad (5\text{-}138)$$

$$\boldsymbol{B}=Z_a\left(2+\frac{Z_a}{Z_c}\right)=\frac{Z^2}{Z_c}-Z_c; \qquad (5\text{-}139)$$

$$\boldsymbol{C}=\frac{1}{Z_c}. \qquad (5\text{-}140)$$

Расчетные формулы для определения

Эквивалентные схемы \ Параметры	A	D	B	C
Несимметричный Т-четырехполюсник $Z_I = Z_a + Z_c$; $Z_{II} = Z_b + Z_c$	$1+\frac{Z_a}{Z_c}=\frac{Z_I}{Z_c}$	$1+\frac{Z_b}{Z_c}=\frac{Z_{II}}{Z_c}$	$Z_a+Z_b+\frac{Z_aZ_b}{Z_c}=\frac{Z_IZ_{II}}{Z_c}-Z_c$	$\frac{1}{Z_c}$
Симметричный Т-четырехполюсник $Z = Z_a + Z_c$	$A = D = 1+\frac{Z_a}{Z_c}=\frac{Z}{Z_c}$		$Z_a\left(2+\frac{Z_a}{Z_c}\right)=\frac{Z^2}{Z_c}-Z_c$	$\frac{1}{Z_c}$
Несимметричный П-четырехполюсник	$1+\frac{Z_c}{Z_b}$	$1+\frac{Z_c}{Z_a}$	Z_c	$\frac{Z_a+Z_b+Z_c}{Z_aZ_b}$
Симметричный П-четырехполюсник	$A = D = 1+\frac{Z_c}{Z_a}$		Z_c	$\frac{2Z_a+Z_c}{Z_a^2}$

Наконец, характеристическое сопротивление симметричного Т-образного четырехполюсника [см. формулы (5-129), (5-130), (5-136) и (5-137)]

$$Z_0 = \sqrt{Z_a(Z_a+2Z_c)} = \sqrt{Z^2 - Z_c^2}. \qquad (5\text{-}141)$$

Мы получили ряд расчетных формул для Т-образного четырехполюсника, которые могут быть применены при решении конкретных задач, связанных с использованием пассивных линейных четырехполюсников в радиотехнических цепях.

Применяя подобную же методику, можно получить расчетные формулы и для эквивалентной схемы П-образного четырехполюсника. Эти формулы приведены в табл. 5-3, в которую помещены также и полученные выше зависимости для Т-образного четырехполюсника.

параметров четырехполюсников

Z_{01}	Z_{02}	Γ
$\sqrt{\frac{Z_a+Z_c}{Z_b+Z_c}}\times \times\sqrt{Z_aZ_b+Z_bZ_c+Z_aZ_c}= =\sqrt{\frac{Z_I}{Z_{II}}(Z_IZ_{II}-Z_c^2)}$	$\sqrt{\frac{Z_b+Z_c}{Z_a+Z_c}}\times \times\sqrt{Z_aZ_b+Z_bZ_c+Z_aZ_c}= =\sqrt{\frac{Z_{II}}{Z_I}(Z_IZ_{II}-Z_c^2)}$	$\operatorname{Arch}\left[\frac{\sqrt{Z_IZ_{II}}}{Z_c}\right]$
$Z_{01}=Z_{02}=Z_{0T}=\sqrt{Z_a(Z_a+2Z_c)}=\sqrt{Z^2-Z_c^2}$		$\operatorname{Arch}\left[\frac{Z}{Z_c}\right]$
$Z_a\sqrt{\frac{Z_b+Z_c}{Z_a+Z_c}}\sqrt{\frac{Z_c}{Z_a+Z_b+Z_c}}$	$Z_b\sqrt{\frac{Z_a+Z_c}{Z_b+Z_c}}\sqrt{\frac{Z_c}{Z_a+Z_b+Z_c}}$	$\operatorname{Arch}\left[\sqrt{\frac{(Z_a+Z_c)(Z_b+Z_c)}{Z_aZ_b}}\right]$
$Z_{01}=Z_{02}=Z_{0\Pi}=Z_a\sqrt{\frac{Z_c}{2Z_a+Z_c}}$		$\operatorname{Arch}\left[\frac{Z_a+Z_c}{Z_a}\right]$

5-6. Четырехполюсник в системе передачи электрической энергии

Пассивный четырехполюсник в электрических, в частности радиотехнических, цепях обычно выполняет роль промежуточного звена между источником энергии и ее потребителем. Поэтому изучение условий, при которых может быть получена наибольшая мощность в нагрузке, представляет большой интерес.

а) Условия получения наибольшей мощности в сопротивлении нагрузки

Прежде чем рассматривать эти условия, представим себе, что источник энергии непосредственно, без промежуточного четырехполюсника, соединен с сопротивлением нагрузки (рис. 5-11, *а*). Как внутреннее сопротивление источника $Z_i = R_i + jX_i$, так и сопротивление нагрузки $Z_н = r_н + jx_н$ являются в общем случае комплексными величинами.

Установим, каким требованиям должно отвечать сопротивление нагрузки для того, чтобы в активной составляющей этого сопротивления выделялась наибольшая мощность.

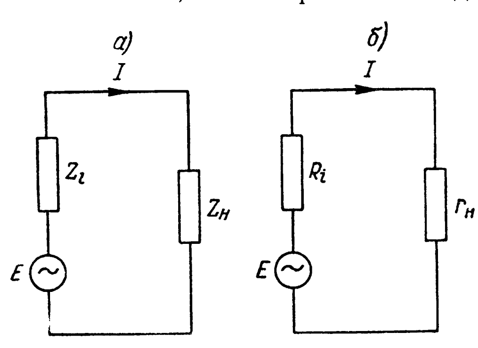


Рис. 5-11. Генератор, нагруженный на сопротивление $Z_н$.

Комплексная амплитуда тока в цепи

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z_i + Z_н}.$$

Амплитуда тока будет

$$I = \frac{E}{\sqrt{(R_i + r_н)^2 + (X_i + x_н)^2}},$$

где E — амплитуда э. д. с. источника.

Активная мощность, расходуемая в сопротивлении $r_н$ нагрузки,

$$P = \frac{1}{2} I^2 r_н = \frac{1}{2} \frac{E^2 r_н}{(R_i + r_н)^2 + (X_i + x_н)^2}.$$

Отсюда видно, что первым условием получения максимума P является равенство

$$x_н = -x_i. \tag{5-142}$$

Тогда эквивалентная схема приобретает вид рис. 5-11, *б*, и мощность, выделяемая в сопротивлении $r_н$, становится равной

$$P_{макс} = \frac{1}{2} \cdot \frac{E^2 r_н}{(R_i + r_н)^2}.$$

Дифференцируя $P_{макс}$ по $r_н$ и приравнивая производную нулю, находим второе условие, при выполнении которого активная мощность достигает наибольшего возможного (максимум максиморум) значения,

$$r_н = R_i. \tag{5-143}$$

При этом

$$P_{mm} = \frac{E^2}{8R_i}. \tag{5-144}$$

Итак, условия получения наибольшей мощности в нагрузке при питании ее генератором с заданными параметрами, могут быть выражены одной формулой:

$$r_н + jx_н = R_i - jX_i \qquad (5\text{-}145)$$

или, иначе,

$$Z_н = \hat{Z}_i, \qquad (5\text{-}146)$$

где $\hat{Z}_i$ — комплекс, сопряженный с комплексом внутреннего сопротивления генератора.

При анализе энергетики цепи постоянного тока было получено аналогичное требование к величине сопротивления нагрузки [см. (2-14)]. Найденный теперь для цепи переменного тока результат является обобщающим; формула (2-14) вытекает из него как частный случай (для постоянного тока всегда $X_i = x_н = 0$).

Если условие (5-146) выполняется, то мы говорим, что генератор и нагрузка согласованы.

Чтобы выполнить требование (5-142), в схему часто вводят специальные реактивности соответствующих знаков с тем, чтобы сумма реактивных сопротивлений, входящих в цепь, равнялась нулю.

б) Четырехполюсник как согласующий трансформатор сопротивления

В том случае, когда согласование путем непосредственного подбора величин R_i и $r_н$ оказывается невозможным (т. е. когда эти величины заданы), между генератором и сопротивлением нагрузки должен быть включен трансформатор сопротивления $T_с$ (рис. 5-12).

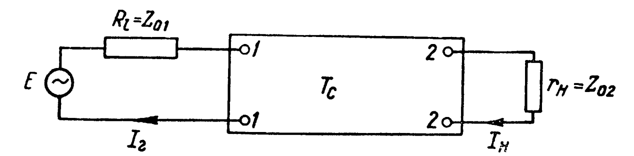


Рис. 5-12. Четырехполюсник как согласующий трансформатор.

Как было пояснено в § 5-4, п. «а», требуемая трансформация сопротивления может быть достигнута с помощью четырехполюсника, если его параметры подобраны так, что входное характеристическое сопротивление $Z_{01} = R_i$, а выходное характеристическое сопротивление $Z_{02} = r_н$.

Тогда $m_т^2 = \frac{Z_{01}}{Z_{02}} = \frac{R_i}{r_н}$, и входное сопротивление согласно (5-91)

$$Z_{вх} = m_т^2 Z_{02} = Z_{01}$$

или

$$Z_{вх} = m_т^2 r_н = R_i,$$

т. е. генератор работает на согласованную нагрузку. Ток, отдаваемый им,

$$I_{mm} = \frac{E}{2R_i}.$$

Если коэффициент распространения $\Gamma = b + j\varphi_к = 0$, то четырехполюсник является идеальным трансформатором. При этом ток через сопротивление нагрузки имеет максимально возможную величину

$$I_{нmm} = m_1 I_{mm} = \sqrt{\frac{R_i}{r_н}} \cdot \frac{E}{2R_i} = \frac{E}{2\sqrt{R_i r_н}}. \qquad (5\text{-}147)$$

Это выражение, как и следовало ожидать, совпадает с формулой (4-143), полученной при анализе системы связанных контуров. Роль внутреннего сопротивления генератора тогда играло сопротивление первичного контура r_1, а роль величины $r_н$ — сопротивление вторичного контура r_2.

Мощность, выделяемая в этих условиях в сопротивлении нагрузки,

$$P_{нmm} = \frac{1}{2} I_н^2 R_i = \frac{1}{8} \cdot \frac{E^2}{R_i},$$

т. е. она равна наибольшей мощности, которая может быть получена от данного источника питания.

В реальном четырехполюснике, у которого затухание $b \neq 0$, выходная мощность $P_н$ будет, разумеется, несколько меньше $P_{нmm}$, а именно

$$P_н = P_{нmm} - P_{пот},$$

где $P_{пот}$, мощность, теряемая внутри четырехполюсника.

Итак, можно сформулировать условия, выполнение которых обеспечивает передачу наибольшей мощности от источника питания через четырехполюсник к нагрузке.

1. Реактивные составляющие внутреннего сопротивления генератора и сопротивления нагрузки должны быть сведены к нулю, что может быть достигнуто включением в схему компенсирующих реактивностей соответствующих знаков.

Тем самым схема четырехполюсника приводится к эквивалентной схеме рис. 5-12.

2. Внутреннее сопротивление R_i должно быть равно входному характеристическому сопротивлению Z_{01}. Иначе говоря, четырехполюсник должен быть согласован на входе.

3. Сопротивление нагрузки $r_н$ должно быть равно выходному характеристическому сопротивлению Z_{02}, т. е. четырехполюсник должен быть согласован на выходе.

Тот случай, когда четырехполюсник согласован как на входе, так и на выходе, называется п о л н ы м с о г л а с о в а н и е м. Если же выполнено только одно из условий согласования, то четырехполюсник с о г л а с о в а н ч а с т и ч н о.

5-7. Цепочечные схемы

Цепочечной (или цепной) схемой соединения ряда четырехполюсников, как известно, называют такую схему, в которой выходные зажимы каждого из составляющих цепь четырехполюсников (звеньев) соединяются с входными зажимами последующего звена (рис. 5-13). Сопротивление нагрузки $Z_н$ подключается к выходу последнего n-го звена цепочки.

В общем случае четырехполюсники, составляющие цепную схему, могут иметь совершенно различные параметры: коэффициент распространения Г и характеристические сопротивления Z_{01} и Z_{02}. Однако при произвольных характеристических сопротивлениях

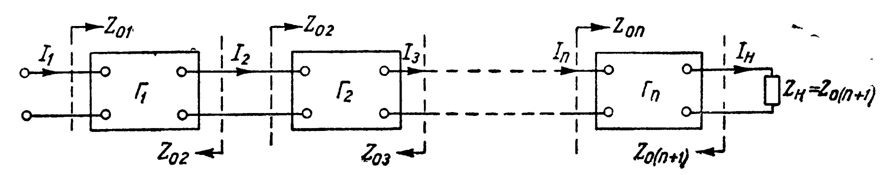


Рис. 5-13. Цепная схема, составленная из четырехполюсников.

выход, например, первого четырехполюсника не будет согласован со своей нагрузкой, т. е. с входным сопротивлением второго четырехполюсника. Как правило, всегда стремятся осуществить согласованное включение отдельных звеньев цепной схемы. Для этого необходимо, чтобы выходное характеристическое сопротивление одного четырехполюсника равнялось входному характеристическому сопротивлению следующего за ним и чтобы сопротивление нагрузки равнялось выходному характеристическому сопротивлению последнего звена, что и показано на рис. 5-13.

При согласованном включении четырехполюсников на основании (5-84) и (5-88) можно написать:

$$\frac{I_1}{I_2}\sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} = e^{\Gamma_1},$$

$$\frac{I_2}{I_3}\sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{03}}} = e^{\Gamma_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{I_{n-1}}{I_n}\sqrt{\frac{Z_{0(n-1)}}{Z_{0n}}} = e^{\Gamma_n},$$

где Γ_1, Γ_2, ..., Γ_n — коэффициенты распространения звеньев.

Перемножив обе части этих выражений, получим

$$\frac{I_1}{I_n}\sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{0n}}} = e^{(\Gamma_1+\Gamma_2+\ldots+\Gamma_n)} = e^{\Gamma_э}. \qquad (5\text{-}148)$$

Здесь $\Gamma_э$ — коэффициент распространения результирующего (эквивалентного) четырехполюсника.

Из (5-148) следует важный вывод. Коэффициент распространения цепной схемы, составленной из согласованных четырехполюсников, равен сумме коэффициентов распространения четырехполюсников составляющих цепочку:

$$\Gamma_э = b_э + j\varphi_{Kэ} = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_i. \qquad (5\text{-}149)$$

Очевидно, что затухание $b_э$ и фазовая постоянная $\varphi_{Kэ}$ равны сумме затуханий и фазовых постоянных отдельных четырехполюсников:

$$b_э = \sum_{i=1}^{n} b_i; \qquad (5\text{-}150)$$

$$\varphi_{Kэ} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{Ki}. \qquad (5\text{-}151)$$

Интересно рассмотреть тот случай, когда цепная схема составлена из идентичных симметричных четырехполюсников. Тогда для каждого из звеньев $Z_{01} = Z_{02} = Z_0$.

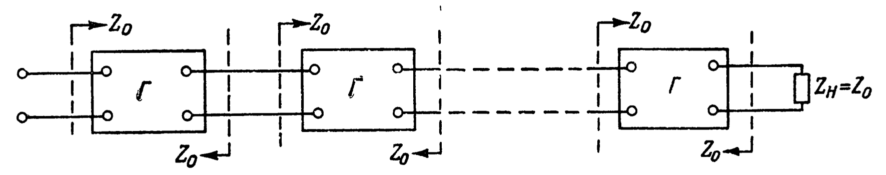


Рис. 5-14. Цепная схема, составленная из идентичных симметричных четырехполюсников.

В режиме согласования сопротивление нагрузки $Z_н = Z_0$ и входное сопротивление каждого из четырехполюсников, так же, как и входное сопротивление всей цепи, равно той же величине Z_0 (рис. 5-14). Иными словами, при последовательном соединении нескольких одинаковых звеньев характеристическое сопротивление результирующей системы равно характеристическому сопротивлению одного звена.

Из сказанного видно, что в согласованной цепной схеме количество звеньев не влияет на величину входного сопротивления — оно всегда равно характеристическому сопротивлению Z_0.

Допустим теперь, что число идентичных звеньев бесконечно велико ($n \to \infty$). В этих условиях величина сопротивления нагрузки, по-видимому, уже не сказывается на входном сопротивлении системы. Даже если $Z_н \neq Z_0$, например, если $Z_н = \infty$ (холостой ход) или $Z_н = 0$ (короткое замыкание), входное сопротивление остается равным Z_0. При очень большом (в пределе бесконечно большом) числе n добавление дополнительных звеньев и изменение величины нагрузки уже не влияет на величину входного сопротивления системы.

Для иллюстрации этого положения рассмотрим следующий простой пример.

Цепная схема составлена из одинаковых Т-образных симметричных четырехполюсников (рис. 5-15), для которых

$$Z_a = Z_b = Z_c = r.$$

Пользуясь табл. 5-3, определяем характеристическое сопротивление

$$Z_0 = \sqrt{Z_a (Z_a + 2Z_c)} = \sqrt{3}r.$$

При согласованном сопротивлении нагрузки $Z_н = Z_0 = \sqrt{3}r$ входное сопротивление независимо от числа звеньев равно той же величине $Z_0 = \sqrt{3}r$.

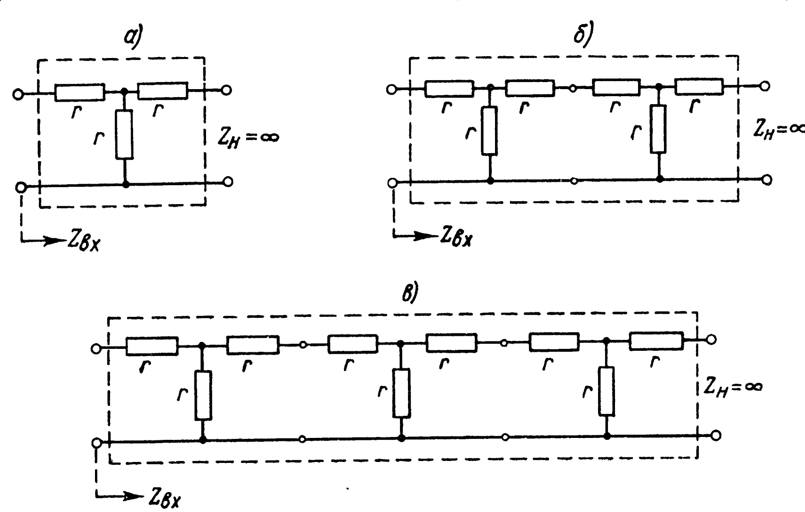


Рис. 5-15. К расчету входного сопротивления цепных схем.

Положим теперь, что выход системы разомкнут ($Z_н = \infty$). Тогда (рис. 5-15, *а*) при одном звене ($n = 1$) входное сопротивление

$$Z_{вх1} = 2r.$$

При двух звеньях ($n = 2$) — рис. 5-15,*б*

$$Z_{вх2} = r + \frac{3r \cdot r}{4r} = 1{,}75r.$$

В случае, когда число звеньев $n = 3$ (рис. 5-15, *в*)

$$Z_{вх3} = r + \frac{\left(\frac{3}{4}r + 2r\right)r}{\frac{3}{4}r + 2r + r} = 1{,}734r$$

и т. д.

Из этих расчетов и графика $Z_{вх} = f(n)$, приведенного на рис. 5-16, видно, что уже при $n = 3$ входное сопротивление цепи мало отличается от величины $Z_0 = \sqrt{3}r$, а при $n \to \infty$ стремится к величине Z_0, хотя сопротивление нагрузки вовсе и не равно характеристическому сопротивлению.

Если бы мы считали, что $Z_н = 0$ (короткое замыкание выхода), то входное сопротивление изменялось бы по нижней кривой рис. 5-16, из которой видно, что и в этом случае с увеличением n входное сопротивление стремится к той же величине $Z_0 = \sqrt{3}r$.

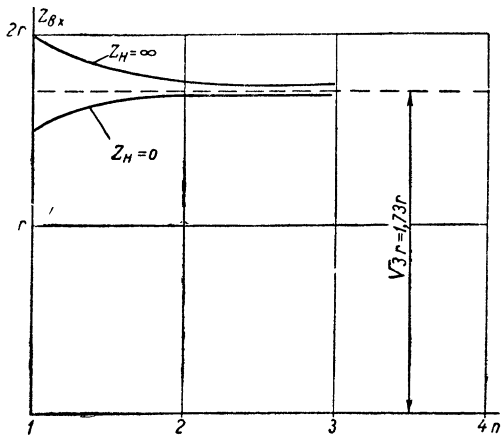


Рис. 5-16. Зависимость входного сопротивления от числа звеньев цепочечной схемы.

Таким образом можно дать следующее определение: характеристическое сопротивление симметричного четырехполюсника с потерями равно пределу, к которому стремится входное сопротивление цепной схемы, составленной из таких четырехполюсников и произвольно нагруженной на конце, когда число звеньев цепи стремится к бесконечности:

$$Z_0 = \lim [Z_{вх}]_{n \to \infty}. \qquad (5\text{-}152)$$

Остается рассмотреть вопрос о коэффициенте распространения цепной схемы, состоящей из n идентичных симметричных четырехполюсников.

Из (5-149) следует, что при $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \ldots = \Gamma$

$$\Gamma_э = n\Gamma = n(b + j\varphi_K) \qquad (5\text{-}153)$$

и, значит,

$$b_э = nb, \qquad (5\text{-}154)$$

$$\varphi_{Kэ} = n\varphi_K, \qquad (5\text{-}155)$$

т. е. результирующие затухание и фазовая постоянная растут пропорционально числу звеньев n.

5-8. Матрицы параметров сложных четырехполюсников

Сложный четырехполюсник может быть образован в результате соединения между собой нескольких, в частности двух, четырехполюсников. Если известны параметры каждого из составляющих четырехполюсников, могут быть рассчитаны и параметры результирующего (эквивалентного) четырехполюсника. Этот расчет проще всего производить, оперируя с уравнениями в матричной форме.

Рассмотрим несколько схем соединения четырехполюсников.

а) Последовательное соединение

Под последовательным соединением понимается такое включение четырехполюсников, при котором как входные, так и выходные их зажимы соединены последовательно (рис. 5-17, *а*).

Выразим уравнения исходных четырехполюсников в Z-параметрах. Тогда получим

$$\begin{Vmatrix} U_1' \\ U_2' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Z_{11}' & Z_{12}' \\ Z_{21}' & Z_{22}' \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} I_1' \\ I_2' \end{Vmatrix} = \| Z' \| \times \begin{Vmatrix} I_1' \\ I_2' \end{Vmatrix} \qquad (5\text{-}156)$$

и

$$\begin{Vmatrix} U_1'' \\ U_2'' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Z_{11}'' & Z_{12}'' \\ Z_{21}'' & Z_{22}'' \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} I_1'' \\ I_2'' \end{Vmatrix} = \| Z'' \| \times \begin{Vmatrix} I_1'' \\ I_2'' \end{Vmatrix}. \qquad (5\text{-}157)$$

Здесь $\|Z'\|$, $\|Z''\|$ — Z-матрицы составляющих четырехполюсников.

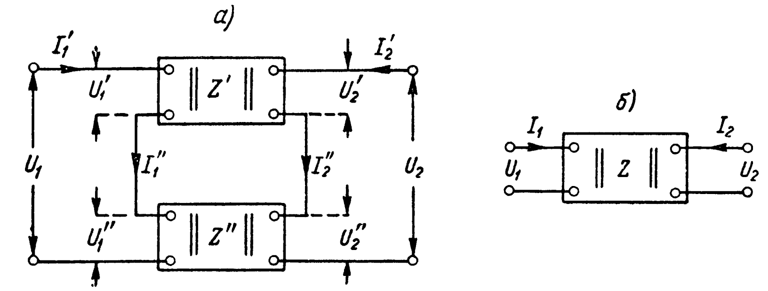


Рис. 5-17. Последовательное соединение четырехполюсников.

Результирующие напряжения и токи на входе и на выходе при последовательном соединении будут:

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= U_1' + U_1'', \\ U_2 &= U_2' + U_2'', \\ I_1 &= I_1' = I_1'', \\ I_2 &= I_2' = I_2''. \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}158)$$

Поэтому, складывая (5-156) и (5-157), для результирующего четырехполюсника (рис. 5-17,*б*), получим

$$\begin{Vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Z_{11}' + Z_{11}'' & Z_{12}' + Z_{12}'' \\ Z_{21}' + Z_{21}'' & Z_{22}' + Z_{22}'' \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Vmatrix} = \| Z \| \times \begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Vmatrix}. \qquad (5\text{-}159)$$

Таким образом, при последовательном соединении

$$\| Z \| = \| Z' \| + \| Z'' \|, \qquad (5\text{-}160)$$

т. е. Z-матрица результирующего четырехполюсника равна сумме Z-матриц исходных четырехполюсников. Отсюда следует, что при расчете цепи последовательно соединенных четырехполюсников удобно пользоваться системой Z-параметров.

б) Параллельное соединение

При параллельном соединении как входные, так и выходные зажимы составляющих четырехполюсников соединяются в параллель (рис. 5-18, *а*).

Используя систему Y-параметров, запишем уравнения исходных четырехполюсников:

$$\begin{Vmatrix} I_1' \\ I_2' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Y_{11}' & Y_{12}' \\ Y_{21}' & Y_{22}' \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} U_1' \\ U_2' \end{Vmatrix} = \| Y' \| \times \begin{Vmatrix} U_1' \\ U_2' \end{Vmatrix} \qquad (5\text{-}161)$$

и

$$\begin{Vmatrix} I_1'' \\ I_2'' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Y_{11}'' & Y_{12}'' \\ Y_{21}'' & Y_{22}'' \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} U_1'' \\ U_2'' \end{Vmatrix} = \| Y'' \| \times \begin{Vmatrix} U_1'' \\ U_2'' \end{Vmatrix}, \qquad (5\text{-}162)$$

где $\|Y'\|$ и $\|Y''\|$ — Y-матрицы четырехполюсников.

Так как в рассматриваемой схеме

$$\left.\begin{aligned} U'_1 &= U''_1 = U_1, \\ U'_2 &= U''_2 = U_2, \\ I_1 &= I'_1 + I''_1, \\ I_2 &= I'_2 + I''_2, \end{aligned}\right\} \tag{5-163}$$

то, складывая (5-161) и (5-162), получим уравнения эквивалентного четырехполюсника (рис. 5-18, *б*):

$$\begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Y'_{11} + Y''_{11} & Y'_{12} + Y''_{12} \\ Y'_{21} + Y''_{21} & Y'_{22} + Y''_{22} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Vmatrix} = \| Y \| \times \begin{Vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Vmatrix}. \tag{5-164}$$

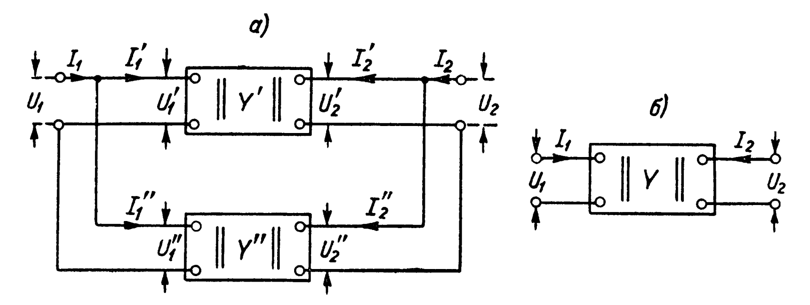


Рис. 5-18. Параллельное соединение четырехполюсников.

Отсюда следует, что

$$\| Y \| = \| Y' \| + \| Y'' \|. \tag{5-165}$$

При параллельном соединении Y-матрица эквивалентной схемы равна сумме Y-матриц исходных четырехполюсников.

в) Последовательно-параллельное соединение

В этом случае входные зажимы исходных четырехполюсников соединяются последовательно, а выходные — параллельно (рис. 5-19, *а*).

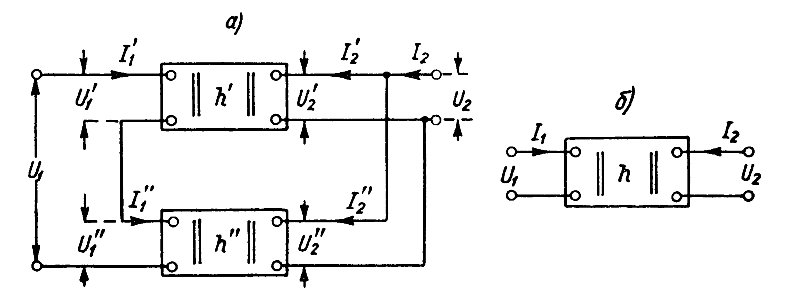


Рис. 5-19. Последовательно-параллельное соединение четырехполюсников.

Теперь воспользуемся системой h-параметров и запишем уравнения четырехполюсников h' и h'' в виде

$$\begin{Vmatrix} U'_1 \\ I'_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} I'_1 \\ U'_2 \end{Vmatrix} = \|h'\| \times \begin{Vmatrix} I'_1 \\ U'_2 \end{Vmatrix} \tag{5-166}$$

и

$$\begin{Vmatrix} U''_1 \\ I''_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} h''_{11} & h''_{12} \\ h''_{21} & h''_{22} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} I''_1 \\ U''_2 \end{Vmatrix} = \|h''\| \times \begin{Vmatrix} I''_1 \\ U''_2 \end{Vmatrix}. \tag{5-167}$$

Здесь $\|h'\|$ и $\|h''\|$ — h-матрицы исходных четырехполюсников.

В схеме последовательно-параллельного соединения

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= U'_1 + U''_1, \\ I_2 &= I'_2 + I''_2, \\ I_1 &= I'_1 = I''_1, \\ U_2 &= U'_2 = U''_2. \end{aligned}\right\} \tag{5-168}$$

Поэтому для результирующего четырехполюсника (рис. 5-19, *б*) получим

$$\begin{Vmatrix} U_1 \\ I_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} h'_{11} + h''_{11} & h'_{12} + h''_{12} \\ h'_{21} + h''_{21} & h'_{22} + h''_{22} \end{Vmatrix} = \|h\| \times \begin{Vmatrix} I_1 \\ U_2 \end{Vmatrix}. \tag{5-169}$$

Таким образом,

$$\|h\| = \|h'\| + \|h''\|. \tag{5-170}$$

г) Параллельно-последовательное соединение

В рассматриваемой схеме (рис. 5-20, *а*) входные зажимы исходных четырехполюсников соединены параллельно, а выходные — последовательно.

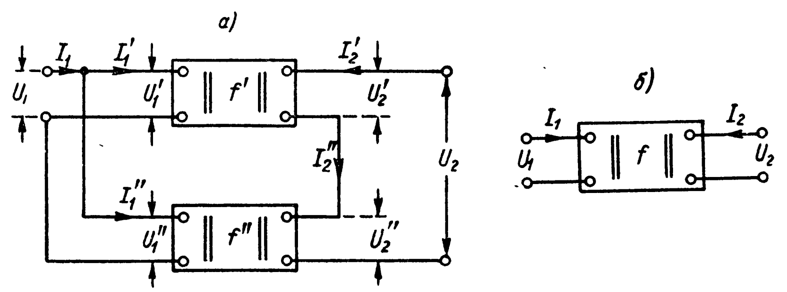


Рис. 5-20. Параллельно-последовательное соединение четырехполюсников.

Если мы в этом случае воспользуемся системой f-параметров, уравнения четырехполюсников примут вид

$$\begin{Vmatrix} I'_1 \\ U'_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} f'_{11} & f'_{12} \\ f'_{21} & f'_{22} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} U'_1 \\ I'_2 \end{Vmatrix} = \|f'\| \times \begin{Vmatrix} U'_1 \\ I'_2 \end{Vmatrix} \tag{5-171}$$

и

$$\begin{Vmatrix} I''_1 \\ U''_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} f''_{11} & f''_{12} \\ f''_{21} & f''_{22} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} U''_1 \\ I''_2 \end{Vmatrix} = \|f''\| \times \begin{Vmatrix} U''_1 \\ I''_2 \end{Vmatrix}, \tag{5-172}$$

где $\|f'\|$ и $\|f''\|$ — матрицы f-параметров исходных четырехполюсников.

Из схемы рис. 5-20, *а* следует, что

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= I_1' + I_1'', \\ U_2 &= U_2' + U_2'', \\ U_1 &= U_1' = U_1', \\ I_2 &= I_2' = I_2''. \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}173)$$

Поэтому, суммируя (5-171) и (5-172), найдем для результирующего четырехполюсника

$$\left\| \begin{matrix} I_1 \\ U_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} f_{11}' + f_{11}'' & f_{12}' + f_{12}'' \\ f_{21}' + f_{21}'' & f_{22}' + f_{22}'' \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} U_1 \\ I_2 \end{matrix} \right\| = \| f \| \times \left\| \begin{matrix} U_1 \\ I_2 \end{matrix} \right\|. \quad (5\text{-}174)$$

Таким образом,

$$\| f \| = \| f' \| + \| f'' \|. \quad (5\text{-}175)$$

5-9. Основы общей теории фильтрующих четырехполюсников

Любые частотно-избирательные цепи могут быть с полным основанием названы ф и л ь т р у ю щ и м и. Из всего множества напряжений разных частот, которое может быть подведено к их входу, они пропускают, отфильтровывают колебания лишь определенных частот, лежащих в пределах их полосы пропускания. Однако известные нам частотно-избирательные цепи — ячейки r, C и r, L, а также колебательные контуры — отличаются, как правило, неравномерным пропусканием частот, входящих в область полосы пропускания.

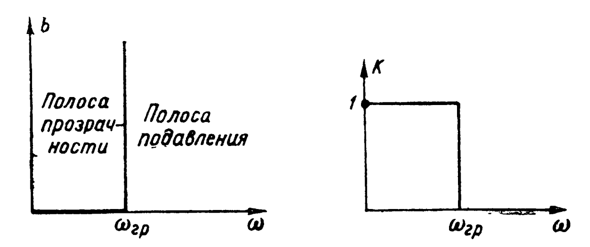


Рис. 5-21. Характеристики идеального фильтра нижних частот.

Можно поставить задачу о создании такого пассивного четырехполюсника, который обладает совершенно одинаковым коэффициентом передачи $K \approx 1$ (затухание $b \approx 0$) в определенной, наперед заданной, полосе частот, называемой п о л о с о й п р о з р а ч н о с т и, и полностью подавляет колебания всех остальных частот.

Система, отвечающая этим требованиям, называется ф и л ь т р у ю щ и м ч е т ы р е х п о л ю с н и к о м, или э л е к т р и ч е с к и м ф и л ь т р о м.

Фильтрующий четырехполюсник, у которого полоса прозрачности простирается от $\omega = 0$ (постоянный ток) до некоторой гра-

ничной частоты $\omega_{гр}$, называется фильтром нижних частот. На рис. 5-21 изображена амплитудно-частотная характеристика идеального фильтра нижних частот в координатах $b\,(\omega)$ и $K\,(\omega)$. Для низких частот (до $\omega = \omega_{гр}$) он совершенно прозрачен ($b = 0$; $K = 1$), а частоты $\omega > \omega_{гр}$ абсолютно не пропускает ($b = \infty$; $K = 0$). Конечно, действительный фильтр не может иметь точно такой характеристики; ее следует рассматривать как предел, к которому можно лишь в той или иной мере приблизиться.

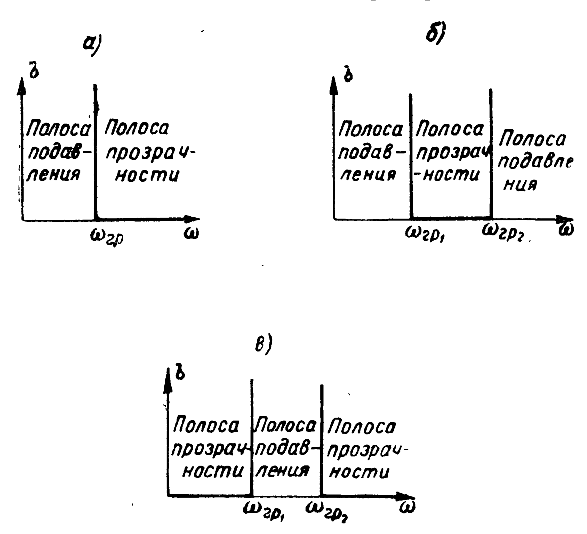


Рис. 5-22. Характеристики идеальных фильтров.

Если полоса прозрачности занимает все частоты выше некоторой определенной $\omega_{гр}$, то такие четырехполюсники носят название фильтров верхних частот (рис. 5-22, *а*).

Полосовые фильтры характеризуются тем, что обе частоты $\omega_{гр1}$ и $\omega_{гр2}$, ограничивающие полосу прозрачности, конечны (рис. 5-22, *б*) и ни одна из них не равна нулю.

Иногда ставится задача задержания определенной полосы частот и в то же время пропускания всех остальных частот. Эта задача решается заграждающим фильтром, идеализированная характеристика которого показана на рис. 5-22, *в*.

В полосе прозрачности фильтрующий четырехполюсник должен в идеале иметь затухание, равное нулю, что было бы возможно лишь в том случае, если бы фильтр не содержал активных сопротивлений. Хотя практически это неосуществимо, мы все же допускаем, что фильтр составлен только из реактивных элементов: индуктивностей и емкостей. Так как обычно детали фильтров имеют малое активное сопротивление, выводы упрощенной теории достаточно удовлетворительно согласуются с опытом.

Часто фильтры строятся по симметричной Т-образной или П-образной схемам. При анализе этих схем введем новые обозначения (рис. 5-23). Каждое из сопротивлений последовательных (продольных) плеч Т-образного фильтра (рис. 5-23, *а*) будем обозначать через $Z_1/2$; сопротивление параллельной (поперечной) ветви — через Z_2. В П-образном фильтре (рис. 5-23, *б*) сопротивление продольного плеча обозначается Z_1, а сопротивления каждой из поперечных ветвей $2Z_2$. Такие обозначения позволяют установить единые

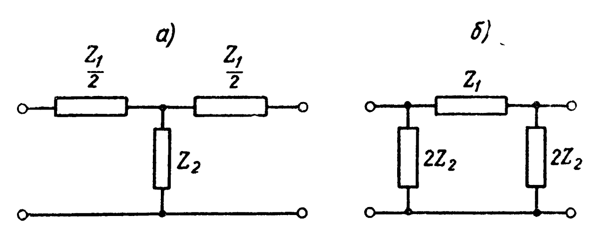


Рис. 5-23. Т- и П-образные схемы фильтров.

количественные соотношения, справедливые для любой схемы фильтра.

Электрический фильтр, как увидим ниже, наилучшим образом выполняет свои функции, если он согласован на выходе.

Поэтому излагаемая ниже теория базируется на предположении, что фильтр работает на согласованную нагрузку.

Основными задачами теории фильтров являются:

1) установление условий, при которых фильтр может иметь полосу прозрачности;

2) определение ширины полосы прозрачности;

3) нахождение уравнений частотных характеристик фильтра.

а) Условие прозрачности фильтра

Так как фильтр согласно сделанному допущению нагружен на сопротивление, равное характеристическому, соотношение напряжений и токов на входе и выходе фильтра в соответствии с (5-108)

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_2} = e^{\Gamma},$$

где U_1 и I_1 — напряжение и ток на входе фильтра; U_2 и I_2 — выходные напряжения и ток. Коэффициент распространения $\Gamma = b + j\varphi_K$ определяется по формуле (5-103).

Величина параметра A при принятых нами обозначениях (рис. 5-23) будет выражаться одной и той же формулой для Т- и П-образной схем [см. табл. 5-3 и формулу (5-127)], а именно:

$$A = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}. \qquad (5\text{-}176)$$

Поэтому

$$\operatorname{ch}\Gamma = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}. \qquad (5\text{-}177)$$

Из определения полосы прозрачности, следует, что для частот, входящих в эту полосу, затухание b равно нулю; фазовая же постоянная φ_K при этих частотах может иметь величину, отличную от нуля. Поэтому коэффициент распространения в полосе прозрачности есть мнимая величина, т. е. $\Gamma = j\varphi_K$, и (5-177) обращается в следующее выражение:

$$\operatorname{ch} j\varphi_K = \cos\varphi_K = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}. \qquad (5\text{-}178)$$

Так как $\cos\varphi_K$ не может быть больше единицы, необходимым условием наличия у четырехполюсника полосы прозрачности является разный характер сопротивлений Z_1 и Z_2. Напомним, что согласно сделанному выше допущению четырехполюсник составлен из чисто реактивных элементов. Если последовательное сопротивление $Z_1 = jx_1$ положительно (имеет индуктивный характер), параллельное сопротивление $Z_2 = jx_2$ должно быть отрицательным (емкостным) и наоборот.

Это условие, будучи необходимым, не является достаточным. Предельными значениями $\cos\varphi_K$ являются -1 и $+1$. Поэтому в полосе прозрачности отношение сопротивлений Z_1 и Z_2 должно удовлетворять неравенству

$$-1 \leqslant 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} \leqslant 1, \qquad (5\text{-}179)$$

которое может быть переписано так:

$$-1 \leqslant \frac{Z_1}{4Z_2} \leqslant 0 \qquad (5\text{-}180)$$

или

$$-1 \leqslant \frac{x_1}{4x_2} \leqslant 0. \qquad (5\text{-}181)$$

Таким образом, необходимым и достаточным условием существования полосы прозрачности является то, чтобы сопротивления x_1 и x_2 были разных знаков, а по абсолютной величине сопротивление x_1 было меньше $4x_2$:

$$|x_1| < |4x_2|. \qquad (5\text{-}182)$$

б) Граничные частоты полосы прозрачности

Неравенство (5-181) дает возможность определить граничные частоты $\omega_{гр}$ полосы прозрачности. Действительно, сопротивления x_1 и x_2 являются функциями частоты: $x_1(\omega)$ и $x_2(\omega)$.

Если вид этих функций известен, граничные частоты согласно (5-181) найдутся из решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_1(\omega_{\text{гр}})}{4x_2(\omega_{\text{гр}})} &= -1, \\ \frac{x_1(\omega_{\text{гр}})}{4x_2(\omega_{\text{гр}})} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5-183}$$

Уравнения (5-183) для большей наглядности полезно решать графически. С этой целью наносят на график две частотные характеристики: $x_1(\omega)$ и $-4x_2(\omega)$.

Точки пересечения этих кривых между собой и точки, в которых кривая $x_1(\omega)$ пересекает ось частот, дают искомые значения граничных частот $\omega_{\text{гр}}$. Некоторые примеры таких решений будут приведены ниже.

Граничные частоты могут быть найдены и из несколько иных соображений.

Имея в виду (5-176) и (5-179), основное неравенство теории фильтров можно записать в виде

$$-1 \leqslant \boldsymbol{A} \leqslant 1. \tag{5-184}$$

Но так как согласно (5-45)

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{K_{\text{х.х}}(j\omega)},$$

то

$$-1 \geqslant K_{\text{х.х}}(j\omega) \geqslant 1 \tag{5-185}$$

или, иначе, в полосе прозрачности модуль коэффициента передачи при холостом ходе

$$K_{\text{х.х}}(\omega) \geqslant 1. \tag{5-186}$$

Для граничных частот это неравенство обращается в равенство:

$$K_{\text{х.х}}(\omega_{\text{гр}}) = 1. \tag{5-187}$$

Таким образом, граничными частотами фильтра являются те частоты, для которых коэффициент передачи при холостом ходе равен единице. Это определение особенно удобно при экспериментальном исследовании фильтра. Из опыта холостого хода находят частотную характеристику $K_{\text{х.х}}(\omega)$. Те частоты, при которых $K_{\text{х.х}} > 1$, лежат в полосе прозрачности, а частоты, для которых $K_{\text{х.х}} = 1$, являются граничными.

в) Частотные характеристики фильтра

Частотными характеристиками фильтра являются зависимости: $b(\omega)$, т. е. амплитудно-частотная характеристика, и $\varphi_K(\omega)$, т. е. фазовая характеристика.

В полосе прозрачности фильтра затухание $b = 0$. Поэтому здесь частотная характеристика $b(\omega)$ сливается с осью частот.

Чтобы найти вид функции $b(\omega)$ в полосе подавления, перепишем (5-177) следующим образом:

$$\operatorname{ch} \Gamma = \operatorname{ch}(b + j\varphi_K) = \operatorname{ch} b \cos \varphi_K + j \operatorname{sh} b \sin \varphi_K = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}. \quad (5\text{-}188)$$

Так как $Z_1 = jx_1$ и $Z_2 = jx_2$ — мнимые величины, то $1 + \frac{Z_1}{2Z_2}$ — величина вещественная. Отсюда следует, что для выполнения равенства (5-188) необходимо, чтобы

$$\operatorname{sh} b \sin \varphi_K = 0. \quad (5\text{-}189)$$

Однако в полосе подавления затухание $b \neq 0$. Поэтому и $\operatorname{sh} b \neq 0$. Стало быть, обязательно условие $\sin \varphi_K = 0$, т. е. в полосе подавления фазовый угол равен или 0, или 180°.

Далее, вещественная часть (5-188) должна быть равна $1 + \frac{Z_1}{2Z_2}$:

$$\operatorname{ch} b \cos \varphi_K = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}.$$

Так как $\cos \varphi_K = \pm 1$, то

$$\operatorname{ch} b = \pm \left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right).$$

Как видно из (5-179), в полосе подавления величина $1 + \frac{Z_1}{2Z_2}$ либо больше +1, либо меньше —1. Однако $\operatorname{ch} b$ может быть только больше +1. Отсюда вытекает, что

если $\left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right) > +1$, то $\cos \varphi_K = +1$ и угол $\varphi_K = 0$;

если же $\left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right) < -1$, то $\cos \varphi_K = -1$, и угол $\varphi_K = 180°$.

Во всех случаях

$$\operatorname{ch} b = \left| 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} \right|. \quad (5\text{-}190)$$

Полученное выражение представляет собой уравнение частотной характеристики в полосе подавления.

Что касается ф а з о в о й характеристики, то выше уже получены все выражающие ее уравнения.

Так, (5-178) является уравнением фазовой характеристики в полосе прозрачности:

$$\varphi_K = \arccos\left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right). \quad (5\text{-}191)$$

В полосе подавления фазовый коэффициент неизменен и равен согласно (5-189) либо 0, либо 180°:

если $\frac{Z_1}{4Z_2} > 0$, то $\varphi_K = 0$;

если $\frac{Z_1}{4Z_2} < -1$, то $\varphi_K = 180°$.

5-10. Фильтр нижних частот

В этом фильтре постоянный ток и все колебания с частотами ниже определенной граничной $\omega_{гр}$ должны пропускаться, а колебания с $\omega > \omega_{гр}$ — подавляться.

Последовательная ветвь фильтра должна представлять ничтожное сопротивление для постоянного тока и нижних частот; вместе с тем для того чтобы высшие частоты задерживались фильтром, последовательное сопротивление должно расти с частотой. Этим требованиям удовлетворяет индуктивность L.

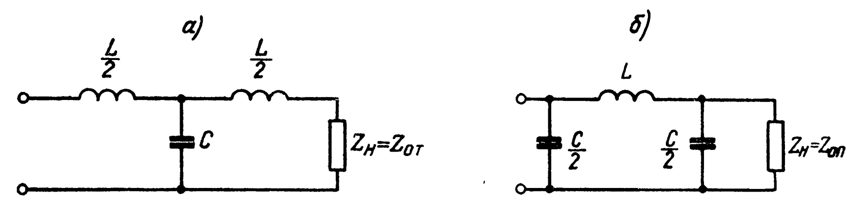


Рис. 5-24. Схемы фильтра нижних частот.

Параллельная ветвь фильтра, наоборот, должна иметь малую проводимость для низких частот с тем, чтобы токи этих частот не шунтировались параллельным плечом. Для высоких частот параллельная ветвь должна иметь большую проводимость, тогда колебания этих частот будут ею шунтироваться и ток на выходе будет ослаблен. Этим условиям отвечает емкость C.

Таким образом, в простейшем фильтре нижних частот последовательное плечо должно представлять собой индуктивное сопротивление, т. е.

$$Z_1 = j\omega L,$$

а параллельное плечо — емкостное сопротивление, т. е.

$$Z_2 = \frac{1}{j\omega C}.$$

Основными схемами фильтра нижних частот являются: Т-образная (рис. 5-24, *а*) и П-образная (рис. 5-24, *б*).

Произведение сопротивлений

$$Z_1 Z_2 = \frac{L}{C} = \rho^2, \tag{5-192}$$

где $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ — характеристика колебательного контура, составленного из индуктивности L и емкости C.

Фильтры, у которых в продольную и поперечные ветви включены взаимно-обратные двухполюсники, так что произведение сопротивлений Z_1 и Z_2 при любой частоте равно постоянной положительной величине ($Z_1 Z_2 = K^2$), называют **фильтрами типа** K. Следовательно, простейший фильтр нижних частот (рис. 5-24) является фильтром типа K.

а) Теория фильтра нижних частот в режиме согласования

Рассмотрим сперва работу фильтра нижних частот в режиме согласования, т. е. когда сопротивление нагрузки $Z_н = Z_0$, что показано на схемах рис. 5-24.

В этом случае применимы общие соотношения теории фильтров, выведенные в предыдущем параграфе.

Чтобы найти граничные частоты фильтра, воспользуемся формулами (5-183). Имеем

$$x_1 = \omega L, \quad x_2 = -\frac{1}{\omega C}.$$

Поэтому

$$\frac{x_1}{4x_2} = -\frac{\omega^2 LC}{4}.$$

Приравнивая в соответствии с (5-183) это выражение нулю, находим, что одной из граничных частот является $\omega = 0$.

Для нахождения другой границы полосы прозрачности имеем

$$\frac{x_1}{4x_2} = -1 \quad \text{или}$$

$$-\frac{\omega_{гр}^2 LC}{4} = -1, \quad (5\text{-}193)$$

откуда

$$\omega_{гр} = \frac{2}{\sqrt{LC}}. \quad (5\text{-}194)$$

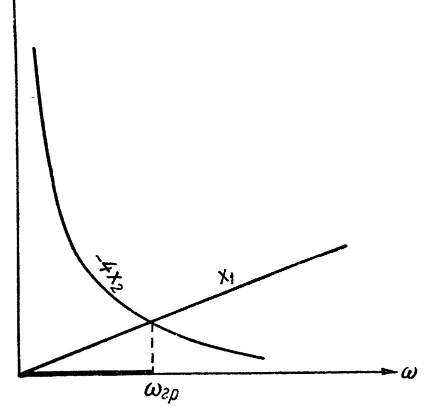


Рис. 5-25. Графическое определение полосы прозрачности фильтра нижних частот.

Тот же результат можно было бы получить путем графического расчета. Строим в одной и той же координатной системе (рис. 5-25): 1) прямую $x_1 = \omega L = \varphi_1(\omega)$ и 2) кривую $-4x_2 = \frac{4}{\omega C} = \varphi_2(\omega)$. Граничные частоты находятся из графика; они равны: 1) частоте $\omega = 0$, где прямая x_1 пересекает ось абсцисс; 2) частоте, при которой $\omega L = \frac{4}{\omega C}$, т. е. $\omega_{гр} = \frac{2}{\sqrt{LC}}$.

Определив границы полосы прозрачности фильтра, обратимся к уравнениям его частотных характеристик.

В полосе прозрачности затухание $b = 0$.

Для полосы подавления имеем (5-190).

В нашем случае

$$\frac{Z_1}{2Z_2} = -\frac{\omega^2 LC}{2} = -2\frac{\omega^2}{\omega_{\text{гр}}^2}.$$

Поэтому

$$\operatorname{ch} b = \left|1 - 2\frac{\omega^2}{\omega_{\text{гр}}^2}\right|. \tag{5-195}$$

Введем обозначение

$$\nu = \frac{\omega}{\omega_{\text{гр}}}. \tag{5-196}$$

Величина ν представляет собой нормированную (относительно граничной) частоту.

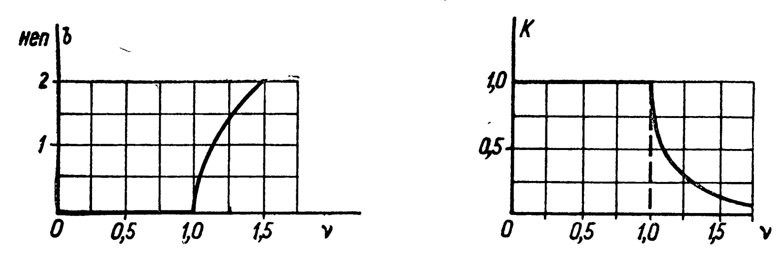


Рис. 5-26. Частотные характеристики фильтра нижних частот.

Тогда вместо (5-195) получим

$$b = \operatorname{Arch}|1 - 2\nu^2|. \tag{5-197}$$

На рис. 5-26 показана частотная характеристика затухания $b = f(\nu)$. Восходящая часть кривой построена по формуле (5-197). Здесь же частотная характеристика изображена в координатах K, ν:

$$K = e^{-b} = F(\nu),$$

где K — модуль коэффициента передачи.

Фазовая характеристика фильтра нижних частот в полосе прозрачности согласно (5-191) есть функция

$$\varphi_K = \arccos\left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right) = \arccos(1 - 2\nu^2). \tag{5-198}$$

Что касается полосы подавления, то, так как $\frac{x_1}{4x_2} < -1$, в ней $\varphi_K = 180°$.

Фазовая характеристика фильтра нижних частот $\varphi_K = f(\nu)$ приведена на рис. 5-27. В полосе прозрачности выходное напряжение отстает от входного на угол φ_K, изменяющийся в зависимости

от частоты от 0 до 180°, а в полосе подавления он остается постоянным и равным 180°.

Такого вида частотные характеристики фильтр имеет только при условии, что он нагружен на сопротивление, равное характеристическому. Чтобы выяснить, возможно ли осуществление такого режима, необходимо найти характеристическое сопротивление рассматриваемого фильтра. Оно будет различным для Т- и П-образной схем.

Для Т-четырехполюсника, имея в виду, что $Z_a = \frac{Z_1}{2}$ и $Z_c = Z_2$, из табл. 5-3 находим

$$Z_{0T} = \pm \sqrt{Z_1 Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right)}. \qquad (5\text{-}199)$$

Применение этой формулы к нашему случаю дает

$$Z_{0T} = \pm \rho \sqrt{1 - \nu^2}. \qquad (5\text{-}200)$$

В полосе прозрачности ($\nu < 1$) сопротивление Z_{0T} чисто активно, и знак минус перед корнем должен быть отброшен.

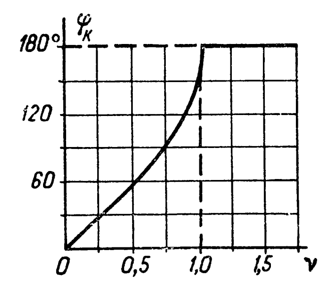


Рис. 5-27. Фазовая характеристика фильтра нижних частот.

В полосе подавления ($\nu > 1$) характеристическое сопротивление имеет реактивный характер. Для определения его знака следует учесть, что в пределе — при весьма высоких частотах — входное сопротивление Т-фильтра неизбежно имеет индуктивный характер $\left(\frac{\omega L}{2} \gg \frac{1}{\omega C}\right)$. Поэтому и характеристическое сопротивление, как это следует из его определения (см. рис. 5-8), также имеет индуктивный характер, т. е. в формуле (5-200) для полосы подавления должен быть сохранен знак плюс.

На рис. 5-28 построен график зависимости Z_{0T} от частоты.

В случае П-образной схемы, воспользовавшись данными табл. 5-3, найдем ($Z_c = 2Z_2$; $Z_a = Z_1$)

$$Z_{0П} = \pm \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}}. \qquad (5\text{-}201)$$

Применяя эту формулу к фильтру нижних частот, получим

$$Z_{0П} = \frac{\rho}{\pm \sqrt{1 - \nu^2}}. \qquad (5\text{-}202)$$

В полосе прозрачности сопротивление $Z_{0П}$ чисто активно, а в полосе подавления имеет емкостный характер (знак минус в последней формуле должен быть отброшен). На рис. 5-29 изображена зависимость $Z_{0П}$ от частоты.

Итак, при любой схеме фильтра сопротивление Z_0 в сильной степени — и по характеру, и по величине — зависит от частоты. Значит, желая осуществить согласование, нужно было бы для каждой частоты подбирать свое сопротивление нагрузки (в полосе прозрачности активное; в полосе подавления реактивное). Между тем, в действительных условиях работы сопротивление нагрузки, как правило, является практически не зависящим от частоты активным сопротивлением $R_н$.

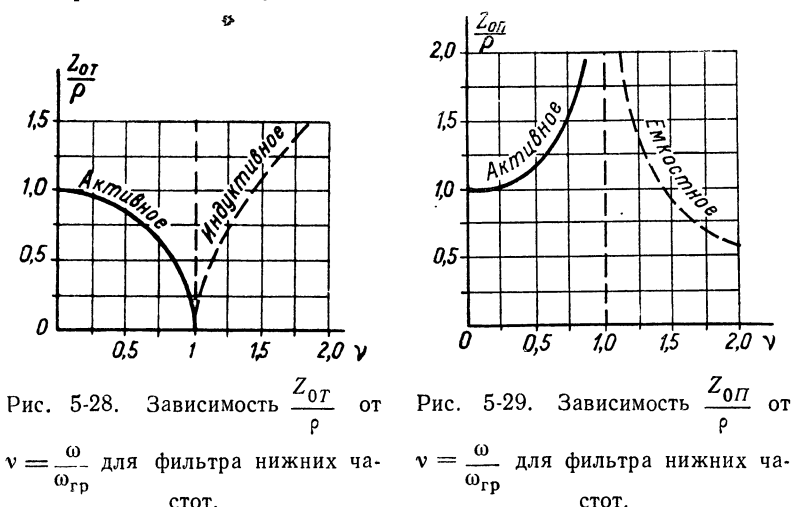


Рис. 5-28. Зависимость $\frac{Z_{0T}}{\rho}$ от $\nu = \frac{\omega}{\omega_{гр}}$ для фильтра нижних частот.

Рис. 5-29. Зависимость $\frac{Z_{0П}}{\rho}$ от $\nu = \frac{\omega}{\omega_{гр}}$ для фильтра нижних частот.

Отсюда следует, что в диапазоне частот фильтр работает на несогласованную нагрузку, и к режиму согласования можно только в известной мере приблизиться.

Из рис. 5-28 и 5-29 видно, что одним из лучших приближений к согласованной работе является нагрузка фильтра на сопротивление $R_н \approx \rho$.

При этом в значительной части полосы прозрачности (от $\nu = 0$ до $\nu \approx 0{,}5$) равенство Z_0 и сопротивления нагрузки почти точно соблюдается.

Вообще же в реальных условиях частотные характеристики фильтра неизбежно отличаются от тех, которые имели бы место при условии полного согласования. Вопрос о влиянии сопротивления нагрузки на режим работы фильтра обсуждается ниже.

б) Влияние сопротивления нагрузки на характеристики фильтра нижних частот

Исследование четырехполюсников вообще и электрических фильтров в частности может производиться или на базе теории четырехполюсников, как это делалось в предыдущих параграфах этой главы, или непосредственно на основе общих законов электрических цепей.

Первый из этих методов особенно удобен, когда речь идет о работе фильтра в режиме согласования.

Вопрос о том, как влияет величина сопротивления нагрузки на частотные характеристики фильтра, обследуем, не прибегая к общей теории четырехполюсников.

Рассмотрим П-образную схему фильтра нижних частот, нагруженного на активное сопротивление $R_н$ (рис. 5-30), и найдем передаточную функцию этой схемы. Имеем

$$K(j\omega)=\frac{U_2}{U_1}=\frac{Z'}{j\omega L+Z'}=\frac{1}{1+j\omega LY'};$$

здесь

$$Y'=\frac{1}{Z'}=\frac{1}{R_н}+j\omega\frac{C}{2}=G_н+j\frac{\omega C}{2}.$$

Модуль коэффициента передачи

$$K(\omega)=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\omega^2L\frac{C}{2}\right)^2+\omega^2L^2G_н^2}}.$$

Нетрудно видеть, что рассматриваемая П-схема фильтра представляет собой параллельный колебательный контур третьего вида. Резонансная частота этого контура

$$\omega_{0пар}=\frac{1}{\sqrt{L\frac{C}{4}}}=\frac{2}{\sqrt{LC}}$$

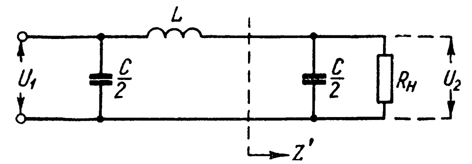


Рис. 5-30. Фильтр нижних частот, нагруженный на сопротивление $R_н$.

совпадает с найденной ранее граничной частотой $\omega_{гр}$ [см. (5-194)], т. е. $\omega_{0пар}=\omega_{гр}$.

Можно поэтому выражение для K переписать так:

$$K(\omega)=\frac{1}{\sqrt{\left(1-2\frac{\omega^2}{\omega_{гр}^2}\right)^2+4\frac{\omega^2}{\omega_{гр}^2}\cdot\frac{\rho^2}{R_н^2}}},$$

где $\rho=\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Наконец, обозначая по-прежнему $\frac{\omega}{\omega_{гр}}=\nu$, получим

$$K(\nu)=\frac{1}{\sqrt{(1-2\nu^2)^2+4\nu^2\frac{\rho^2}{R_н^2}}}. \quad (5\text{-}203)$$

По этой формуле может быть рассчитана частотная характеристика при любом сопротивлении нагрузки фильтра $R_н$.

В частности, при холостом ходе ($R_н = \infty$) коэффициент передачи

$$K_{х.х}(\nu) = \frac{1}{1 - 2\nu^2}.$$

На рис. 5-31 нанесена кривая $K_{х.х} = f(\nu)$. Коэффициент передачи $K_{х.х}$ становится бесконечно большим при $\nu = 0,707$. Нетрудно сообразить, что «всплеск» частотной характеристики объясняется

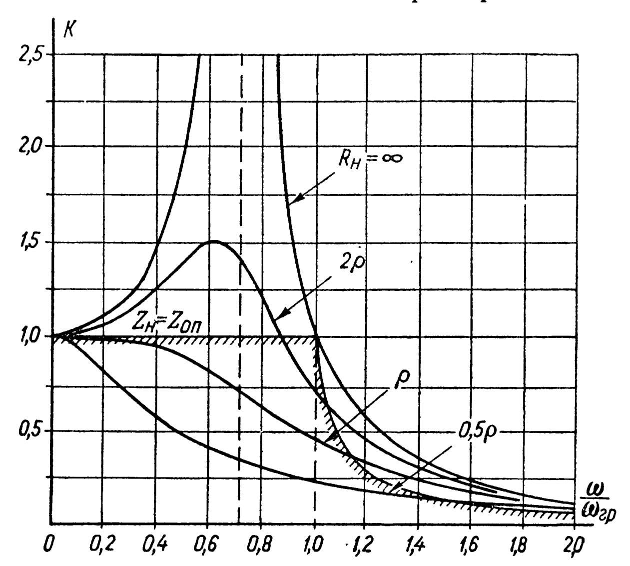


Рис. 5-31. Частотные характеристики фильтра нижних частот, нагруженного на сопротивление $R_н$.

резонансом в последовательном контуре L, $\frac{C}{2}$, резонансная частота которого

$$\omega_{0посл} = \frac{1}{\sqrt{L\frac{C}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_{гр} \approx 0,707\omega_{гр}.$$

Располагая кривой $K_{х.х} = f(\nu)$, можно проверить правило (5-186): полоса прозрачности фильтра включает в себя частоты, для которых $K_{х.х} \geqslant 1$. Из графика $K_{х.х} = f(\nu)$ видно, что, действительно, для частот от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_{гр}$ коэффициент передачи $K_{х.х} \geqslant 1$, т. е. именно эти частоты составляют полосу прозрачности.

Однако эта же кривая свидетельствует о том, что в режиме холостого хода форма частотной характеристики совершенно неудовлетворительна: коэффициент передачи в полосе прозрачности резко изменяется. Для того чтобы получить более равномерное

пропускание частот, надо «сгладить» резонансную кривую, т. е. уменьшить добротность колебательного контура, зашунтировав его достаточно малым сопротивлением $R_н$. Из рис. 5-31 видно, что при $R_н = 2\rho$ пик резонансной кривой уже в значительной степени сглажен, а при $R_н = \rho$ имеет место почти равномерное пропускание всех частот вплоть до $\omega \approx 0{,}5\,\omega_{гр}$, после чего с возрастанием частоты коэффициент передачи падает. Дальнейшее уменьшение $R_н$ (например, до $R_н = 0{,}5\rho$) приводит к чрезмерно резкому падению K с частотой.

Таким образом, целесообразно выбрать такой режим, когда сопротивление нагрузки равно ρ.

Из (5-203) можно найти условие, при котором K остается равным единице при всех значениях ν от нуля до единицы (т. е. условие идеального пропускания всех частот полосы прозрачности). Приравнивая знаменатель (5-203) единице, получаем

$$(1 - 2\nu^2)^2 = 1 - 4\nu^2 \frac{\rho^2}{R_н^2},$$

откуда

$$R_н = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \nu^2}},$$

что совпадает с условием согласования

$$R_н = Z_{0П} = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \nu^2}},$$

полученным ранее иным путем.

На рис. 5-31 нанесена также характеристика (отштрихованная), соответствующая режиму согласования, которая была уже воспроизведена на рис. 5-26.

В заключение найдем расчетные формулы для определения параметров фильтра L и C. Заданными обычно являются граничная частота $\omega_{гр}$ и сопротивление нагрузки $R_н$. На основании того, что сказано выше о согласовании, принимаем

$$R_н = \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Кроме того,

$$\omega_{гр} = \frac{2}{\sqrt{LC}}.$$

Перемножая и деля почленно эти два выражения, находим:

$$C = \frac{2}{\omega_{гр} R_н}; \qquad (5\text{-}204)$$

$$L = \frac{2R_н}{\omega_{гр}}. \qquad (5\text{-}205)$$

5-11. Фильтр верхних частот

В этом фильтре постоянный ток и все колебания с частотами ниже определенной граничной частоты $\omega_{гр}$ должны задерживаться, а колебания частот больших $\omega_{гр}$ — беспрепятственно пропускаться.

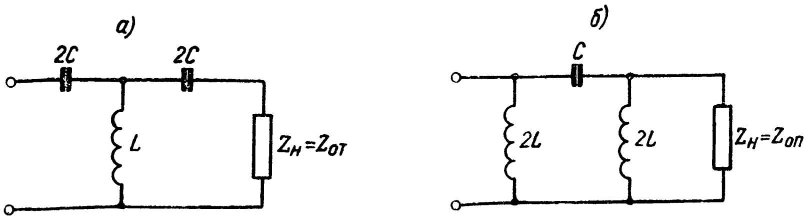


Рис. 5-32. Схемы фильтра верхних частот: а) Т-образная; б) П-образная.

Если в качестве последовательного плеча фильтра включить емкость (рис. 5-32), она будет представлять большое сопротивление для низких частот и способствовать их задержанию. Включение в параллельную ветвь индуктивности приведет к увеличению проводимости ее на нижних частотах и уменьшению проводимости на высших частотах, что также будет соответствовать требованиям, предъявляемым к фильтру верхних частот.

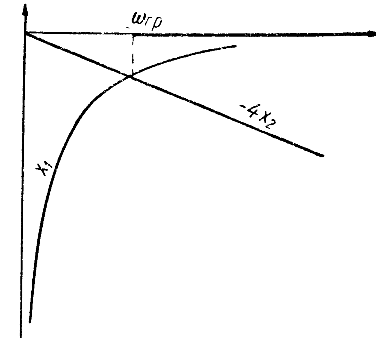


Рис. 5-33. Графическое определение полосы прозрачности фильтра верхних частот.

Таким образом, в фильтре верхних частот

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C}, \quad Z_2 = j\omega L.$$

Этот фильтр также является фильтром типа K, так как

$$Z_1 Z_2 = \frac{L}{C} = \rho^2.$$

Найдем прежде всего границы полосы прозрачности фильтра. Строим кривую $x_1 = -\frac{1}{\omega C}$ в функции частоты (рис. 5-33); на том же графике наносим кривую $-4x_2 = -4\,\omega L$. Точка их пересечения дает граничную частоту, при которой

$$4\omega_{гр} L = \frac{1}{\omega_{гр} C},$$

откуда

$$\omega_{гр} = \frac{1}{2\sqrt{LC}}. \qquad (5\text{-}206)$$

На всех более высоких частотах $|x_1| < |4x_2|$. Поэтому все частоты, превышающие $\omega_{гр}$, относятся к полосе прозрачности фильтра.

Так же, как и в фильтре нижних частот, в рассматриваемом фильтре наилучших частотных характеристик можно достичь в **режиме согласования**. В связи с этим определим характеристические сопротивления Т-образной (Z_{0T}) и П-образной ($Z_{0П}$) схем фильтра верхних частот. Применяя формулы (5-199) и (5-201), получим:

$$Z_{0T} = \pm\rho\sqrt{1-\frac{1}{\nu^2}}, \tag{5-207}$$

$$Z_{0П} = \pm\frac{\rho}{\sqrt{1-\frac{1}{\nu^2}}}, \tag{5-208}$$

где

$$\nu = \frac{\omega}{\omega_{гр}}.$$

Зависимость характеристических сопротивлений Z_{0T} и $Z_{0П}$ от частоты представлена на рис. 5-34. В области частот, больших

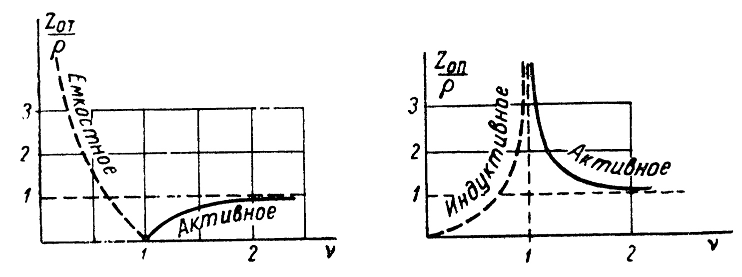


Рис. 5-34. Зависимость $\frac{Z_{0T}}{\rho}$ и $\frac{Z_{0П}}{\rho}$ от ν для фильтра верхних частот.

чем $\omega_{гр}$ (когда $\nu > 1$), оба сопротивления Z_{0T} и $Z_{0П}$ имеют активный характер (знак минус перед корнем должен быть отброшен). Но в то время как Z_{0T} равно нулю при $\nu = 1$ и затем с увеличением частоты асимптотически приближается к ρ, величина $Z_{0П}$ при $\nu = 1$ равна бесконечности, а затем также асимптотически стремится к ρ. Таким образом, при достаточно высоких частотах как Z_{0T}, так и $Z_{0П}$ могут быть приближенно приняты равными ρ.

Что касается частот низких ($\nu < 1$), то в этом диапазоне Z_{0T} и $Z_{0П}$ реактивны. Сопротивление Z_{0T} имеет емкостный характер, так как на очень низких частотах входное сопротивление Т-фильтра (см. рис. 5-32, *а*), а значит, и его характеристическое сопротивление неизбежно имеют емкостный характер $\left(\frac{1}{\omega 2C} \gg \omega L\right)$. Следовательно, для полосы подавления в формуле (5-207) должен

быть сохранен знак минус. Сопротивление $Z_{0П}$ при $\nu = 0$ равно нулю; затем, будучи по своему характеру индуктивным, оно увеличивается до бесконечности при $\nu = 1$. В формуле (5-208) для полосы подавления должен быть сохранен знак минус.

Положим, что фильтр нагружен на сопротивление, равное характеристическому ($Z_н = Z_{0Т}$ или $Z_н = Z_{0П}$ в зависимости от схемы), как показано на рис. 5-32. Тогда в полосе прозрачности, т. е. при частотах от $\omega = \omega_{гр}$ до $\omega = \infty$, затухание $b = 0$.

В полосе подавления при частотах от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_{гр}$ согласно (5-190) затухание будет

$$b = \operatorname{Arch}\left|1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right| = \operatorname{Arch}\left|1 - 2\frac{\omega_{гр}^2}{\omega^2}\right| = \operatorname{Arch}\left|1 - \frac{2}{\nu^2}\right|. \quad (5\text{-}209)$$

Частотная характеристика фильтра верхних частот $b(\omega)$ показана на рис. 5-35 (сплошная кривая).

Фазовая характеристика (пунктирная кривая на рис. 5-35) в полосе подавления представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс: угол сдвига фаз между выходным и входным напряжениями (токами) равен 180°. В полосе прозрачности уравнение фазовой характеристики на основании (5-191) имеет вид

$$\varphi_K = \arccos\left(1 - \frac{2}{\nu^2}\right). \quad (5\text{-}210)$$

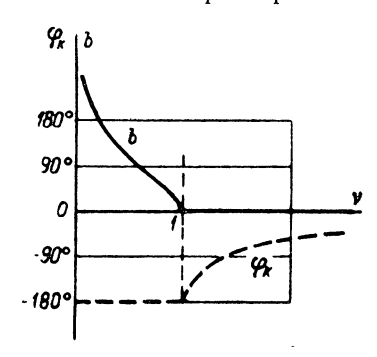


Рис. 5-35. Частотная и фазовая характеристики фильтра верхних частот.

Фазовый угол φ_K отрицателен, т. е. напряжение (или ток) на выходе опережает напряжение (или ток) на входе. Угол сдвига фаз изменяется от 180° (при $\omega = \omega_{гр}$) до нуля (при $\omega = \infty$).

Из рис. 5-34 видно, что хорошим приближением к режиму согласования является равенство

$$R_н = \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Вместе с тем

$$\omega_{гр} = \frac{1}{2\sqrt{LC}}.$$

Решая совместно эти уравнения, получим формулы, по которым могут быть рассчитаны элементы фильтра L и C при заданных $R_н$ и $\omega_{гр}$:

$$C = \frac{1}{2\omega_{гр}R_н}; \quad (5\text{-}211)$$

$$L = \frac{R_н}{2\omega_{гр}}. \quad (5\text{-}212)$$

5-12. Полосовой и заграждающий фильтры

Изучение частотных характеристик системы из двух связанных колебательных контуров (§ 4-7), показывает, что эта цепь при достаточно сильной связи между контурами является, по существу говоря, полосовым фильтром. Приближенно можно считать, что

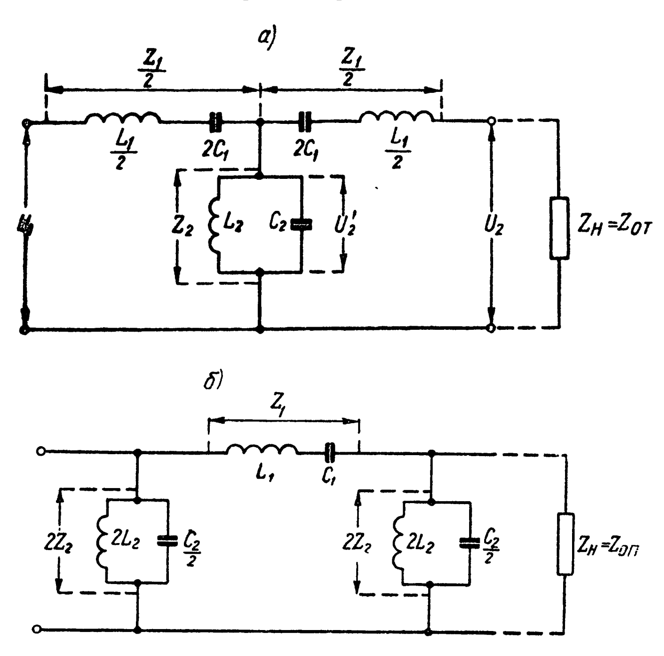


Рис. 5-36. Схема полосового фильтра типа *К*.

полоса прозрачности системы простирается от медленной частоты связи

$$\omega_{\text{I}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}} \approx \omega_{\text{г}}$$

до быстрой частоты связи

$$\omega_{\text{II}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}} \approx \omega_{\text{в}}.$$

Здесь ω_0 — резонансная частота каждого из контуров;
k — коэффициент связи между контурами.

Связанные контуры как фильтр обладают недостатком: с переходом из полосы прозрачности в каждую из полос подавления затухание возрастает недостаточно резко; иначе говоря, амплитуды выходных напряжения и тока спадают в полосе поглощения относительно медленно. Объясняется этот недостаток главным образом

тем, что сопротивление связи (которое, например, при трансформаторной связи $Z_{св} = j\omega M$) недостаточно резко зависит от частоты (а в некоторых схемах связанных контуров вообще не зависит).

Можно в значительной мере улучшить частотную характеристику фильтра, если в качестве сопротивления связи применить двухполюсник, сопротивление которого резко зависит от частоты и притом в таком направлении, что затухание быстро увеличивается с переходом в полосу подавления. Таким двухполюсником является параллельный колебательный контур, настроенный на ту же частоту ω_0, что и каждый из последовательных контуров, которые он связывает. Так мы приходим к Т- и П-образным схемам, изображенным на рис. 5-36 и представляющим собой полосовые фильтры типа K.

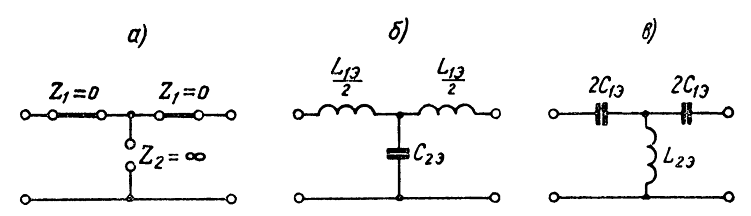


Рис. 5-37. Эквивалентные схемы полосового фильтра типа K.

Рассмотрим работу полосового (например, Т-образного) фильтра при холостом ходе ($Z_н = \infty$).

При частоте ω_0, равной резонансной частоте каждого из контуров, обе последовательные ветви являются коротким замыканием, а параллельная ветвь бесконечно большим сопротивлением. Поэтому для $\omega = \omega_0$ эквивалентная схема приобретает вид рис. 5-37, *а*. Напряжение на выходе равно входному напряжению, т. е. $K_{х.х} = 1$ (или $b = 0$), что показано на частотной характеристике $K_{х.х}(\omega)$ — рис. 5-38.

При частотах $\omega > \omega_0$ последовательные контуры ведут себя как индуктивные сопротивления, а параллельный контур — как емкостное сопротивление. Эквивалентная схема, таким образом, приобретает вид рис. 5-37, *б*. Она совершенно подобна схеме фильтра нижних частот. Это означает, что фильтр будет иметь полосу прозрачности (т. е. $K_{х.х} > 1$) для всех частот от $\omega = \omega_0$ до некоторой граничной частоты $\omega = \omega_в$ — рис. 5-38. «Всплеск» частотной характеристики на частоте $\omega = \omega_{II}$ объясняется последовательным резонансом контура $L_{1э}/2$, $C_{э2}$.

При частотах более низких, чем резонансная частота ω_0, последовательные ветви ведут себя как емкости, а параллельная — как индуктивность. Из эквивалентной схемы рис. 5-37, *в* видно, что для частот $\omega < \omega_0$ она является фильтром верхних частот. В диапазоне частот от некоторой граничной $\omega_н$ до $\omega = \omega_0$ коэффициент передачи $K_{х.х} > 1$. На частоте ω_I, соответствующей последователь-

ному резонансу контура $2C_{1э}$, $L_{2э}$, наблюдается второй «всплеск» кривой $K_{х.х}(\omega)$.

Аналитическое выражение передаточной функции $K_{х.х}(j\omega)$ получим, приняв во внимание, что при холостом ходе напряжение U_2

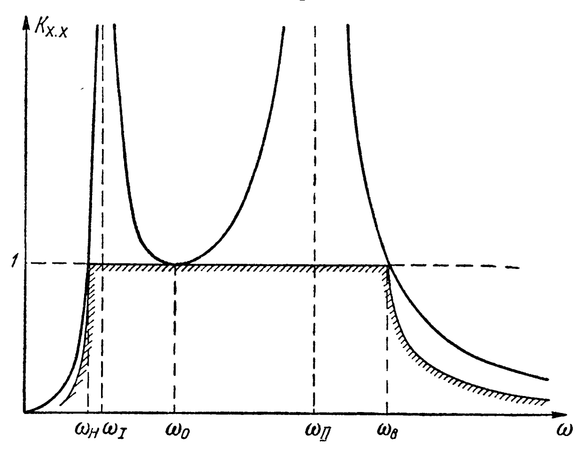


Рис. 5-38. Частотная характеристика $K_{х.х}(\omega)$ полосового фильтра.

(см. рис. 5-36, *а*) равно напряжению на сопротивлении Z_2 параллельного контура U_2'. Тогда

$$K_{х.х}(j\omega) = \frac{Z_2}{Z_2 + \frac{Z_1}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{Z_1}{2Z_2}}.$$

Для сопротивлений Z_1 и Z_2 имеем:

$$Z_1 = j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) = j\rho_1\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right); \tag{5-213}$$

$$Z_2 = \frac{j\omega L_2 \frac{1}{j\omega C_2}}{j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)} = \rho_2 \frac{1}{j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}, \tag{5-214}$$

где

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}; \quad \rho_2 = \sqrt{\frac{L_2}{C_2}}.$$

Произведение

$$Z_1 Z_2 = \rho_1 \rho_2,$$

т. е. рассматриваемый фильтр действительно относится к фильтрам типа K.

Отношение

$$\frac{Z_1}{2Z_2} = -\frac{1}{2}\frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2. \tag{5-215}$$

Так как $L_1C_1 = L_2C_2$ (резонансные частоты контуров совпадают), то

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{C_2}{C_1},$$

и вместо (5-215) можно записать

$$\frac{Z_1}{2Z_2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{C_2}{C_1}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2. \qquad (5\text{-}216)$$

Подставляя (5-216) в выражение для $K_{х.х}(j\omega)$, получим

$$K_{х.х}(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{C_2}{C_1}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}. \qquad (5\text{-}217)$$

Чтобы найти граничные частоты $\omega_в$ и $\omega_н$, воспользуемся условием (5-187). Будем искать частоты, при которых $K_{х.х}(\omega)$ равен единице.

Из (5-217) следует, что $K_{х.х}(\omega)$ равен единице, во-первых, когда

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{C_2}{C_1}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 0,$$

т. е. при $\omega = \omega_0$ (см. рис. 5-38); во-вторых, если

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{C_2}{C_1}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 2.$$

Из этого уравнения и найдем граничные частоты. После несложных преобразований придем к квадратному уравнению

$$\omega^2 \pm \frac{2}{\sqrt{L_1C_2}}\,\omega - \omega_0^2 = 0.$$

При решении этого уравнения отрицательные решения отбрасываем как не имеющие физического смысла и находим

$$\omega_в = \sqrt{\frac{1}{L_1C_1} + \frac{1}{L_1C_2}} + \frac{1}{\sqrt{L_1C_2}}; \qquad (5\text{-}218)$$

$$\omega_н = \sqrt{\frac{1}{L_1C_1} + \frac{1}{L_1C_2}} - \frac{1}{\sqrt{L_1C_2}}. \qquad (5\text{-}219)$$

Перемножая (5-218) и (5-219), получаем, что

$$\omega_в\omega_н = \frac{1}{L_1C_1} = \omega_0^2, \qquad (5\text{-}220)$$

т. е. резонансная частота каждого из контуров равна среднему геометрическому из граничных частот.

Для того чтобы исправить вид частотных характеристик (рис. 5-38), т. е. достичь равномерности коэффициента передачи в полосе прозрачности, необходимо нагружать фильтр на сопротивление, равное характеристическому, как показано (пунктиром) на

схемах рис. 5-36. В связи с этим рассмотрим вопрос о характеристических сопротивлениях полосового фильтра.

Для Т-образной схемы, применяя общую формулу (5-199) и приняв во внимание (5-213), (5-214) и (5-216), получим

$$Z_{0T}=\sqrt{\frac{L_1}{C_2}}\sqrt{1-\frac{C_2}{4C_1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}. \qquad (5\text{-}221)$$

Зависимость Z_{0T} от частоты показана на рис. 5-39. В полосе прозрачности Z_{0T} носит характер активного сопротивления, при-

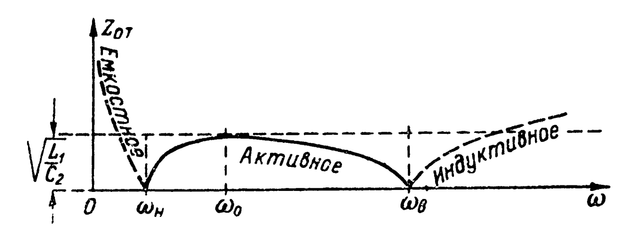


Рис. 5-39. Зависимость Z_{0T} (ω) для полосового фильтра.

чем в области частот, примыкающих к частоте ω_0, Z_{0T} мало изменяется с частотой и приближенно равно $\sqrt{\frac{L_1}{C_2}}$. В области низких частот (меньших, чем $\omega_н$) сопротивление Z_{0T} реактивно и имеет емкостный характер, а при наиболее высоких частотах (больших, чем $\omega_в$) — индуктивный характер.

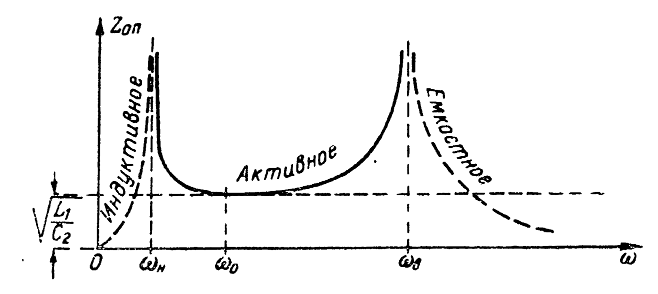


Рис. 5-40. Зависимость $Z_{0П}$ (ω) для полосового фильтра.

Воспользовавшись общей формулой (5-201), получим выражение характеристического сопротивления для П-образной схемы

$$Z_{0П}=\sqrt{\frac{L_1}{C_2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{C_2}{4C_1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}. \qquad (5\text{-}222)$$

Зависимость $Z_{0П}$ от частоты изображена на рис. 5-40.

В режиме согласования фильтр будет обладать частотными характеристиками, уравнения которых нетрудно найти, приняв во внимание (5-216).

Для частотной зависимости затухания в полосе подавления получим

$$\operatorname{ch} b = \left|1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right| = \left|1 - \frac{C_2}{2C_1}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right|. \qquad (5\text{-}223)$$

Частотная характеристика b (ω) для полосового фильтра приведена на рис. 5-41. Эта же характеристика, но в координатах K(ω) представлена в виде отштрихованной кривой на рис. 5-38.

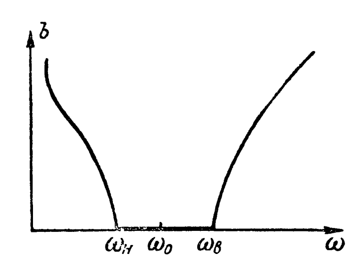


Рис. 5-41. Частотная характеристика полосового фильтра.

Рис. 5-42. Фазовая характеристика полосового фильтра.

Уравнение фазовой характеристики

$$\cos \varphi_K = 1 - \frac{C_2}{2C_1}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2. \qquad (5\text{-}224)$$

В области частот от ω_0 до $\omega_в$ угол φ_K меняется от нуля до $+180°$ (рис. 5-42), как фазовая характеристика фильтра нижних частот. Это вполне естественно, так как в этом диапазоне схема выполняет роль фильтра нижних частот. При частотах от $\omega_н$ до ω_0 зависимость φ_K (ω) аналогична характеристике фильтра верхних частот: φ_K меняется от $-180°$ до нуля.

В полосах подавления угол φ_K равен $\pm 180°$.

Выведенные выше количественные соотношения дают возможность найти расчетные формулы для выбора элементов фильтра L_1, C_1, L_2, C_2.

Из кривых рис. 5-39 и 5-40 следует, что хорошим приближением к согласованной работе фильтра является выполнение равенства

$$R_н = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}}.$$

Вычитая (5-219) из (5-218), находим

$$\omega_в - \omega_н = \frac{2}{\sqrt{L_1 C_2}}.$$

Так как $\sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = R_н$, то

$$\omega_в - \omega_н = \frac{2}{C_2 R_н},$$

откуда

$$C_2 = \frac{2}{R(\omega_в - \omega_н)}. \tag{5-225}$$

Далее, так как $\omega_0^2 = \frac{1}{L_2 C_2} = \omega_в \omega_н$, то

$$L_2 = \frac{1}{\omega_0^2 C_2} = \frac{R_н(\omega_в - \omega_н)}{2\omega_в \omega_н}. \tag{5-226}$$

Теперь без труда определяются элементы последовательной цепи L_1, C_1:

$$L_1 = R_н^2 C_2 = \frac{2R_н}{\omega_в - \omega_н}; \tag{5-227}$$

$$C_1 = \frac{1}{\omega_0^2 L_1} = \frac{\omega_в - \omega_н}{2R_н \omega_в \omega_н}. \tag{5-228}$$

Как было указано, полосовой фильтр типа K имеет определенные преимущества перед фильтром, построенным по схеме связанных (например, трансформаторно) контуров.

На рис. 5-43 в качестве примера приведены частотные характеристики двух полосовых фильтров, имеющих одинаковое отношение $\frac{\omega_в}{\omega_н} = 2$. Одна из них (пунктирная кривая) относится к системе трансформаторно связанных контуров, другая (сплошная кривая) рассчитана для полосового фильтра типа K. Сопоставление этих кривых наглядно иллюстрирует преимущества фильтра типа K. Следует, однако, иметь в виду, что фильтр типа K сложнее системы связанных контуров. Поэтому во многих радиоустройствах, в частности в радиоприемниках, в качестве полосового фильтра предпочитают применять связанные колебательные контуры.

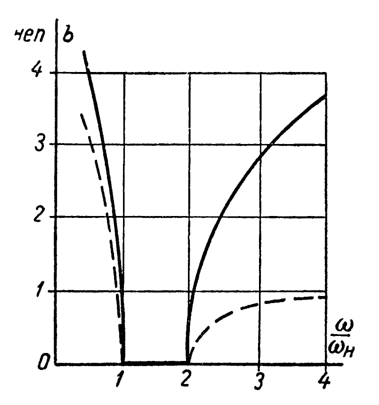


Рис. 5-43. Сравнительные частотные характеристики системы связанных контуров и полосового фильтра типа K.

Если в схеме полосового фильтра типа K поменять местами параллельный и последовательный контуры, фильтр обратится в заграждающий («фильтр-пробку»).

Схемы заграждающих фильтров изображены на рис. 5-44.

Полагаем, что контуры настроены на одну и ту же частоту ω_0. Тогда при $\omega = \omega_0$ последовательная цепь окажется разомкнутой, а параллельная — замкнутой накоротко и эквивалентная схема

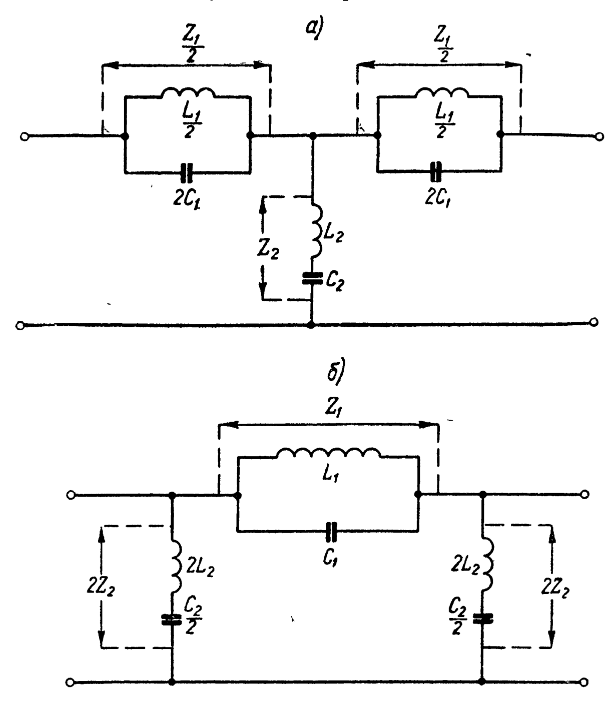


Рис. 5-44. Схемы заграждающего фильтра типа *К*: а) Т-образная; б) П-образная.

Т-фильтра приобретает вид рис. 5-45, *а*. При этой частоте затухание бесконечно велико.

На частотах $\omega > \omega_0$ последовательная ветвь становится емкостным сопротивлением, а параллельная — индуктивным сопротивле-

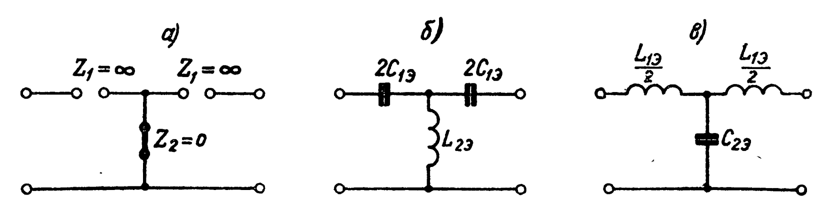
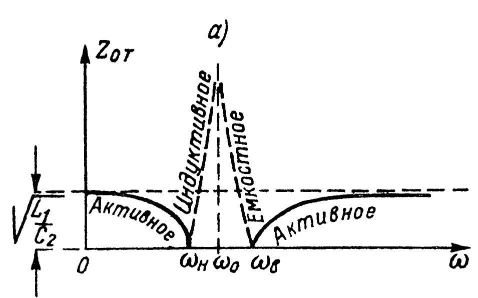


Рис. 5-45. Эквивалентные схемы заграждающего фильтра типа *К*.

нием (рис. 5-45, *б*). Схема обращается в фильтр верхних частот, пропускающий частоты выше граничной частоты $\omega_в$ (рис. 5-46).

Наконец, при частотах, меньших чем ω_0, последовательная ветвь приобретает характер индуктивного сопротивления, а параллельная ветвь — емкостного сопротивления (рис. 5-45, *в*). Теперь схема выполняет роль фильтра нижних частот, т. е. беспрепятственно пропускает частоты ниже граничной частоты $\omega_н$.



Не производя расчетов, аналогичных тем, что были сделаны для полосового фильтра, ограничимся приведением основных формул для заграждающего фильтра.

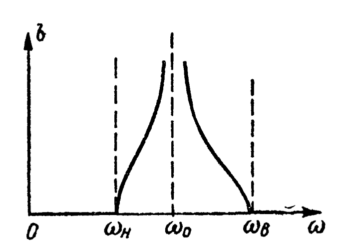


Рис. 5-46. Частотная характеристика заграждающего фильтра.

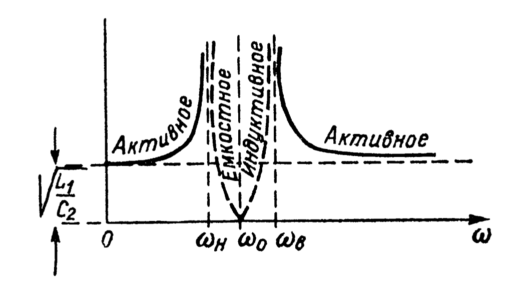


Рис. 5-47. Зависимости Z_{0T} (ω) и $Z_{0П}$ (ω) для заграждающего фильтра.

Характеристические сопротивления Т- и П-образных заграждающих фильтров находятся из формул:

$$Z_{0T} = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} \sqrt{1 - \frac{C_2}{2C_1\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}; \qquad (5\text{-}229)$$

$$Z_{0П} = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{C_2}{2C_1\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}}. \qquad (5\text{-}230)$$

Частотные зависимости сопротивлений Z_{0T} и $Z_{0П}$ приведены на рис. 5-47.

Затухание в полосе подавления изменяется в зависимости от частоты по закону

$$\operatorname{ch} b = \left| 1 - \frac{C_2}{2C_1\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} \right|. \qquad (5\text{-}231)$$

Частотная характеристика $b(\omega)$ показывает, что в полосе частот $\omega_н - \omega_в$ фильтр действительно обладает большим затуханием, которое при $\omega = \omega_0$ становится бесконечно большим (см. рис. 5-46).

Уравнение фазовой характеристики в полосах прозрачности:

$$\cos \varphi_K = 1 - \frac{C_2}{2C_1\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}. \tag{5-232}$$



Рис. 5-48. Фазовая характеристика заграждающего фильтра.

Кривая $\varphi_K(\omega)$ изображена на рис. 5-48. Она представляет собой сочетание характеристик фильтров нижних и верхних частот.

Следующие формулы являются расчетными для определения элементов фильтра:

$$L_2 = \frac{R_н}{2(\omega_в - \omega_н)}; \tag{5-233}$$

$$C_2 = \frac{2(\omega_в - \omega_н)}{R_н \omega_в \omega_н}; \tag{5-234}$$

$$L_1 = \frac{2R_н(\omega_в - \omega_н)}{\omega_в \omega_н}; \tag{5-235}$$

$$C_1 = \frac{1}{2R_н(\omega_в - \omega_н)}. \tag{5-236}$$

В этих формулах

$$R_н = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} \approx Z_{0T} \approx Z_{0П}.$$

5-13. Многозвенные фильтры

Все рассмотренные типы фильтров, даже при отсутствии в них потерь и при работе на согласованную нагрузку, отличаются от идеальных фильтров (частотные характеристики которых приведены на рис. 5-21 и 5-22) тем, что в полосе подавления их затухание, хотя и велико, но имеет конечную величину. Характеристику фильтра в полосе подавления можно исправить, соединив последовательно ряд ячеек фильтра данного типа, т. е. перейдя к *цепочечной схеме фильтра*.

Если отдельные звенья фильтра идентичны и на выходе он согласован, результирующее затухание

$$b_э = nb,$$

где n — число звеньев цепочки; b — затухание одного звена.

Также и фазовый коэффициент фильтра в целом

$$\varphi_{Kэ} = n\varphi_K,$$

где φ_K — фазовый коэффициент одного звена.

В качестве примера на рис. 5-49, *а* показано образование цепной схемы из трех ячеек Т-образного фильтра нижних частот. Если ячейки однотипны и выход всей системы замкнут на сопротивление, равное характеристическому, в точках *2-2*, *3-3* и *4-4* четырехполюсники согласованы и входное сопротивление равно Z_{0T}.

Последовательно соединенные индуктивности $L/2$ могут быть объединены в одну, и тогда схема приобретает вид рис. 5-49, *б*.

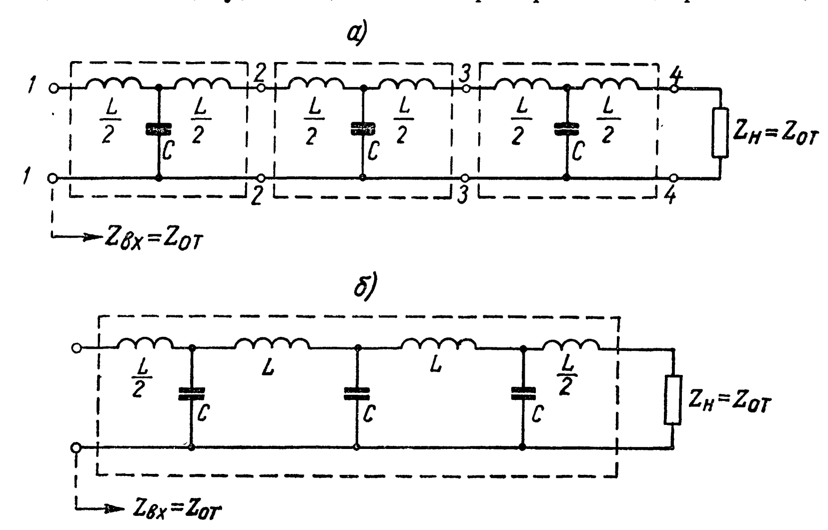


Рис. 5-49. Схемы многозвенных фильтров.

В цепной схеме затухание увеличивается пропорционально числу ячеек *n* и крутизна характеристики *b* (ω) возрастает. Необходимо помнить, что действительные фильтры, вопреки нашему допущению, обладают потерями; в полосе прозрачности их затухание, хотя и мало, но не равно нулю. Поэтому при последовательном соединении ряда звеньев затухание возрастает не только в полосе подавления, но и в полосе прозрачности, что, разумеется, нежелательно. Это обстоятельство, а также сложность и дороговизна устройства являются существенными недостатками цепных фильтрующих схем, ограничивающими их применение.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ТЕОРИЯ ЦЕПЕЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

6-1. Введение

В предыдущих главах мы рассмотрели некоторые свойства цепей с сосредоточенными параметрами. Последние, как уже отмечалось, состоят из активных сопротивлений, а также элементов с электрическим или магнитным полями, т. е. емкостей и индуктивностей.

При анализе электрических процессов в цепи с сосредоточенными параметрами предполагалось, что ток во всех ее элементах, соединенных последовательно, имеет в данный момент одинаковые значения. Так, например, при изучении последовательного колебательного контура считалось, что для любого $t = \text{const}$ ток и в емкости и в индуктивности сохраняет одну и ту же величину. Однако такое предположение будет справедливо лишь приближенно при некоторых дополнительных условиях.

Из теории электромагнитного поля известно, что электромагнитные возмущения (колебания) во всякой электрической системе распространяются с конечной скоростью. Поэтому мгновенная величина тока в реальной цепи с конечными размерами принципиально не может быть всюду одинакова. Принятое в теории цепей допущение будет приближенно выполняться только в том случае, когда явлением запаздывания электромагнитных колебаний можно пренебречь, т. е. когда цепь имеет сравнительно малые размеры.

В современной радиотехнике, кроме цепей с сосредоточенными параметрами, широкое применение находят устройства, геометрические размеры которых нельзя считать малыми (например, различные типы линий передачи электромагнитных волн, антенные системы и т. д.). Физические свойства и количественные характеристики подобных устройств могут быть изучены на основе теории электромагнитного поля, изложение которой не входит в содержание данной книги. Однако в некоторых случаях для этой цели удается использовать уравнения теории электрических цепей.

Рассмотрим в качестве примера цепь переменного тока, образованную двумя параллельными проводами большой протяженности с известным сопротивлением нагрузки на конце — так называемую

длинную линию (рис. 6-1). Любой малый элемент такой линии, окруженный электрическим и магнитным полями, будет, очевидно, обладать какими-то малыми емкостью, индуктивностью и активным сопротивлением одновременно. А это означает, что электрические параметры цепи (т. е. величины r, L и C) оказываются непрерывно распределенными по ее длине.

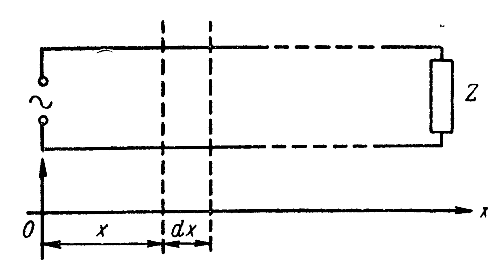


Рис. 6-1. Длинная линия.

Для цепи с распределенными параметрами, изображенной на рис. 6-1, разумеется, нельзя написать уравнения Кирхгофа подобно тому, как это делалось нами в предыдущих главах. Вместе с тем любой участок линии длиной dx можно представить в виде эквивалентной схемы, состоящей из сосредоточенных бесконечно малых элементов dL, dC, dr и dg (рис. 6-2), к которой законы цепей полностью применимы.

Величина dL на схеме характеризует результирующую индуктивность верхнего и нижнего проводов бесконечно малого участка линии, dC — величину емкости между проводами на интервале dx, а dr — активное сопротивление потерь в проводах. Проводимость dg обусловлена несовершенством изоляции между проводами и, следовательно, является проводимостью утечки на участке dx.

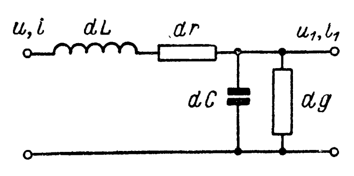


Рис. 6-2. Эквивалентная схема бесконечно малого элемента линии.

Эквивалентная схема линии конечной длины должна, очевидно, содержать бесчисленное множество аналогичных звеньев, соединенных последовательно.

Практически вместо бесконечно малых величин dL, dC, dr и dg удобно использовать так называемые **погонные параметры линии**, рассчитываемые на единицу длины:

$L_1 = \frac{dL}{dx}$ — погонная индуктивность;

$C_1 = \frac{dC}{dx}$ — погонная емкость;

$r_1 = \frac{dr}{dx}$ — погонное сопротивление потерь;

$g_1 = \frac{dg}{dx}$ — погонная проводимость утечки.

Если величины L_1, C_1, r_1 и g_1 не меняются по длине линии, ее называют **однородной**. В общем случае погонные параметры могут изменяться по какому-либо закону (неоднородная линия).

Существует большое количество линий, различающихся между собой в конструктивном отношении формой образующих их проводов. Примером наиболее простой и вместе с тем весьма распространенной конструкции может служить открытая двухпроводная линия, образованная двумя параллельными цилиндрическими проводниками (рис. 6-3). Широкое распространение имеет также коаксиальная линия. Последняя состоит из двух концентрических цилиндрических проводников, пространство между которыми заполнено воздухом или каким-то другим диэлектриком (рис. 6-4).

Цепи с распределенными параметрами играют важную роль в современной радиотехнике. Во многих радиотехнических устройствах

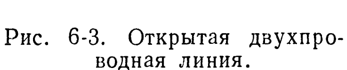



Рис. 6-3. Открытая двухпроводная линия.

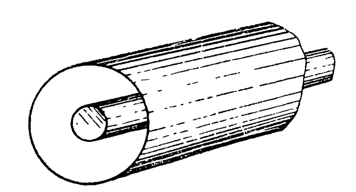


Рис. 6-4. Коаксиальная линия.

подобные цепи находят применение для передачи высокочастотной энергии электромагнитного поля в заданном направлении, например, от радиопередатчика к антенне, от антенны к радиоприемнику и т. д. На ультракоротких волнах отрезки линий используются в качестве колебательных систем и полосовых фильтров. Наконец, при помощи линий удается осуществить измерение многих радиотехнических величин (длины волны и частоты колебаний, активных и реактивных сопротивлений и т. д.).

Широкое применение длинных линий в радиотехнике, естественно, повлекло за собой быструю разработку теории цепей с распределенными параметрами. Значительный вклад в ее развитие внесли советские ученые А. А. Пистолькорс, В. В. Татаринов, М. С. Нейман и др.

6-2. Дифференциальные уравнения напряжения и тока в длинной линии

Приведенные выше рассуждения позволяют утверждать, что напряжение и ток в длинной линии в общем случае оказываются функциями времени и пространственной координаты, определяющей положение точки наблюдения.

Чтобы найти напряжение и ток в любой точке линии, рассмотрим произвольный бесконечно малый элемент dx, удаленный от ее начала на расстояние x (см. рис. 6-1). Обозначим искомые величины

на входе элемента, т. е. в точке с координатой x, через u и i соответственно. Тогда значения u_1 и i_1 на выходе элемента (в точке $x + dx$) будут

$$u_1 = f(x + dx,\ t),$$
$$i_1 = \varphi(x + dx,\ t).$$

Полагая, что напряжение и ток в линии являются непрерывными функциями координаты x, значения u_1 и i_1 представим в виде степенных рядов:

$$u_1 = f(x,\ t) + \frac{\partial f(x,\ t)}{\partial x} dx + \ldots = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \ldots,$$
$$i_1 = \varphi(x,\ t) + \frac{\partial \varphi(x,\ t)}{\partial x} dx + \ldots = i + \frac{\partial i}{\partial t} dx + \ldots$$

Ограничиваясь двумя первыми членами разложений, получим

$$\left.\begin{aligned} u_1 - u &= \frac{\partial u}{\partial x} dx, \\ i_1 - i &= \frac{\partial i}{\partial x} dx. \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}1)$$

Исходное предположение о непрерывности функций тока и напряжения будет, очевидно, справедливо для любой линии, погонные параметры которой не изменяются по длине скачком.

Обратимся к эквивалентной схеме элемента dx, изображенной на рис. 6-2. Из рассмотрения ее вытекает, что разница между величинами u_1 и u обусловлена падением напряжения на активном сопротивлении $dr = r_1 dx$ и индуктивности $dL = L_1 dx$, соединенных последовательно. Поэтому

$$u - u_1 = i r_1\, dx + L_1 \frac{\partial i}{\partial t} dx.$$

Аналогично ток i_1 отличается от тока i вследствие того, что часть его ответвляется в емкость $dC = C_1 dx$ и активную проводимость $dg = g_1 dx$, соединенные параллельно. Следовательно,

$$i - i_1 = g_1 u_1\, dx + C_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} dx.$$

В правой части последнего равенства величину u_1 с точностью до бесконечно малых второго порядка можно заменить величиной u. Физически такая замена означает, что на эквивалентной схеме элемента dx точку включения параллельной ветви между верхним и нижним проводами можно выбирать произвольно. Таким образом,

$$i - i_1 = g_1 u\, dx + C_1 \frac{\partial u}{\partial t} dx.$$

Подставив найденные разности напряжений и токов в исходные равенства (6-1), будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= r_1 i + L_1 \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= g_1 u + C_1 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}2)$$

Дифференциальные уравнения (6-2), определяющие ток и напряжение в линии, называются **телеграфными уравнениями**.

6-3. Решение телеграфных уравнений для линии без потерь

Рассмотрим вначале телеграфные уравнения для линии без потерь, ибо анализ подобной идеализированной системы дает возможность сравнительно просто раскрыть сущность физических процессов, характерных для цепей с распределенными параметрами.

При отсутствии потерь ($r_1 = 0$, $g_1 = 0$) уравнения (6-2) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -L_1 \frac{\partial i}{\partial t}, \\ \frac{\partial i}{\partial x} &= -C_1 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}3)$$

Продифференцируем первое уравнение системы (6-3) по переменной x, а второе — по переменной t. В результате получим равенства:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -L_1 \frac{\partial^2 i}{\partial t\, \partial x},$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x\, \partial t} = -C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

из которых следует, что функция u удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad (6\text{-}4)$$

где $v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$.

Проделав аналогичные преобразования для тока, будем иметь

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}. \qquad (6\text{-}4а)$$

Уравнение (6-4), встречающееся при решении многих физических задач, называется **волновым**. Общее решение его может быть представлено в виде

$$u = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right), \qquad (6\text{-}5)$$

причем функции f_1 и f_2 определяются конкретными условиями задачи.

Покажем, что это выражение действительно удовлетворяет волновому уравнению. Дифференцируя функцию $u(t, x)$ в (6-5) по переменным t и x, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f_1'\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2'\left(t + \frac{x}{v}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f_1''\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2''\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{v} f_1'\left(t - \frac{x}{v}\right) + \frac{1}{v} f_2'\left(t + \frac{x}{v}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{v^2} f_1''\left(t - \frac{x}{v}\right) + \frac{1}{v^2} f_2''\left(t + \frac{x}{v}\right).$$

Подставив найденные значения $\partial^2 u/\partial x^2$ и $\partial^2 u/\partial t^2$ в исходное уравнение (6-4), убеждаемся, что оно превращается в тождество.

Перейдем к выяснению смысла каждого из частных решений (6-5) волнового уравнения.

Рассмотрим вначале функцию $f_1\left(t - \frac{x}{v}\right)$. Легко заметить, что значения ее в момент $t = t_1$ в различных точках оси x в общем случае не равны друг другу. Однако для любых двух произвольных точек с координатами x_1 и x_2 можно подобрать такие моменты наблюдения t_1 и t_2, при которых имеет место равенство

$$f_1\left(t_1 - \frac{x_1}{v}\right) = f_1\left(t_2 - \frac{x_2}{v}\right).$$

Очевидно, это равенство выполняется в том случае, когда

$$t_1 - \frac{x_1}{v} = t_2 - \frac{x_2}{v}.$$

Если $x_2 > x_1$, то и $t_2 > t_1$, причем

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{x_2 - x_1}{v} = \frac{\Delta x}{v}.$$

Отсюда следует, что величина функции f_1, которую она имела в точке x_1 при $t = t_1$, повторяется в точке x_2 через промежуток времени Δt, пропорциональный расстоянию $\Delta x = x_2 - x_1$ между этими точками. Другими словами, значения f_1 как бы движутся во времени вдоль оси x с постоянной скоростью

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \tag{6-6}$$

определяемой погонными параметрами линии. Это свойство функции f_1 дает основание называть ее **волновой функцией**, или **волной**.

Смещение графика f_1 по оси x во времени показано на рис. 6-5. Таким образом, первое слагаемое в выражении (6-5) представляет собой волну напряжения, распространяющуюся по линии вдоль оси x со скоростью v (прямая волна). Аналогичные рассуждения показывают, что функция $f_2\left(t+\frac{x}{v}\right)$ определяет волну, которая распространяется по линии в противоположном направлении (обратная волна).

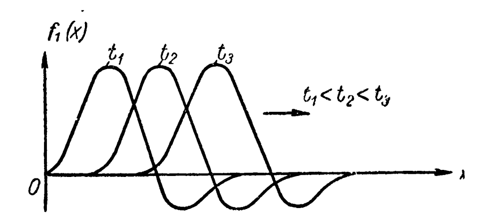


Рис. 6-5. К определению волновой функции.

Общее решение волнового уравнения (6-4а) имеет вид

$$i=\varphi_1\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_2\left(t+\frac{x}{v}\right), \tag{6-7}$$

где $\varphi_1\left(t-\frac{x}{v}\right)$ и $\varphi_2\left(t+\frac{x}{v}\right)$ — прямая и обратная волны тока.

Чтобы установить связь между напряжением и током в линии, подставим значения u и i в одно из уравнений системы (6-3). Используя для этой цели, например, первое уравнение, получим

$$-\frac{1}{v}f_1'\left(t-\frac{x}{v}\right)+\frac{1}{v}f_2'\left(t+\frac{x}{v}\right)=-L_1\varphi_1'\left(t-\frac{x}{v}\right)-L_1\varphi_2'\left(t+\frac{x}{v}\right).$$

Это равенство будет выполняться при любых t и x, если

$$\frac{1}{v}f_1\left(t-\frac{x}{v}\right)=L_1\varphi_1\left(t-\frac{x}{v}\right),$$

$$\frac{1}{v}f_2\left(t+\frac{x}{v}\right)=-L_1\varphi_2\left(t+\frac{x}{v}\right).$$

Отсюда следует, что

$$f_1\left(t-\frac{x}{v}\right)=\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}\varphi_1\left(t-\frac{x}{v}\right),$$

$$f_2\left(t+\frac{x}{v}\right)=-\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}\varphi_2\left(t+\frac{x}{v}\right).$$

Полученные соотношения можно привести к виду

$$\frac{u_{пр}}{i_{пр}}=-\frac{u_{обр}}{i_{обр}}=Z_0,$$

где $u_{пр}$ и $i_{пр}$ — напряжение и ток прямой волны;
$u_{обр}$ и $i_{обр}$ — напряжение и ток обратной волны;

$$Z_0=\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}. \tag{6-8}$$

Величина Z_0 имеет размерность сопротивления и называется **волновым сопротивлением линии**. Заметим, что

в данном случае волновое сопротивление оказывается чисто активным.

Рассмотрим волновые процессы в установившемся режиме при условии, что вдоль линии распространяется только прямая волна.

Если полагать, что функция напряжения в точке $x = 0$ равна $f_1(t, 0) = U \cos \omega t$, то напряжение и ток в произвольной точке оси x будут представлены выражениями:

$$u = U \cos \omega \left(t - \frac{x}{v}\right) = U \cos (\omega t - \beta x),$$
$$i = I \cos \omega \left(t - \frac{x}{v}\right) = I \cos (\omega t - \beta x),$$

где U — амплитуда напряжения прямой волны;

$I = \frac{U}{Z_0}$ — амплитуда тока прямой волны;

$\beta = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{L_1 C_1}$.

Отсюда видно, что текущие фазы напряжения и тока, определяемые величиной $\omega t - \beta x$, в различных точках линии при $t = \text{const}$ будут различны. Количественное изменение фазы на интервале длиной x и $t = \text{const}$ характеризуется значением βx, поэтому коэффициент β носит название коэффициента фазы, или волнового числа. Расстояние, на котором фаза напряжения или тока меняется на 2π, как известно, соответствует длине волны. Значит, волновое число $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$.

По мере распространения волны любая точка с фиксированной фазой колебаний будет, как уже отмечалось, перемещаться вдоль линии со скоростью v, называемой фазовой скоростью. За время $T = \frac{1}{f}$ выбранная точка смещается на расстояние, равное длине волны, т. е. $\lambda = vT = \frac{v}{f} = 2\pi \frac{v}{\omega} = \frac{2\pi}{\beta}$.

Таким образом, длина волны в линии при заданной частоте колебаний определяется скоростью v и, следовательно, является функцией погонных параметров L_1 и C_1. Величина фазовой скорости в рассматриваемом случае от частоты колебаний не зависит.

Полученные соотношения позволяют уточнить понятие длинной линии. Очевидно, волновой характер процессов в линии будет проявляться весьма слабо, если ее длина значительно меньше длины волны, т. е. если $\beta l = 2\pi \frac{l}{\lambda} \ll 1$. Для полного выявления особенностей волнового процесса необходимо, чтобы $\beta l > 1$. Стало быть, линию можно считать длинной в том случае, когда ее длина по крайней мере соизмерима с длиной волны. Что касается расстояния между проводами, образующими линию, то обычно оно выбирается много меньше длины волны.

В теории линий величину βl называют «электрической» длиной. В частном случае геометрической длине $l = \frac{\lambda}{4}$ соответствует «электрическая» длина $\beta l = \frac{\pi}{2}$; при $l = \frac{\lambda}{2}$, величина $\beta l = \pi$ и т. д.

6-4. Решение телеграфных уравнений для линии с потерями

Перейдем теперь к анализу волновых процессов в линии с потерями. Будем полагать, что э. д. с. возбуждающего генератора изменяется во времени по синусоидальному закону (установившийся процесс). В этом случае исходные выражения для текущих комплексов тока и напряжения можно записать в виде

$$u_к = \boldsymbol{U}(x)\, e^{j\omega t} \quad и \quad i_к' = \boldsymbol{I}(x)\, e^{j\omega t},$$

где $\boldsymbol{U}(x)$ — комплексная амплитуда напряжения;

$\boldsymbol{I}(x)$ — комплексная амплитуда тока.

Подставляя эти выражения в уравнение (6-3), получим систему телеграфных уравнений для комплексных амплитуд $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{I}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{U}}{dx} &= -Z_1\boldsymbol{I}, \\ \frac{d\boldsymbol{I}}{dx} &= -Y_1\boldsymbol{U}. \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}9)$$

Величины $Z_1 = r_1 + j\omega L_1$ и $Y_1 = g_1 + j\omega C_1$ представляют собой полные сопротивление и проводимость линии, рассчитанные на единицу длины.

Продифференцируем уравнения (6-9) по x:

$$\frac{d^2\boldsymbol{U}}{dx^2} = -Z_1\frac{d\boldsymbol{I}}{dx},$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{I}}{dx^2} = -Y_1\frac{d\boldsymbol{U}}{dx}.$$

Подставив сюда значения производных $d\boldsymbol{U}/dx$ и $d\boldsymbol{I}/dx$, будем иметь:

$$\frac{d^2\boldsymbol{U}}{dx^2} = Z_1Y_1\boldsymbol{U}; \qquad (6\text{-}10)$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{I}}{dx^2} = Z_1Y_1\boldsymbol{I}. \qquad (6\text{-}11)$$

Из решения дифференциального уравнения (6-10) следует, что комплексная амплитуда напряжения

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}e^{-\gamma x} + \boldsymbol{B}e^{\gamma x}. \qquad (6\text{-}12)$$

Здесь $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — постоянные коэффициенты интегрирования, а величина

$$\gamma = \sqrt{Z_1Y_1} = \sqrt{(r_1 + j\omega L_1)(g_1 + j\omega C_1)}, \qquad (6\text{-}13)$$

носит название *постоянной распространения*.

Аналогичный вид имеет решение уравнения (6-11). Однако для расчета тока целесообразно использовать равенство

$$I = -\frac{1}{Z_1} \cdot \frac{dU}{dx}.$$

Так как согласно (6-10)

$$\frac{dU}{dx} = -\gamma A e^{-\gamma x} + \gamma B e^{\gamma x},$$

то

$$I = \frac{A}{Z_0} e^{-\gamma x} - \frac{B}{Z_0} e^{\gamma x}. \qquad (6\text{-}14)$$

В выражениях (6-12) и (6-14) первые слагаемые определяют комплексные амплитуды напряжения и тока прямой волны, а вторые слагаемые — комплексные амплитуды напряжения и тока обратной волны.

Величина

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z_1}{Y_1}} = \sqrt{\frac{r_1 + j\omega L_1}{g_1 + j\omega C_1}} \qquad (6\text{-}15)$$

представляет собой **волновое сопротивление линии с потерями**.

Из формул (6-13) и (6-15) следует, что в линии с потерями постоянная распространения и волновое сопротивление являются величинами комплексными:

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

и

$$Z_0 = z_0 e^{j\varphi}. \qquad (6\text{-}16)$$

Если же значения r_1 и g_1 стремятся к нулю, то формулы (6-13) и (6-15) в пределе дают

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{L_1 C_1} \quad \text{и} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}},$$

т. е. $\alpha = 0$ и $\varphi = 0$.

Чтобы выяснить физический смысл коэффициентов α, β и угла φ, рассмотрим выражения для тока и напряжения прямой волны. В этом случае имеем

$$\left.\begin{aligned} U_{\text{пр}} &= U_1 e^{-\gamma x} = U_1 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}, \\ I_{\text{пр}} &= \frac{U_1}{Z_0} e^{-\gamma x} = \frac{U_1}{Z_0} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}, \\ U_1 &= A. \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}17)$$

Переходя к мгновенным значениям и полагая, что начальная фаза напряжения в точке $x = 0$ равна нулю, получим

$$u = \operatorname{Re}(U e^{j\omega t}) = U_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x),$$

$$i = \operatorname{Re}(I e^{j\omega t}) = \frac{U_1}{Z_0} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x - \varphi). \qquad (6\text{-}18)$$

Отсюда следует, что распространение волны вдоль линии с потерями сопровождается непрерывным убыванием амплитуд тока и напряжения по экспоненциальному закону. Физически уменьшение амплитуд колебаний можно объяснить тем, что по мере распространения волны энергия ее частично расходуется в элементах линии в виде потерь на нагревание проводников, потерь в диэлектрике и т. д. Скорость затухания амплитуд определяется величиной коэффициента α, который вследствие этого называется коэффициентом затухания.

Коэффициент β, так же, как и в линии без потерь, представляет собой волновое число.

Угол φ характеризует величину фазового сдвига между колебаниями напряжения и тока прямой волны в каждой точке оси x.

6-5. Учет граничных условий. Коэффициент отражения

Выражения (6-12) и (6-14), определяющие напряжение и ток в линии, содержат неизвестные коэффициенты интегрирования A и B. Чтобы найти эти величины, необходимо ввести дополнительные условия, учитывающие естественные особенности исследуемой схемы — так называемые граничные условия. Для этого практически удобно использовать значения комплексной амплитуды тока или напряжения на известном сопротивлении нагрузки.

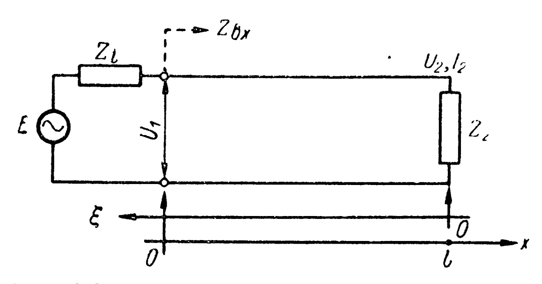


Рис. 6-6. К расчету коэффициента отражения в линии.

Рассмотрим линию длиной l с сопротивлением нагрузки Z_2 (рис. 6-6). Обозначив комплексную амплитуду напряжения на конце линии U_2, запишем граничные условия в виде:

$$\text{при } x = l \quad U = U_2 \quad \text{и} \quad I = I_2 = \frac{U_2}{Z_2}.$$

Применяя эти условия к выражениям (6-12) и (6-14), будем иметь

$$Ae^{-\gamma l} + Be^{\gamma l} = U_2,$$
$$Ae^{-\gamma l} - Be^{\gamma l} = I_2 Z_2.$$

Из решения данной системы уравнений находим

$$A = \frac{U_2 + I_2 Z_0}{2} e^{\gamma l},$$

$$B = \frac{U_2 - I_2 Z_0}{2} e^{-\gamma l}.$$

Подставив значения A и B снова в (6-12) и (6-14), получим формулы для расчета комплексных амплитуд U и I в любой точке линии:

$$U = \frac{U_2 + I_2 Z_0}{2} e^{-\gamma(x-l)} + \frac{U_2 - I_2 Z_0}{2} e^{\gamma(x-l)}; \qquad (6\text{-}19)$$

$$I = \frac{U_2 + I_2 Z_0}{2Z_0} e^{-\gamma(x-l)} - \frac{U_2 - I_2 Z_0}{2Z_0} e^{\gamma(x-l)}. \qquad (6\text{-}20)$$

В этих формулах первые слагаемые соответствуют комплексным амплитудам напряжения и тока прямой волны, а вторые слагаемые — комплексным амплитудам обратной волны. В дальнейшем по аналогии с теорией электромагнитного поля прямую волну, распространяющуюся от генератора к нагрузке, будем называть падающей волной, а обратную волну, движущуюся от нагрузки, — отраженной волной.

Отношение комплексной амплитуды напряжения отраженной волны к комплексной амплитуде напряжения падающей волны в точке $x = l$ носит название коэффициента отражения по напряжению. Из выражений (6-12) и (6-19) следует, что он равен

$$p_u = \frac{Be^{\gamma l}}{Ae^{-\gamma l}} = \frac{U_2 - I_2 Z_0}{U_2 + I_2 Z_0} = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0}. \qquad (6\text{-}21)$$

Можно также ввести коэффициент отражения по току p_i, определив его как отношение соответствующих комплексных амплитуд токов. Легко показать, что

$$p_i = \frac{Z_0 - Z_2}{Z_0 + Z_2} = -p_u. \qquad (6\text{-}21a)$$

Величина коэффициента отражения, таким образом, зависит только от соотношения между сопротивлением нагрузки и волновым сопротивлением линии. В общем случае, когда линия нагружена на произвольное по величине комплексное сопротивление, коэффициент отражения имеет комплексное значение $p_{u,i} = pe^{j\psi_{u,i}}$. Модуль его p характеризует отношение амплитуд напряжений (или токов) отраженной и падающей волн на конце линии, а аргумент ψ_u (или ψ_i) — фазовый сдвиг между ними.

Из физических соображений вытекает, что модуль коэффициента отражения не может иметь значения, большего единицы. В противном случае амплитуда напряжения (а следовательно, и энергия) отраженной волны будет превышать амплитуду (энергию) падающей волны. Величина аргумента в зависимости от нагрузки может изменяться в пределах от $-\pi$ до $+\pi$.

Преобразуем равенства (6-19) и (6-20), используя для этой цели подстановку $\xi = l - x$. В результате несложной перегруппировки слагаемых получим:

$$\left.\begin{aligned} U &= U_2 \frac{e^{\gamma\xi} + e^{-\gamma\xi}}{2} + I_2 Z_0 \frac{e^{\gamma\xi} - e^{-\gamma\xi}}{2} = U_2 \operatorname{ch} \gamma\xi + I_2 Z_0 \operatorname{sh} \gamma\xi; \\ I &= I_2 \frac{e^{\gamma\xi} + e^{-\gamma\xi}}{2} + \frac{U_2}{Z_0} \frac{e^{\gamma\xi} - e^{-\gamma\xi}}{2} = I_2 \operatorname{ch} \gamma\xi + \frac{U_2}{Z_0} \operatorname{sh} \gamma\xi. \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}22)$$

Для линии без потерь ($\alpha = 0$; $\gamma = j\beta$)

$$\left.\begin{aligned} U &= U_2 \cos \beta\xi + jI_2 Z_0 \sin \beta\xi, \\ I &= I_2 \cos \beta\xi + j\frac{U_2}{Z_0} \sin \beta\xi, \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}23)$$

так как $\operatorname{ch}(j\beta\xi) = \cos \beta\xi$ и $\operatorname{sh}(j\beta\xi) = j\sin \beta\xi$.

Переменную ξ во всех этих выражениях можно рассматривать как новую координату точки наблюдения, отсчитываемую вдоль линии от нагрузки (рис. 6-6).

Вычислим входное сопротивление линии. Оно как обычно, равно $Z_{вх} = \frac{U_1}{I_1}$, где U_1 и I_1 — комплексные амплитуды напряжения и тока на входе линии (при $\xi = l$). Подставляя сюда значения U_1 и I_1 из (6-22), находим

$$Z_{вх} = Z_0 \frac{Z_2 \operatorname{ch} \gamma l + Z_0 \operatorname{sh} \gamma l}{Z_0 \operatorname{ch} \gamma l + Z_2 \operatorname{sh} \gamma l}. \qquad (6\text{-}24)$$

Если линия потерь не имеет, то

$$Z_{вх} = Z_0 \frac{Z_2 \cos \beta l + jZ_0 \sin \beta l}{Z_0 \cos \beta l + jZ_2 \sin \beta l}. \qquad (6\text{-}25)$$

Входное сопротивление линии в некоторых случаях целесообразно выразить через коэффициент отражения. Для этого следует использовать (6-19) и (6-20) при $x = l$ с учетом формулы (6-21):

$$U_1 = \frac{U_2 + I_2 Z_0}{2} (1 + p_u e^{-2\gamma l}) e^{\gamma l},$$

$$I_1 = \frac{U_2 + I_2 Z_0}{2Z_0} (1 - p_u e^{-2\gamma l}) e^{\gamma l}.$$

В результате будем иметь

$$Z_{вх} = Z_0 \frac{1 + p_u e^{-2\gamma l}}{1 - p_u e^{-2\gamma l}}. \qquad (6\text{-}26)$$

Для линии без потерь

$$Z_{вх} = Z_0 \frac{1 + p e^{j(\psi_u - 2\beta l)}}{1 - p e^{j(\psi_u - 2\beta l)}}. \qquad (6\text{-}27)$$

При известном входном сопротивлении линии комплексную амплитуду напряжения U_1 на входе нетрудно представить через э. д. с. генератора (рис. 6-6):

$$U_1 = I_1 Z_{вх} = \frac{E}{Z_i + Z_{вх}} Z_{вх}.$$

6-6. Постоянная распространения и волновое сопротивление длинной линии с малыми потерями

В предыдущих параграфах были определены постоянная распространения и волновое сопротивление линии. Теперь мы займемся более подробно анализом этих величин, играющих важную роль в теории цепей с распределенными параметрами.

В радиотехнике обычно применяются линии с малыми потерями, для которых на высоких частотах справедливы неравенства

$$\omega L_1 \gg r_1 \quad \text{и} \quad \omega C_1 \gg g_1. \tag{6-28}$$

Из выражения (6-15) следует, что волновое сопротивление таких линий с учетом (6-28)

$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}.$$

При расчете постоянной распространения γ активными составляющими Z_1 и Y_1 в формуле (6-13) пренебречь нельзя, так как в противном случае γ окажется чисто мнимой величиной. Для приближенного вычисления вещественной и мнимой частей γ перепишем (6-13) в виде

$$\gamma = j\omega\sqrt{L_1C_1}\sqrt{1 - j\frac{r_1}{\omega L_1}}\sqrt{1 - j\frac{g_1}{\omega C_1}}.$$

Используя разложение $\sqrt{1+\Delta} = 1 + \frac{\Delta}{2} - \frac{\Delta^2}{4} + \ldots$ при $\Delta \ll 1$, будем иметь:

$$\sqrt{1 - j\frac{r_1}{\omega L_1}} \approx 1 - j\frac{r_1}{2\omega L_1},$$

$$\sqrt{1 - j\frac{g_1}{\omega C_1}} \approx 1 - j\frac{g_1}{2\omega C_1}.$$

Следовательно,

$$\gamma \approx j\omega\sqrt{L_1C_1}\left(1 - j\frac{r_1}{2\omega L_1}\right)\left(1 - j\frac{g_1}{2\omega C_1}\right).$$

Раскрывая скобки и принимая во внимание, что $r_1g_1/4\omega^2L_1C_1$ значительно меньше остальных слагаемых, получим

$$\gamma \approx \frac{r_1}{2}\sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + \frac{g_1}{2}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}} + j\omega\sqrt{L_1C_1}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\alpha \approx \frac{r_1}{2Z_0} + \frac{g_1}{2}Z_0; \tag{6-29}$$

$$\beta \approx \omega\sqrt{L_1C_1};$$

$$v \approx \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}.$$

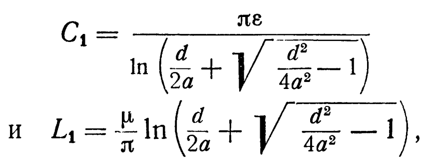
Если проводимость утечки g_1 мала, то

$$\alpha \approx \frac{r_1}{2Z_0}. \tag{6-30}$$

На основании изложенного можно утверждать, что волновое сопротивление и фазовая скорость линии с малыми потерями в радиотехническом диапазоне частот приближенно равны соответствующим параметрам аналогичной линии без потерь. Эти приближения будут тем точнее, чем лучше выполняются неравенства (6-28). Величина коэффициента затухания, конечно, не равна нулю, она определяется соотношением между погонными параметрами, характеризующими потери, и волновым сопротивлением. По мере увеличения погонных сопротивления и проводимости утечки коэффициент α, как и следовало ожидать, возрастает.

Используем полученные формулы для расчета волновых сопротивлений и других параметров линий, применяемых на практике.

Предположим, что двухпроводная линия образована цилиндрическими проводами радиуса a, разнесенными на расстояние d (рис. 6-7). В теории электромагнитного поля доказывается, что погонные емкость и индуктивность такой системы соответственно равны



$$C_1 = \frac{\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{d}{2a} + \sqrt{\frac{d^2}{4a^2} - 1}\right)}$$

и $$L_1 = \frac{\mu}{\pi}\ln\left(\frac{d}{2a} + \sqrt{\frac{d^2}{4a^2} - 1}\right),$$

Рис. 6-7. Поперечное сечение открытой двухпроводной линии.

где ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, окружающей проводники.

Подставляя эти значения в формулы (6-6) и (6-8), для линии без потерь получим

$$Z_0 = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ln\left(\frac{d}{2a} + \sqrt{\frac{d^2}{4a^2} - 1}\right); \qquad (6\text{-}31)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \qquad (6\text{-}32)$$

Так как провода, образующие линию, обычно находятся в воздухе, то $\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}\cdot 10^{-9}$ [*ф/м*] и $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ [*гн/м*]. В этом случае

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/сек}.$$

В большинстве двухпроводных линий размеры поперечного сечения проводов оказываются много меньше расстояния между ними ($a \ll d$). При выполнении этого условия формула (6-31) упрощается:

$$Z_0 \approx \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ln\frac{d}{a}.$$

Для воздушной линии

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \ [\text{ом}]$$

и

$$Z_0 \approx 120 \ln \frac{d}{a} = 276 \lg \frac{d}{a} \ [\text{ом}].$$

На рис. 6-8 приведены кривые, характеризующие зависимость волнового сопротивления двухпроводной воздушной линии от размеров a и d. Как видно из рисунка, величина Z_0 в практических случаях имеет порядок сотен ом.

Для расчета коэффициента затухания используем выражение (6-30), полагая, что проводимость утечки диэлектрика (воздуха) $g_1 \approx 0$. Активное сопротивление r_1 вычислим по формуле

$$r_1 \approx \frac{1}{\pi a} \sqrt{\frac{\pi f \mu_1}{\sigma}}. \qquad (6\text{-}33)$$

Здесь $\mu_1 = \mu_0$ — магнитная проницаемость, σ — удельная проводимость проводов [см. (3-53)].

Подставив значения r_1 и Z_0 в (6-30), получим

$$\alpha = \frac{1}{240} \cdot \frac{\sqrt{\dfrac{f\mu_0}{\pi\sigma}}}{a \ln \dfrac{d}{a}} \ [\text{неп/м}]. \qquad (6\text{-}34)$$

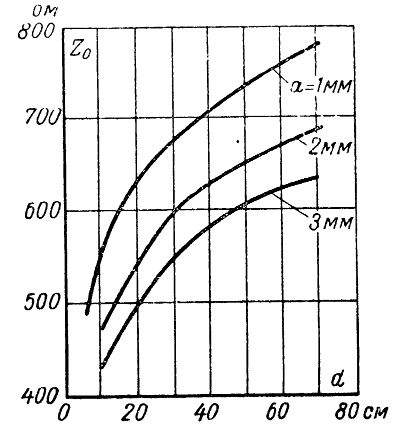


Рис. 6-8. Зависимость волнового сопротивления двухпроводной линии от размеров a и d.

Если линия состоит из медных проводов $\left(\sigma = 5{,}8 \cdot 10^7 \dfrac{1}{\text{ом} \cdot \text{м}}\right)$, то выражения (6-33) и (6-34) можно привести к виду

$$r_1 \approx \frac{8{,}3\sqrt{f}}{a} 10^{-8} \ [\text{ом/см}],$$

$$\alpha \approx 1{,}5 \cdot 10^{-8} \frac{\sqrt{f}}{a \lg \dfrac{d}{a}} \ [\text{неп/м}]$$

или

$$\alpha \approx 13 \cdot 10^{-8} \frac{\sqrt{f}}{a \lg \dfrac{d}{a}} \ [\text{дб/м}],$$

где f входит в *гц*; a — в *см*.

На рис. 6-9 представлены кривые изменения активного сопротивления r_1 и коэффициента затухания α в зависимости от длины волны для открытой двухпроводной линии, образованной медными проводами.

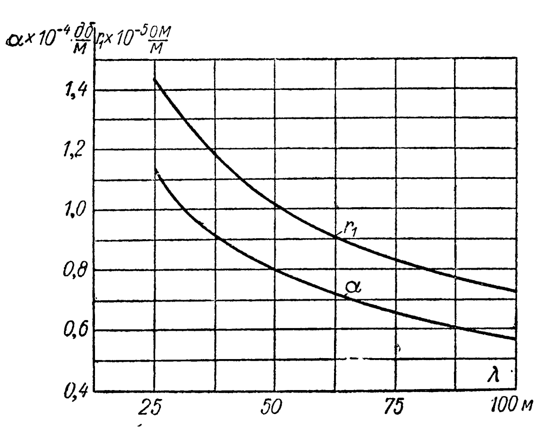


Рис. 6-9. Зависимости погонного активного сопротивления и коэффициента затухания двухпроводной линии от длины волны.

$d = 20$ *см*; $a = 2$ *мм*.

Проделаем аналогичный расчет для коаксиальной линии (рис. 6-10). Погонные параметры ее, как известно, определяются соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{b}{a}}, \\ L_1 &= \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b}{a}, \\ r_1 &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi f\mu_0}{\sigma}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right); \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}35)$$

a и b — радиусы внутреннего и внешнего проводников.

Подставив значения L_1 и C_1 в (6-6) и (6-8), будем иметь:

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ln\frac{b}{a}, \qquad (6\text{-}36)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Далее, используя (6-29) при $g_1 \approx 0$, находим, что

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\frac{\pi f\mu_0}{\sigma}}}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\ln\frac{b}{a}}.$$

Полученные выражения для линии с воздушным заполнением принимают вид:

$$Z_0 = 60 \ln \frac{b}{a} = 138 \lg \frac{b}{a} \ [ом],$$

$$\alpha = \frac{1}{866} \sqrt{\frac{\pi f \mu_0}{\sigma}} \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\lg \frac{b}{a}} \ [неп/м].$$

Большинство коаксиальных линий, используемых для передачи энергии, имеет волновое сопротивление порядка нескольких десятков ом. Наиболее широкое распространение нашли линии с волновым сопротивлением 50 и 75 *ом*.

Кривые изменения волнового сопротивления коаксиальной линии в зависимости от геометрических размеров ее сечения показаны на рис. 6-11.

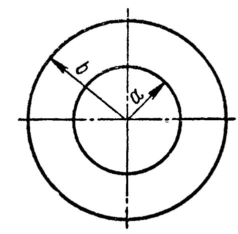


Рис. 6-10. Поперечное сечение коаксиальной линии.

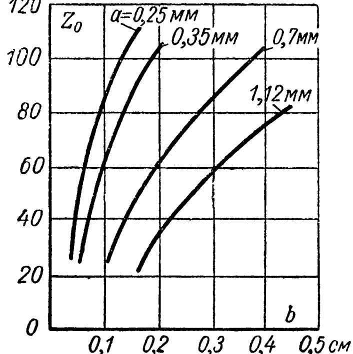


Рис. 6-11. Зависимость волнового сопротивления коаксиальной линии от размеров ее сечения.

Проведенный выше анализ показывает, что фазовая скорость в рассмотренных линиях совпадает со скоростью распространения электромагнитных волн в безграничном диэлектрике с параметрами ε и μ, которая, как известно, равна $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Такое совпадение скоростей не является случайным, ибо с точки зрения теории электромагнитного поля распространение волн тока и напряжения по проводам обусловлено распространением электромагнитной волны в пространстве, прилегающем к проводящим поверхностям линии. Как было пояснено в § 2-6, провода, образующие линию, следует рассматривать только как своеобразные «рельсы», обеспечивающие передачу электромагнитного поля в заданном направлении.

На рис. 6-12 и 6-13 показаны силовые линии электрического и магнитного полей в открытой двухпроводной и коаксиальной ли-

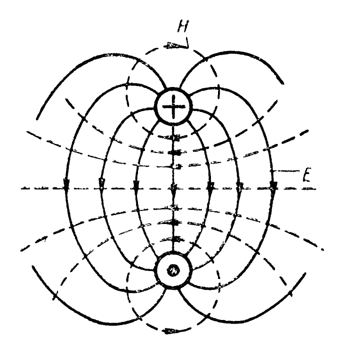


Рис. 6-12. Структура электрического и магнитного полей в поперечном сечении открытой двухпроводной линии.

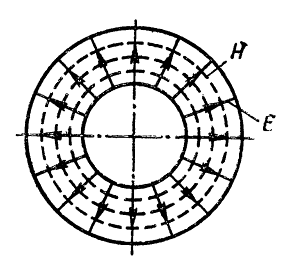


Рис. 6-13. Структура электрического и магнитного полей в поперечном сечении коаксиальной линии.

ниях. Как видно из рисунков, эти поля в плоскости поперечного сечения линий аналогичны по структуре соответствующим статическим полям.

6-7. Режим бегущих волн

Рассмотрим режим, при котором в линии существует только прямая (бегущая) волна.

Из физических соображений ясно, что бегущая волна может иметь место в однородной линии бесконечно большой протяженности. Однако этот случай представляет чисто теоретический интерес. Поэтому для практики весьма важно определить условия существования бегущих волн в линии конечных размеров.

Из формулы (6-21) непосредственно следует, что коэффициент отражения p обращается в нуль, если сопротивление нагрузки равно волновому сопротивлению. Таким образом, для получения бегущих волн линию необходимо согласовать с нагрузкой, т. е. выполнить условие $Z_{н} = Z_0$. В этом случае мощность падающей волны, за исключением небольшой ее части, теряемой в проводах и изоляции, будет передаваться в сопротивление нагрузки.

Некоторые особенности распространения бегущих волн в линии уже рассматривались нами в § 6-4. Там, в частности, отмечалось, что при движении волны вдоль оси x амплитуды ее убывают по экспоненциальному закону, а фазы колебаний изменяются линейно.

Для линии с малыми потерями угол сдвига между фазами тока и напряжения приближенно равен нулю, так как волновое сопротив-

ление в данном случае можно считать активным. С учетом этого приближения из выражений (6-18) получаем:

$$\left.\begin{aligned} u &= U_1 e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x), \\ i &= \frac{U_1}{Z_0} e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x). \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}37)$$

Кривые, характеризующие изменения амплитуды U и начальной фазы $\psi = \beta x$ напряжения, показаны на рис. 6-14.

При расчете комплексных значений напряжения и тока бегущей волны в линии удобно использовать формулы (6-17). Если генератор находится в точке $x = 0$ (см. рис. 6-6), то на входе $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_1$ и $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_1 = \frac{\boldsymbol{U}_1}{Z_0}$. Отсюда вытекает, что

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\boldsymbol{U}_1}{\boldsymbol{I}_1} = Z_0.$$

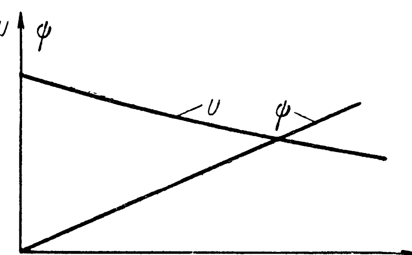


Рис. 6-14. Изменение амплитуды и начальной фазы напряжения бегущей волны вдоль линии.

Таким образом, входное сопротивление линии в режиме бегущих волн не зависит от ее длины и равно волновому сопротивлению.

Определим мгновенное значение мощности p, проходящей через произвольную точку линии: $p = ui$. Подставляя сюда значения тока и напряжения из (6-37), получим

$$p = \frac{U_1^2}{Z_0} e^{-2\alpha x}\cos^2(\omega t - \beta x).$$

Отсюда видно, что при любых t и $x \leqslant l$ величина мгновенной мощности $p \geqslant 0$. Значит, в режиме бегущих волн от генератора в линию поступает какая-то мощность, которая за исключением небольшой ее части, расходуемой на нагревание, передается к нагрузке.

Вычислим коэффициент полезного действия исследуемой цепи. Из выражений (6-17) следует, что на сопротивлении нагрузки

$$\boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{U}_1 e^{-\gamma l} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{I}_2 = \frac{\boldsymbol{U}_1}{Z_0} e^{-\gamma l}.$$

Средняя мощность, потребляемая нагрузкой,

$$P_2 = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(\boldsymbol{U}_2\hat{\boldsymbol{I}}_2) = \frac{U_1^2}{2Z_0} e^{-2\alpha l}.$$

Аналогично средняя мощность, отдаваемая генератором,

$$P_1 = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(\boldsymbol{U}_1\hat{\boldsymbol{I}}_1) = \frac{U_1^2}{2Z_0}.$$

Используя эти результаты, будем иметь

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = e^{-2\alpha l}.$$

Для линии с малыми потерями $\alpha l \ll 1$ и $\eta \approx 1 - 2\,\alpha l$.

Мощности P_1 и P_2 можно было бы также найти из выражения для мгновенных значений p, усреднив его по времени.

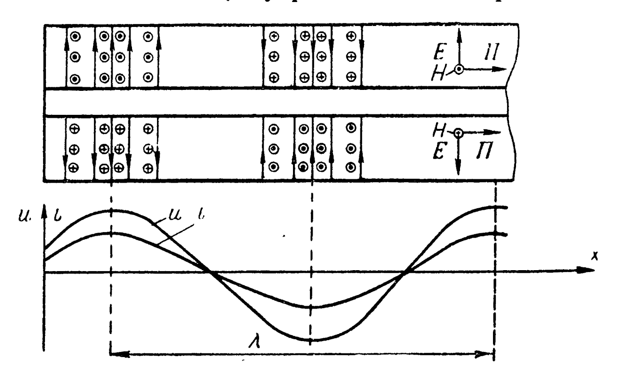


Рис. 6-15. Структура электрического и магнитного полей в продольном сечении коаксиальной линии при $t = \text{const}$.

Рассмотрим некоторые энергетические особенности бегущих волн. Величина энергии переменного тока в элементе линии dx в общем случае равна сумме выражений

$$dw_e = \frac{C_1 u^2}{2}\,dx \quad \text{и} \quad dw_m = \frac{L_1 i^2}{2}\,dx, \qquad (6\text{-}38)$$

где dw_e — мгновенная энергия электрического поля;

dw_m — мгновенная энергия магнитного поля.

Подставляя в (6-38) значения u и i из (6-37), находим, что

$$dw_e = \frac{C_1 U^2}{2} e^{-2\alpha x} \cos^2(\omega t - \beta x),$$

$$dw_m = \frac{L_1 U^2}{2Z_0} e^{-2\alpha x} \cos^2(\omega t - \beta x) = \frac{C_1 U^2}{2} e^{-2\alpha x} \cos^2(\omega t - \beta x).$$

Следовательно, в режиме бегущих волн передаваемая по линии энергия в любой момент поровну распределяется между электрическим и магнитным полями.

Чтобы наглядно представить передачу электромагнитных волн вдоль линии, сравним распределение напряжения и тока с распределением напряженностей электрического и магнитного полей, возникающих в пространстве между проводами. В качестве примера рассмотрим коаксиальную линию без потерь. На рис. 6-15 приведены кривые изменения величин напряжения и тока вдоль

линии для фиксированного момента времени. Здесь же показано распределение силовых линий электрического и магнитного поля. Как видно из рисунка, максимумы напряженностей $\overline{E}$ и $\overline{H}$ в режиме бегущих волн совпадают в пространстве и, естественно, совпадают с максимумами напряжения и тока. Силовые линии этих векторов в точках, удаленных друг от друга на расстояние, равное половине длины волны, в соответствии с законами изменения u и i меняют свое направление на противоположное. Вектор Пойнтинга, характеризующий движение энергии электромагнитного поля, во всех точках рассматриваемого пространства сохраняет свое направление неизменным. На основании этого можно утверждать, что электромагнитное поле, а следовательно, и его энергия, в режиме бегущих волн повсюду двигаются в сторону нагрузки.

6-8. Режим стоячих волн

Если прямая волна при распространении встречает на своем пути какое-либо «электрическое препятствие», то в линии наблюдается явление отражения, сопровождающееся возникновением обратной (отраженной) волны.

Роль электрического препятствия, создающего отражения, будет, очевидно, играть любая неоднородность, т. е. любое изменение электрических погонных параметров цепи по длине. Отражение волн, например, происходит в точке соединения двух отрезков линий с различными размерами сечения проводов или с различным расстоянием между ними. Отражение возникает также на конце линии, нагруженной на сопротивление, не равное волновому и т. д.

При сложении падающей и отраженной волн равных амплитуд в линии устанавливается так называемый режим стоячих волн. Строго говоря, этот режим будет иметь место только в цепи без потерь. В реальных линиях условия образования стоячих волн, как будет показано ниже, в принципе не выполняются.

Для полного отражения падающей волны от нагрузки необходимо, чтобы последняя не потребляла энергию. В соответствии с этим стоячие волны могут возникать, если:

а) линия разомкнута на конце ($Z_2 \to \infty$);

б) линия коротко замкнута на конце ($Z_2 = 0$);

в) линия замкнута на реактивное сопротивление ($Z_2 = jx_2$).

Рассмотрим каждый из перечисленных случаев по отдельности.

а) Линия разомкнута на конце

В режиме холостого хода (при $Z_2 \to \infty$) коэффициенты отражения согласно (6-21) и (6-21а) будут равны: $p_u = -p_i = 1$. Отсюда видно, что в линии, разомкнутой на конце, падающая и отраженная волны действительно имеют одинаковые амплитуды колебаний. Вместе с тем фазовые соотношения для токов и напряжений в точке

отражения оказываются различными: напряжения падающей и отраженной волн на конце линии совпадают по фазе, а токи сдвинуты на 180°. Вследствие этого результирующее напряжение в точке отражения достигает максимума (амплитуда его в два раза больше амплитуды напряжения падающей волны), а ток равен нулю.

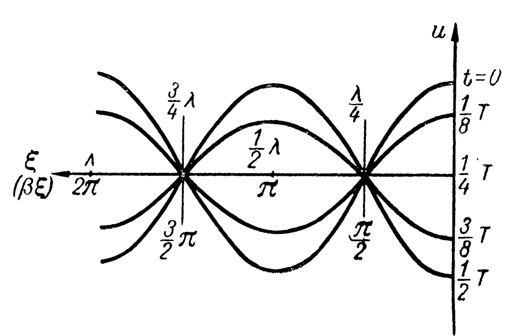


Рис. 6-16. Изменение напряжения вдоль линии, разомкнутой на конце, при $t = \text{const}$.

Чтобы найти комплексные амплитуды напряжения и тока, используем соотношения (6-23). Учитывая, что на конце линии (при $\xi = 0$) $\dot{I}_2 = 0$, получим:

$$\left.\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \cos \beta\xi, \\ \dot{I} &= j\frac{\dot{U}_2}{Z_0} \sin \beta\xi. \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}39)$$

Выражения для мгновенных значений u и i имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} u &= U_2 \cos \beta\xi \cos \omega t, \\ i &= -\frac{U_2}{Z_0} \sin \beta\xi \sin \omega t = \\ &= \frac{U_2}{Z_0} \sin \beta\xi \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}40)$$

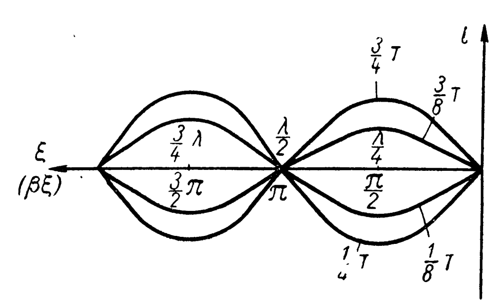


Рис. 6-17. Изменение тока вдоль линии, разомкнутой на конце, при $t = \text{const}$.

При выводе этих выражений полагалось, что $\dot{U}_2 = U_2$.

На рис. 6-16 приведены кривые изменения напряжения вдоль линии для различных моментов времени. Как видно из графиков, напряжение в отдельных точках при любых t оказывается равным нулю. Положение этих точек, называемых узлами напряжения, можно определить из условия: $\cos \beta\xi_m = 0$, откуда $\beta\xi_m = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$ и $\xi_m = (2m + 1)\frac{\lambda}{4}$; $m = 0, 1, 2, \ldots$, где ξ_m — координата m-ого узла.

Между узлами и на конце линии расположены точки, в которых амплитуды напряжения имеют максимальные значения. Это так называемые пучности напряжения, координаты их $\xi_n = n\frac{\lambda}{2} \ldots$; $n = 0, 1, 2, \ldots$

Аналогичный вид имеют кривые распределения тока вдоль линии, показанные на рис. 6-17. Здесь также наблюдаются узлы

и пучности, однако они сдвинуты в пространстве относительно узлов и пучностей напряжения на величину $\lambda/4$. Другими словами, узлы тока находятся в точках, где расположены пучности напряжения, а пучностям тока соответствуют узлы напряжения.

Узлы и пучности, появившиеся в результате интерференции падающей и отраженной волн равных амплитуд, характерны для рассматриваемого режима. Нетрудно сообразить, что пучности напряжения (или тока) в линии будут наблюдаться там, где напря-

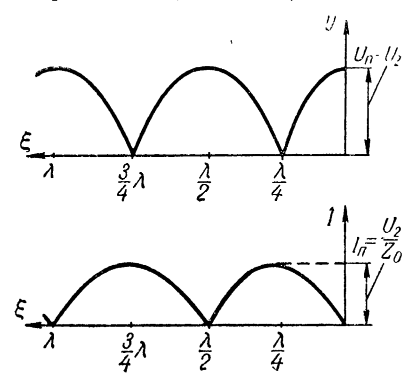


Рис. 6-18. Распределение амплитуд напряжения и тока вдоль линии, разомкнутой на конце.

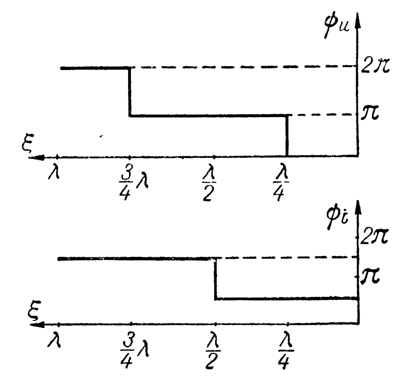


Рис. 6-19. Изменение начальных фаз напряжения и тока вдоль линии, разомкнутой на конце.

жения (или токи) падающей и отраженной волн имеют одинаковые фазы, а узлы — в точках, где эти величины находятся в противофазе.

Из выражений (6-40) следует, что амплитуды напряжения и тока в различных точках линии равны:

$$U = U_2 |\cos \beta\xi|,$$

$$I = I_2 |\sin \beta\xi| = \frac{U_2}{Z_0} |\sin \beta\xi|.$$

В пучностях напряжения

$$U_п = U_2,$$

и в пучностях тока

$$I_п = \frac{U_2}{Z_0} = \frac{U_п}{Z_0}.$$

Начальная фаза колебаний u или i в пределах любого интервала изменения ξ, находящегося между узлами, остается постоянной. Однако при переходе через узел она изменяется скачком на 180°.

На рис. 6-18 показаны кривые распределения амплитуд напряжения и тока по длине линии, а на рис. 6-19 — соответствующие фазовые характеристики. В качестве исходного уровня отсчета принята начальная фаза напряжения на конце линии. Из

сравнения последних графиков видно, что напряжение и ток в любой точке линии сдвинуты по фазе на 90°, причем на одних участках ток опережает напряжения (например, на интервале $0 \leqslant \xi \leqslant \frac{\lambda}{4}$), а на других — отстает от напряжения $\left(\frac{\lambda}{4} \leqslant \xi \leqslant \frac{\lambda}{4}\right.$ и т. д.). На основании этого можно утверждать, что в одних случаях линия ведет себя как емкость, а в других — как индуктивность.

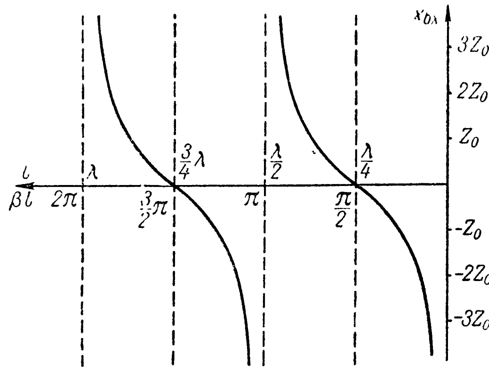


Рис. 6-20. Зависимость входного (реактивного) сопротивления линии, разомкнутой на конце, от величины $\beta l = \omega l \sqrt{L_1 C_1}$.

Отмеченные особенности представляются более наглядно, если вычислить входное сопротивление линии. Последнее согласно (6-25) при $Z_2 \to \infty$ будет

$$Z_{вх} = j x_{вх}, \qquad (6\text{-}41)$$

где $x_{вх} = -Z_0 \operatorname{ctg} \beta l$.

Из (6-41) следует, что входное сопротивление имеет только реактивную составляющую; знак входного сопротивления определяется знаком функции $\operatorname{ctg} \beta l$. Активная составляющая $Z_{вх}$ равна нулю, так как потери энергии в линии отсутствуют.

На рис. 6-20 приведен график изменения величины $x_{вх}$ в зависимости от аргумента $\beta l = \omega l \sqrt{L_1 C_1}$. Этот график одновременно дает представление и о зависимости входного сопротивления линии от ее длины или частоты колебаний возбуждающего напряжения.

На рисунке видно, что $x_{вх}$ меняется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. На интервале $0 \leqslant l \leqslant \frac{\lambda}{4}$ входное сопротивление имеет емкостный характер, на интервале $\frac{\lambda}{4} < l \leqslant \frac{\lambda}{2}$ — индуктивный и т. д.

Если длина линии составляет четверть волны (или любое нечетное число четвертей волны), входное сопротивление ее оказывается равным нулю, в то время как для постоянного тока сопротивление подобной системы равно бесконечности.

В окрестностях точек, соответствующих узлам напряжения $\left[\beta l = (2m + 1) \frac{\pi}{2}\right]$, линия при изменении частоты ведет себя аналогично последовательному колебательному контуру без потерь. Вблизи пучностей напряжения ($\beta l = n\pi$; $n \neq 0$) цепь эквивалентна в смысле частотной зависимости $Z_{вх}$ идеальному параллельному контуру.

При $l \ll \lambda$ отрезок линии, разомкнутой на конце, можно рассматривать как своеобразный конденсатор, образованный двумя

параллельными проводами малой длины. Действительно, в этом случае

$$x_{вх} = -Z_0 \operatorname{ctg} \beta l \approx -\frac{Z_0}{\beta l} = -\frac{1}{\omega C_1 l}.$$

Значит, любой конденсатор, применяемый в радиотехнике или электротехнике, будет вести себя как элемент с сосредоточенной емкостью только лишь при условии, что его линейные размеры много меньше длины волны. Если эти условия не выполняются, конденсатор, как видно из рис. 6-20, может даже превратиться в индуктивность.

б) Линия коротко замкнута на конце

Если сопротивление нагрузки $Z_2 = 0$, то, как видно из выражения (6-21а), $p_u = -p_i = -1$. В этом случае между напряжениями падающей и отраженной волн в точке отражения имеется сдвиг по фазе в 180°, а фазы токов одинаковы. В результате напряжение на конце линии равно нулю, а ток достигает максимальной величины.

Принимая во внимание, что при $\xi = 0$ амплитуда напряжения $U_2 = 0$, из общих формул (6-23) для комплексных амплитуд получим

$$\left.\begin{aligned} \dot{U} &= j\dot{I}_2 Z_0 \sin \beta\xi, \\ \dot{I} &= \dot{I}_2 \cos \beta\xi. \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}42)$$

Мгновенные значения напряжения и тока, если $\dot{I}_2 = I_2$,

$$\left.\begin{aligned} u &= \operatorname{Re}(\dot{U} e^{j\omega t}) = -I_2 Z_0 \sin \beta\xi \sin \omega t = \\ &= I_2 Z_0 \sin \beta\xi \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \\ i &= \operatorname{Re}(\dot{I} e^{j\omega t}) = I_2 \cos \beta\xi \cos \omega t. \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}42а)$$

Отсюда следует, что амплитуды U и I при различных ξ определяются выражениями:

$$U = I_2 Z_0 |\sin \beta\xi|,$$
$$I = I_2 |\cos \beta\xi|.$$

Кривые изменения амплитуд напряжения и тока вдоль линии приведены на рис. 6-21. Как и в предыдущем случае, распределение амплитуд характеризуется наличием узлов и пучностей, причем узлы напряжения (и пучности тока) находятся в точках $\xi_m = m\frac{\lambda}{2}$; $m = 0, 1, 2, \ldots$, а пучности напряжения и узлы тока — в точках $\xi_n = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$; $n = 1, 2, \ldots$

Для расчета входного сопротивления короткозамкнутой линии можно использовать формулу (6-25), либо найти отношение комплексных амплитуд $\dot{U}$ и $\dot{I}$ при $\xi = l$ из (6-42). В результате будем иметь

$$Z_{вх} = jZ_0 \operatorname{tg} \beta l, \qquad (6\text{-}43)$$

откуда

$$x_{вх} = Z_0 \operatorname{tg} \beta l.$$

Таким образом, входное сопротивление линии оказывается чисто реактивным. Зависимость его от длины l или частоты колебаний ω определяется видом функции $\operatorname{tg} \beta l$ (рис. 6-22). Из рисунка видно, что на промежутке $0 \leqslant \beta l < \frac{\pi}{2}$ составляющая $x_{вх}$ имеет индуктивный характер, при $\frac{\pi}{2} < \beta l \leqslant \pi$ — емкостный и т. д.

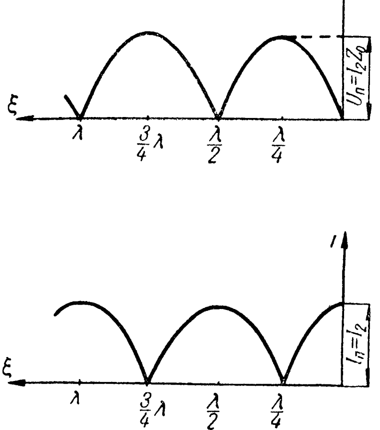


Рис. 6-21. Распределение амплитуд напряжения и тока вдоль линии, короткозамкнутой на конце.

Рис. 6-22. Зависимость входного (реактивного) сопротивления короткозамкнутой линии от величины βl.

Если длина $l \ll \lambda$, линия ведет себя подобно небольшому витку с соответствующей индуктивностью. В самом деле, для короткой линии $x_{вх} = Z_0 \operatorname{tg} \beta l \approx Z_0 \beta l = \omega L_1 l$. Отсюда следует, что любая катушка самоиндукции будет обладать свойствами элемента с сосредоточенной индуктивностью при условии, что линейные размеры ее много меньше длины волны.

В окрестностях точек, где находятся узлы или пучности напряжения, частотные свойства линии аналогичны свойствам последовательного или параллельного колебательного контуров. В соответствии с этим при $\beta l = m\frac{\pi}{2}$; $m \neq 0$ входное сопротивление $Z_{вх} = 0$, а при $\beta l = (2n - 1)\frac{\pi}{2}$ величина $Z_{вх} \to \infty$.

Отсюда следует, что отрезки линии длиной λ/4 при определенных условиях можно использовать в качестве изоляторов. Последние часто применяются для крепления проводов двухпроводной или

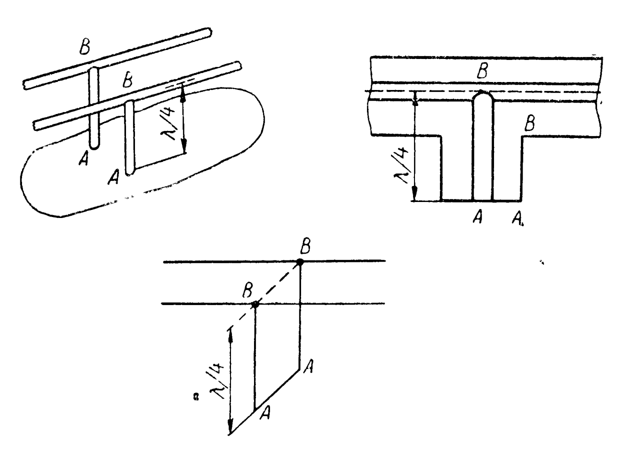


Рис. 6-23. Использование четвертьволновой линии в качестве «металлического изолятора».

коаксиальной линии (рис. 6-23). В самом деле, если проводники, поддерживающие линию, закорочены на конце (т. е. сопротивление в точках *А*-*А* равно нулю), входное сопротивление их в точках *В*-*В*, как было только что показано, теоретически равно бесконечности.

В реальных условиях проводники, образующие такой «металлический изолятор», обладают конечной, но достаточно большой проводимостью. Поэтому входное сопротивление опоры в точках *В*-*В* (см. § 6-10) будет иметь весьма большое значение, и шунтирующим влиянием «утечек изолятора» практически можно пренебречь.

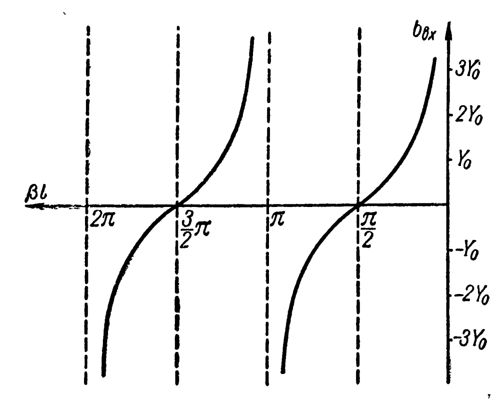
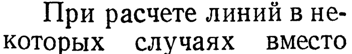


Рис. 6-24. Зависимость входной (реактивной) проводимости линии, короткозамкнутой на конце, от величины βl.



При расчете линий в некоторых случаях вместо входного сопротивления удобнее пользоваться входной проводимостью. Последняя для отрезка, коротко замкнутого на конце,

$$Y_{вх} = \frac{1}{Z_{вх}} = -jY_0 \operatorname{ctg} \beta l = -jb_{вх},$$

где $b_{вх} = Y_0 \operatorname{ctg} \beta l$; $Y_0 = \frac{1}{Z_0}$ — волновая проводимость линии.

График изменения величины входной проводимости $b_{вх}$ в зависимости от аргумента βl представлен на рис. 6-24.

в) Линия замкнута на реактивное сопротивление

Определим коэффициент отражения в линии, замкнутой на реактивное сопротивление. Из формулы (6-21) следует, что при $Z_2 = jx_2$

$$p_u = \frac{-Z_0 + jx_2}{Z_0 + jx_2}.$$

После несложных преобразований это выражение можно привести к виду

$$p_u = e^{j\psi_u},$$

где

$$\psi_u = \operatorname{arctg} \frac{2x_2 Z_0}{x_2^2 - Z_0^2}.$$

Отсюда вытекает, что модуль коэффициента отражения равен единице, и, следовательно, в линии имеет место режим стоячих волн. Напряжение обратной волны в точке отражения сдвинуто по фазе относительно напряжения падающей волны на угол ψ_u, величина которого при конечном x_2 находится между 0 и π. Вследствие этого на конце линии, в отличие от предыдущих случаев, теперь нет ни узла, ни пучности напряжения. То же самое можно сказать и о токе, так как коэффициент отражения $p_i = -p_u$.

Для расчета комплексных амплитуд тока и напряжения используем выражения (6-23). При $Z_2 = \frac{U_2}{I_2} = jx_2$ будем иметь

$$U = U_2 \left(\cos \beta\xi + \frac{Z_0}{X_2} \sin \beta\xi\right),$$

$$I = I_2 \left(\cos \beta\xi - \frac{x_2}{Z_0} \sin \beta\xi\right),$$

или в иной форме записи

$$U = U_2 \sqrt{1 + \left(\frac{Z_0}{x_2}\right)^2} \cos(\beta\xi - \varphi),$$

$$I = -I_2 \sqrt{1 + \left(\frac{x_2}{Z_0}\right)^2} \sin(\beta\xi - \varphi),$$

причем $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{Z_0}{x_2}$.

Амплитуды напряжения и тока в различных точках линии

$$U = U_2 \sqrt{1 + \left(\frac{Z_0}{x_2}\right)^2} \, |\cos(\beta\xi - \varphi)|,$$

$$I = I_2 \sqrt{1 + \left(\frac{x_2}{Z_0}\right)^2} \, |\sin(\beta\xi - \varphi)|.$$

Отсюда вытекает, что узлы напряжения находятся в точках, где функция $|\cos(\beta\xi - \varphi)| = 0$, т. е. где $\beta\xi_m = (2m + 1)\frac{\pi}{2} + \varphi$ и, стало быть, $\xi_m = (2m + 1)\frac{\lambda}{4} + \frac{\varphi}{2\pi}\lambda$; $m = 0, 1, 2, \ldots$

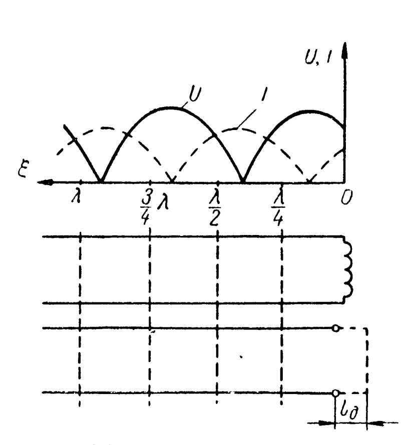


Рис. 6-25. Распределение амплитуд тока и напряжения вдоль линии, «нагруженной» на индуктивность.

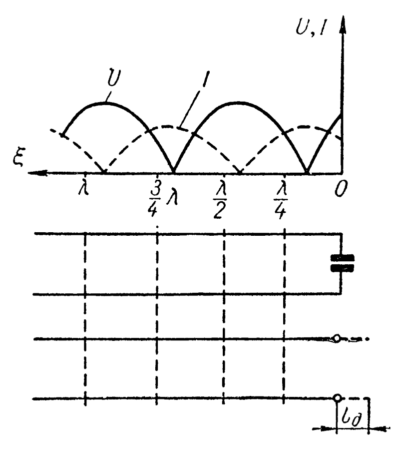


Рис. 6-26. Распределение амплитуд тока и напряжения вдоль линии, «нагруженной» на емкость.

Положение узлов тока можно определить из условия

$$|\sin(\beta\xi - \varphi)| = 0,$$

откуда

$$\xi_n = n\frac{\lambda}{2} + \frac{\varphi}{2\pi}\lambda; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Предположим, что линия замкнута на индуктивное сопротивление ($x_2 > 0$). В этом случае $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$; следовательно, узлы напряжения будут располагаться слева от точек $\frac{\lambda}{4}, \frac{3}{4}\lambda, \ldots, (2m + 1)\frac{\lambda}{4} \ldots$

Получающиеся кривые распределения амплитуд тока и напряжения приведены на рис. 6-25.

Если на конце линии включена емкость, угол φ будет отрицательным, причем $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant 0$. Теперь узлы напряжения смещаются относительно точек $\frac{\lambda}{4}, \frac{3}{4}\lambda, \ldots$ вправо, к нагрузке (рис. 6-26).

Чтобы иметь качественное представление о расположении узлов напряжения и тока вдоль линии, реактивное сопротивление x_2 на ее конце можно заменить дополнительным отрезком линии с таким же входным сопротивлением. Так, например, вместо индуктивного сопротивления удобно ввести короткозамкнутый отрезок, длина которого $l_д$ меньше четверти волны (рис. 6-25). Аналогично, сопротивление x_2 емкостного характера целесообразно заменить разомкнутым отрезком длиной $l_д < \frac{\lambda}{4}$ (рис. 6-26). В результате действительное распределение тока и напряжения в исходной цепи при $\xi \geq 0$ будет совпадать с распределением в эквивалентной линии, короткозамкнутой или разомкнутой на конце.

Рассмотрим в заключение энергетические особенности режима стоячих волн. Для подсчета энергии, сосредоточенной в элементе линии длиной $d\xi$, подставим в (6-38) значения u и i, например, из (6-42); в результате получим

$$dw_e = \frac{C_1 I_2^2 Z_0^2}{2} \sin^2 \omega t \sin^2 \beta\xi \, d\xi = \frac{L_1 I_2^2}{2} \sin^2 \omega t \sin^2 \beta\xi \, d\xi,$$

$$dw_m = \frac{L_1 I_2^2}{2} \cos^2 \omega t \cos^2 \beta\xi \, d\xi.$$

Отсюда видно, что в стоячей волне наблюдается непрерывное перераспределение энергии между электрическим и магнитным полями. В одни моменты времени, например, при $t = 0,\ T,\ 2T$ и т. д., энергия линии заключена в магнитном поле, а в другие $\left(\text{при } t = \frac{T}{2}, \frac{3}{2} T \ldots\right)$ носителем ее является электрическое поле. Вместе с тем в цепи происходит непрерывный энергетический обмен между линией и генератором, так как в режиме стоячих волн линия при $l \neq n \frac{\lambda}{4}$ (где $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$) ведет себя по отношению к источнику (генератору) или как индуктивность, или как емкость (см. § 3-3 п. «в» и «г»).

Из приведенных выше выражений следует, что средняя энергия, приходящаяся на единицу длины, вдоль линии не меняется. В самом деле, усредняя значения dw_e и dw_m за период колебаний, будем иметь

$$(dW)_{ср} = (dW_e)_{ср} + (dW_m)_{ср} = \frac{L_1 I_2^2}{4} \sin^2 \beta\xi \, d\xi + $$
$$+ \frac{L_1 I_2^2}{4} \cos^2 \beta\xi \, d\xi = \frac{L_1 I_2^2}{4} d\xi.$$

Поэтому $\frac{(dW)_{ср}}{d\xi} = \frac{L I_2^2}{4}$.

Мгновенное значение мощности в любой точке линии

$$p = ui = -\frac{1}{4} I_2^2 Z_0 \sin 2\omega t \sin 2\beta t$$

изменяется во времени по гармоническому закону с двойной частотой колебаний. Вследствие этого средняя мощность, отдаваемая генератором, равна нулю.

6-9. Режим смешанных волн

В линии, нагруженной на комплексное, или активное сопротивление, не равное волновому, устанавливается так называемый режим смешанных волн. Для этого режима также характерно наличие отраженной волны; однако последняя будет иметь меньшую интенсивность, нежели падающая волна, так как часть энергии поглощается сопротивлением нагрузки.

а) Линия с активным сопротивлением на конце

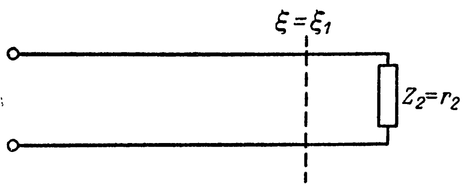


Рис. 6-27. Линия, нагруженная на активное сопротивление, не равное волновому.

Исследуем линию без потерь с активным сопротивлением на конце (рис. 6-27).

Если $Z_2 = r_2 \neq Z_0$, коэффициент отражения $p_u = \frac{r_2 - Z_0}{r_2 + Z_0}$ оказывается вещественным, причем величина его меньше единицы, а знак зависит от соотношения между r_2 и Z_0.

Из выражений (6-23) следует, что комплексные амплитуды напряжения и тока в линии без потерь при $\frac{\dot U_2}{\dot I_2} = r_2$ принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \dot U &= \dot U_2 (\cos\beta\xi + jm\sin\beta\xi), \\ \dot I &= \frac{\dot U_2}{Z_0}(m\cos\beta\xi + j\sin\beta\xi), \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}44)$$

где $m = \frac{Z_0}{r_2}$.

Отсюда для действительных амплитуд напряжения и тока имеем:

$$\left.\begin{aligned} U &= U_2\sqrt{\cos^2\beta\xi + m^2\sin^2\beta\xi}; \\ I &= \frac{U_2}{Z_0}\sqrt{m^2\cos^2\beta\xi + \sin^2\beta\xi}. \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}45)$$

Пусть $m < 1$, т. е. $r_2 > Z_0$. Получающиеся при этом графики распределения амплитуд напряжения и тока вдоль линии показаны на рис. 6-28. Характерной особенностью изображенных здесь кривых является наличие точек, где напряжение и ток принимают экстремальные значения. Так, например, максимумы напряжения и минимумы тока наблюдаются в точках $\xi = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \ldots$, а минимумы напряжения и максимумы тока — при $\xi = \frac{\lambda}{4}, \frac{3}{4}\lambda, \ldots$

Из выражений (6-45) следует, что в рассматриваемых точках величины напряжения и тока

$$\left.\begin{aligned} U_{\text{макс}} &= U_2, \ U_{\text{мин}} = mU_2; \\ I_{\text{макс}} &= \frac{U_2}{Z_0}, \quad I_{\text{мин}} = \frac{U_2}{r_2}. \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}46)$$

По мере увеличения сопротивления нагрузки $U_{\text{мин}}$ и $I_{\text{мин}}$ будут уменьшаться, в пределе при $r_2 \to \infty$ стремясь к нулю. Это означает, что смешанные волны в данном случае вырождаются в стоячие, наблюдаемые в линии, разомкнутой на конце.

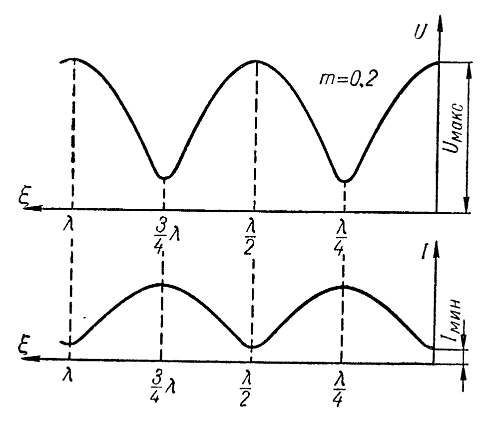


Рис. 6-28. Распределение амплитуд напряжения и тока вдоль линии при $r_2 > Z_0$.

На рис. 6-29 представлены графики распределения амплитуд U и I для $m > 1$ (т. е. $r_2 < Z_0$). По своему виду они аналогичны предыдущим, однако на конце линии теперь имеет место максимум тока и минимум напряжения.

Нетрудно показать, что для $m > 1$

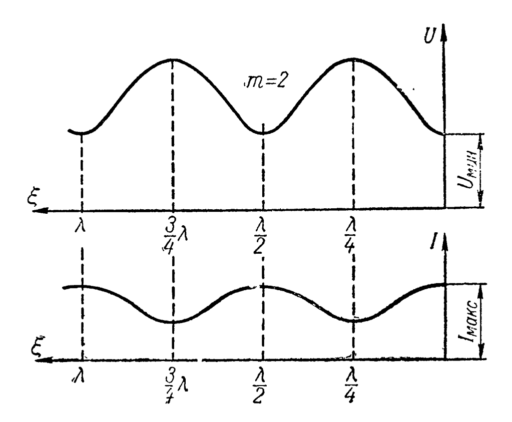


Рис. 6-29. Распределение амплитуд напряжения и тока вдоль линии при $r_2 < Z_0$.

и

$$\left.\begin{aligned} U_{\text{макс}} &= mU_2, \\ U_{\text{мин}} &= U_2 \\ I_{\text{макс}} &= \frac{U_2}{r_2}, \\ I_{\text{мин}} &= \frac{U_2}{Z_0}. \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}47)$$

Если $r_2 \to 0$ (режим короткого замыкания), то $U_{\text{макс}} = \frac{Z_0}{r_2} U_2$ будет иметь конечное значение при условии, что $U_2 = 0$. Следовательно, $U_{\text{мин}}$ и $I_{\text{мин}}$ снова обращаются в нуль, т. е. в линии также устанавливаются стоячие волны.

Предположим далее, что сопротивление нагрузки приближается по величине к волновому. При этом условии $m \to 1$, $U_{\text{мин}} \to U_{\text{макс}}$ и режим смешанных волн переходит в режим бегущих волн.

Таким образом, распределение тока и напряжения в режиме смешанных волн является промежуточным между распределениями, характерными для предельных состояний.

В общем случае смешанную волну можно представить в виде совокупности бегущей и стоячей волн. Этим, собственно, и объясняется происхождение названия «смешанная волна». В самом деле, выражение для комплексной амплитуды напряжения в линии нетрудно привести к виду

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_2 [\cos \beta\xi + \boldsymbol{j} \sin \beta\xi + \boldsymbol{j}(m-1) \sin \beta\xi] = \boldsymbol{U}_2 e^{j\beta\xi} + \boldsymbol{j}(m-1) \boldsymbol{U}_2 \sin \beta\xi.$$

Аналогично

$$\boldsymbol{I} = \frac{U_2}{Z_0} e^{j\beta\xi} + (m-1) \frac{U_2}{Z_0} \cos \beta\xi.$$

В этих равенствах первые слагаемые соответствуют бегущей, а вторые — стоячей волнам.

Для характеристики процессов в длинной линии удобно использовать так называемый к о э ф ф и ц и е н т б е г у щ е й в о л н ы

$$k_б = \frac{U_{мин}}{U_{макс}} = \frac{I_{мин}}{I_{макс}},$$

который впервые был введен в теорию цепей с распределенными параметрами советским ученым А. А. Пистолькорсом.

В режиме стоячих волн этот коэффициент обращается в нуль, для бегущих волн $k_б = 1$ и, наконец, в промежуточном случае смешанных волн $k_б < 1$.

Если линия нагружена на активное сопротивление $r_2 > Z_0$, то, как следует из (6-46), $k_б = m = \frac{Z_0}{r_2}$. Если же $r_2 < Z_0$, то в соответствии с (6-47) $k_б = \frac{1}{m} = \frac{r_2}{Z_0}$.

Выведем формулу, связывающую коэффициент бегущей волны с коэффициентом отражения. Учитывая, что $U_{мин} = U_{пад} - U_{отр}$ и $U_{макс} = U_{пад} + U_{отр}$, получим

$$k_б = \frac{U_{мин}}{U_{макс}} = \frac{U_{пад} - U_{отр}}{U_{пад} + U_{отр}} = \frac{1 - \frac{U_{отр}}{U_{пад}}}{1 + \frac{U_{отр}}{U_{пад}}} = \frac{1-p}{1+p}. \qquad (6\text{-}48)$$

Наряду с коэффициентом $k_б$ в практике иногда применяют обратную ему величину — к о э ф ф и ц и е н т с т о я ч е й в о л н ы

$$k_с = \frac{1}{k_б} = \frac{U_{макс}}{U_{мин}}.$$

Ясно, что величина $k_с$ будет изменяться в пределах $1 \leqslant k_с < \infty$.

Изложенные рассуждения дают достаточно полное представление об амплитудных характеристиках линии в режиме смешанных волн, т. е. о распределении амплитуд тока и напряжения вдоль

линии. Что касается фазовых характеристик, то они аналогично амплитудным будут занимать промежуточное положение между предельными характеристиками линии в режимах бегущих и стоячих волн.

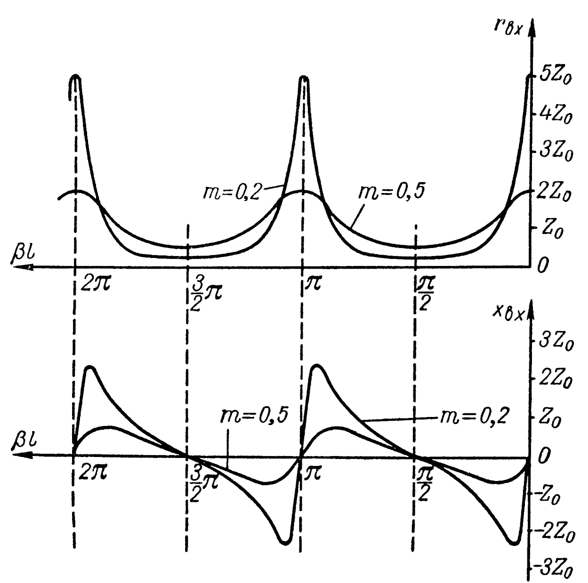


Рис. 6-30. Зависимость составляющих входного сопротивления линии от величины βl при $r_2 > Z_0$.

Значительный интерес для практики представляет расчет входного сопротивления линии, нагруженной на активное сопротивление. Используя (6-25), при $Z_2 = r_2$ будем иметь

$$Z_{вх} = r_{вх} + jx_{вх} = Z_0 \frac{r_2 \cos \beta l + jZ_0 \sin \beta l}{Z_0 \cos \beta l + jr_2 \sin \beta l}.$$

Умножая числитель и знаменатель на величину $Z_0 \cos \beta l - jr_2 \sin \beta l$, получим

$$r_{вх} = \frac{mZ_0}{m^2 \cos^2 \beta l + \sin^2 \beta l}; \qquad (6\text{-}49)$$

$$x_{вх} = 0{,}5Z_0\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)\frac{\sin 2\beta l}{\cos^2 \beta l + \frac{1}{m^2} \sin \beta l}. \qquad (6\text{-}50)$$

На рис. 6-30 приведены примеры частотных характеристик линии (т. е. зависимость $r_{вх}$ и $x_{вх}$ от частоты или, точнее, от аргумента βl). Из рисунка видно, что при «углах» βl, лежащих в 1-й четверти $\left(0 < \beta l < \frac{\pi}{2}\right)$, реактивная составляющая $Z_{вх}$ отрицательна, и линия на фиксированной частоте ведет себя как последовательное соединение активного сопротивления с емкостью. Для «углов» βl, находя-

щихся во 2-й четверти, реактивное сопротивление оказывается положительным. В этом случае линия эквивалентна последовательному соединению сопротивления и индуктивности. По мере дальнейшего увеличения βl характер кривых повторяется. В окрестностях точек $\beta l = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ldots$ частотные свойства линии (рис. 6-30) будут аналогичны свойствам параллельного контура с потерями.

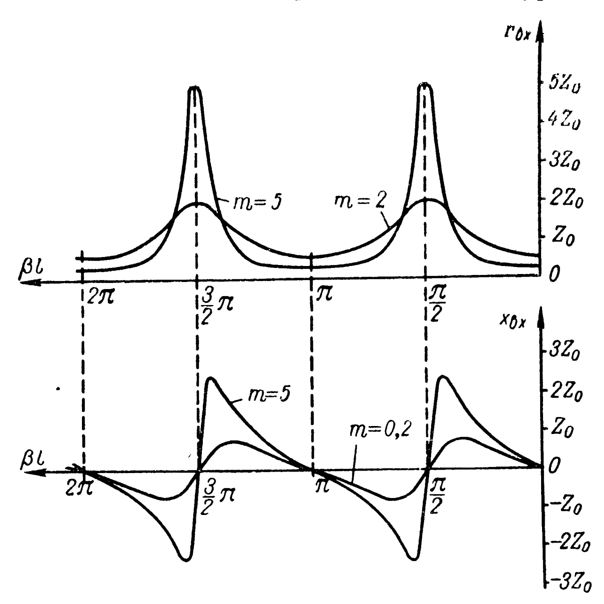


Рис. 6-31. Зависимость составляющих входного сопротивления линии от величины βl при $r_2 > Z_0$.

Вблизи точек $\beta l = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi,\ldots$ линия ведет себя как последовательный контур.

Зависимость входного сопротивления линии от аргумента βl при $m > 1$ (т. е. $r_2 < Z_0$) показана на рис. 6-31; кривые по своему виду аналогичны предыдущим. Однако на интервале $0 < \beta l < \frac{\pi}{2}$ реактивная составляющая входного сопротивления теперь имеет индуктивный характер, на интервале $\frac{\pi}{2} < \beta l < \pi$ — емкостный и т. д.

б) Линия, нагруженная на комплексное сопротивление

Как было показано выше, входное сопротивление линии, нагруженной на активное сопротивление, в произвольной точке $\xi' \neq n\frac{\lambda}{4}$ ($n = 1, 2, 3,\ldots$) имеет комплексный характер:

$$Z_{вх}(\xi') = r_{вх} + jx_{вх}.$$

Если участок линии, расположенный справа от точки ξ' (рис. 6-27) отбросить и вместо него включить новое сопротивление нагрузки, равное сопротивлению $Z_{вх}(\xi')$, распределение тока и напряжения в оставшейся части линии, очевидно, сохранится неизменным. На основании этого можно утверждать, что при комплексной нагрузке в линии устанавливается режим смешанных волн. Однако в отличие от случая активной нагрузки результирующие амплитуды U и I на конце линии теперь не имеют ни максимума, ни минимума.

Коэффициент отражения, как видно из (6-21),

$$p_u = \sqrt{\frac{(r_2 - Z_0)^2 + x_2^2}{(r_2 + Z_0)^2 + x_2^2}}\, e^{j\psi_u}, \tag{6-51}$$

где

$$\psi_u = \operatorname{arctg}\frac{2x_2Z_0}{Z_2^2 - Z_0^2}.$$

Отсюда вытекает, что в точке отражения напряжение отраженной волны сдвинуто по фазе относительно напряжения падающей волны на угол ψ_u.

Чтобы найти точки, в которых эти напряжения складываются в фазе и, следовательно, результирующая амплитуда достигает максимума, рассмотрим (6-19) с учетом (6-21) и (6-51). В результате для линии без потерь будем иметь

$$U = \frac{U_2 + I_2Z_0}{2} e^{j\beta\xi}\left[1 + pe^{j(\psi_u - 2\beta\xi)}\right].$$

Нетрудно убедиться, что амплитуда U будет максимальна, если $\psi_u - 2\beta\xi = 2n\pi$; $n = 0, 1, 2,\ldots$ Таким образом, первый максимум напряжения находится в точке

$$\xi_0 = \frac{\psi_u}{2\beta} = \frac{\lambda}{4\pi}\operatorname{arctg}\frac{2x_2Z_0}{Z_2^2 - Z_0^2}. \tag{6-52}$$

Используя (6-48) и (6-51), можно рассчитать коэффициент бегущей волны. После несложных преобразований находим, что

$$k_б = \frac{\sqrt{(r_2 + Z_0)^2 + x_2^2} - \sqrt{(r_2 - Z_0)^2 + x_2^2}}{\sqrt{(r_2 + Z_0)^2 + x_2^2} + \sqrt{(r_2 - Z_0)^2 + x_2^2}}. \tag{6-53}$$

Выражения (6-52) и (6-53) впервые были получены советским ученым В. В. Татариновым. Совокупность их дает возможность вычислить активную и реактивную составляющие сопротивления нагрузки Z_2, если известны волновое сопротивление, коэффициент бегущей волны в линии и расстояние от ее конца до точки 1-го максимума (или минимума) напряжения. Практически величины $k_б$ и ξ_0 находятся экспериментально путем снятия кривых распределения амплитуд напряжения вдоль линии с заданным волновым сопротивлением — так называемой измерительной линии. На этом принципе основан один из методов измерения комплексных сопротивлений в диапазоне ультракоротких волн.

Измерительная линия позволяет также весьма просто определить длину волны (или частоту колебаний) генератора. Последняя будет равна удвоенному расстоянию между соседними минимумами или максимумами амплитуд напряжения.

Зависимость входного сопротивления линии с комплексной нагрузкой от частоты имеет такой же характер, как и для линии, нагруженной на активное сопротивление $r_2 \neq Z_0$. Однако в рассматриваемом случае нули реактивной составляющей и соответственно экстремальные значения активной составляющей $Z_{вх}$ будут смещены из точек $\xi = 0, \frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{2}, \ldots$ Из выражения (6-27) следует, что $x_{вх} = 0$ в точках, где $\psi_u - 2\beta l = n\pi$; $n = 0, 1, 2, \ldots$

Рассчитаем входное сопротивление линии, длина которой равна $n\frac{\lambda}{4}$.

Если $n = 2m$, где $m = 1, 2, 3, \ldots$, то $\beta l = m\pi$, и согласно выражению (6-25) $Z_{вх} = Z_2$. Значит, входное сопротивление линии, длина которой равна целому числу полуволн, оказывается равным сопротивлению нагрузки.

При нечетных $n = 2m - 1$ величина $\beta l = (2m-1)\frac{\pi}{2}$ и

$$Z_{вх} = \frac{Z_0^2}{Z_2}. \qquad (6\text{-}54)$$

Отсюда видно, что линия, длина которой равна нечетному числу четвертей волны, осуществляет трансформацию сопротивлений. Так, малые активные сопротивления могут быть трансформированы в сопротивления большой величины, индуктивные сопротивления превращаются в емкостные и т. д. Подобные свойства четвертьволновых отрезков линий, как будет показано ниже, находят применение на практике.

6-10. Режим холостого хода и короткого замыкания в линии с потерями

Рассмотрим теперь особенности волновых процессов в линии, разомкнутой или короткозамкнутой на конце, с учетом потерь.

В общем случае комплексные амплитуды тока и напряжения определяются выражениями (6-22). В режиме холостого хода амплитуда тока на конце линии $I_2 = 0$. При этом условии равенства (6-22) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{U} &= \boldsymbol{U}_2 \operatorname{ch} \gamma\xi, \\ \boldsymbol{I} &= \frac{\boldsymbol{U}_2}{Z_0} \operatorname{sh} \gamma\xi. \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}55)$$

Из теории гиперболических функций известно, что

$$\operatorname{ch} \gamma\xi = \operatorname{ch}(\alpha\xi + j\beta\xi) = \operatorname{ch} \alpha\xi \cos \beta\xi + j \operatorname{sh} \alpha\xi \sin \beta\xi,$$
$$\operatorname{sh} \gamma\xi = \operatorname{sh}(\alpha\xi + j\beta\xi) = \operatorname{sh} \alpha\xi \cos \beta\xi + j \operatorname{ch} \alpha\xi \sin \beta\xi.$$

Подставляя значения $\operatorname{ch}\gamma\xi$ и $\operatorname{sh}\gamma\xi$ в (6-55), будем иметь:

$$U = U_2 \operatorname{ch}\alpha\xi\,(\cos\beta\xi + j\operatorname{th}\alpha\xi\sin\beta\xi),$$

$$I = \frac{U_2}{Z_0}\operatorname{ch}\alpha\xi\,(\operatorname{th}\alpha\xi\cos\beta\xi + j\sin\beta\xi),$$

где $\operatorname{th}\alpha\xi = \frac{\operatorname{sh}\alpha\xi}{\operatorname{ch}\alpha\xi}$ — тангенс гиперболический аргумента $\alpha\xi$.

Введем обозначения:

$$U_2' = U_2 \operatorname{ch}\alpha\xi \quad \text{и} \quad m' = \operatorname{th}\alpha\xi;$$

тогда

$$U = U_2'(\cos\beta\xi + jm'\sin\beta\xi),$$

$$I = \frac{U_2'}{Z_0}(m'\cos\beta\xi + j\sin\beta\xi).$$

Полученные выражения аналогичны равенствам (6-44), характеризующим режим смешанных волн. Однако коэффициент m' и амплитуда U_2' в рассматриваемом случае оказываются функциями координаты ξ. Значения их по мере увеличения расстояния от конца линии до точки наблюдения в соответствии с изменением функций $\operatorname{th}\alpha\xi$ и $\operatorname{ch}\alpha\xi$ возрастают. В пределе, при $\xi \to \infty$, величина m' обращается в единицу, а U_2' стремится к бесконечности.

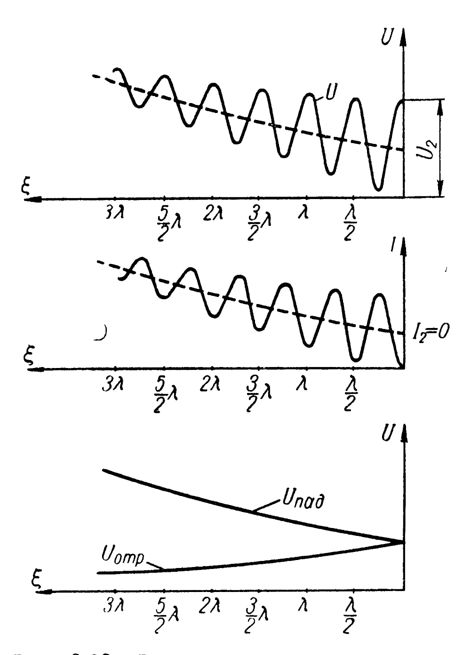


Рис. 6-32. Распределение амплитуд напряжения и тока вдоль линии с потерями при $Z_2 \to \infty$.

Кривые распределения амплитуд напряжения и тока вдоль линии изображены на рис. 6-32. Здесь же показаны величины амплитуд напряжения падающей и отраженной волн (нижний график). Из рисунка видно, что при удалении от конца линии разница между максимальными и минимальными значениями амплитуд напряжения и тока постепенно уменьшается, т. е. кривые сглаживаются, а средние значения их растут.

С физической точки зрения отмеченные особенности распределения тока и напряжения объясняются тем, что в линии с потерями амплитуды падающей и отраженной волн вследствие затухания непрерывно изменяются по длине. На больших расстояниях от

конца линии отраженная волна становится значительно слабее падающей волны, поэтому распределение тока и напряжения при $\alpha\xi \gg 1$ приближается к распределению, соответствующему режиму бегущих волн. Вместе с тем в окрестностях точки отражения падающая и отраженная волны имеют почти равные амплитуды, и режим в этой части линии близок к режиму стоячих волн.

На основании таких же рассуждений можно прийти к выводу, что в линии, короткозамкнутой на конце, распределение тока и напряжения имеет аналогичный характер. Однако амплитуда напряжения на конце в режиме короткого замыкания должна быть равна нулю, а амплитуда тока — иметь максимальное значение.

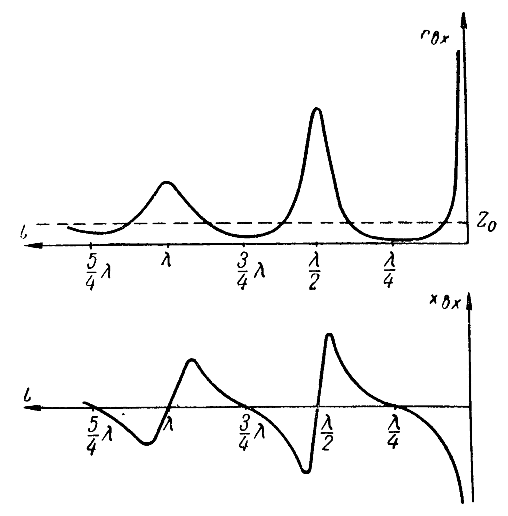


Рис. 6-33. Зависимость составляющих входного сопротивления линии с потерями от длины при $Z_2 \to \infty$.

Таким образом, наличие потерь приводит к тому, что в линии как разомкнутой, так и короткозамкнутой на конце, устанавливаются смешанные волны. При этом величина коэффициента бегущей волны непрерывно изменяется по длине. В окрестностях точки отражения, т. е. на конце линии, $k_б$ принимает значения, близкие к нулю, а на больших расстояниях от конца — стремится к единице.

Входное сопротивление линии с потерями в общем случае определяется выражением (6-24). Если сопротивление нагрузки $Z_2 \to \infty$ (холостой ход),

$$Z_{вх} = r_{вх} + jx_{вх} = Z_0 \operatorname{cth} \gamma l,$$

где $\operatorname{cth} \gamma l = \frac{\operatorname{ch} \gamma l}{\operatorname{sh} \gamma l}$ — котангенс гиперболический аргумента γl.

Подставляя значения $\operatorname{ch} \gamma l$ и $\operatorname{sh} \gamma l$ и учитывая соотношение $\operatorname{ch}^2 \alpha l - \operatorname{sh}^2 \alpha l = 1$, после несложных преобразований находим

$$r_{вх} = Z_0 \frac{\operatorname{th} \alpha l}{\operatorname{th}^2 \alpha l \cos^2 \beta l + \sin^2 \beta l}; \tag{6-56}$$

$$x_{вх} = -0{,}5 \frac{Z_0}{\operatorname{sh}^2 \alpha l} \cdot \frac{\sin 2\beta l}{\cos^2 \beta l + \frac{1}{\operatorname{th}^2 \alpha l} \sin^2 \beta l} =$$

$$= 0{,}5 Z_0 \left(1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 \alpha l}\right) \frac{\sin 2\beta l}{\cos^2 \beta l + \frac{1}{\operatorname{th}^2 \alpha l} \sin^2 \beta l}. \tag{6-57}$$

Полученные формулы совпадают по виду с формулами (6-49) и (6-50), если положить, что $\operatorname{th} \alpha l = m'$.

На рис. 6-33 показаны кривые изменения $r_{вх}$ и $x_{вх}$ в зависимости от длины линии, рассчитанные при $\alpha = \frac{0,4}{\lambda}$. Они близки по характеру к кривым входного сопротивления, изображенным на рис. 6-30, при малой величине коэффициента бегущей волны. Разница между ними состоит в том, что в данном случае размах колебаний $r_{вх}$ и $x_{вх}$ с ростом длины l уменьшается; в пределе $r_{вх} \to Z_0$, а $x_{вх} \to 0$.

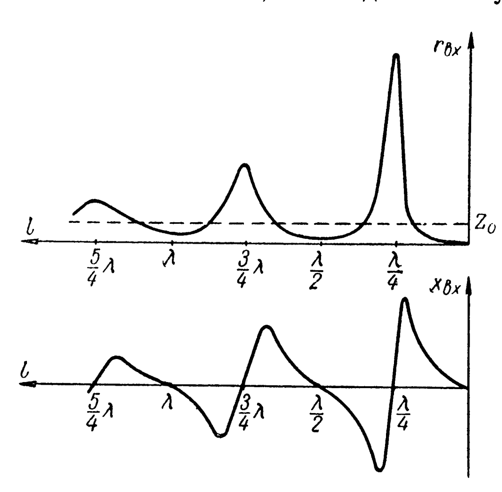


Рис. 6-34. Зависимость составляющих входного сопротивления линии с потерями от длины при $Z_2 = 0$.

Для линии, короткозамкнутой на конце, из (6-24) имеем

$$Z_{вх} = r_{вх} + jx_{вх} = Z_0 \operatorname{th} \gamma l.$$

Активная и реактивная составляющие входного сопротивления равны

$$r_{вх} = Z_0 \frac{\frac{1}{\operatorname{th} \alpha l}}{\frac{1}{\operatorname{th}^2 \alpha l} \cos^2 \beta l + \sin^2 \beta l}; \qquad (6\text{-}58)$$

$$x_{вх} = 0,5 Z_0 \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \alpha l} \cdot \frac{\sin 2\beta l}{\cos^2 \beta l + \operatorname{th}^2 \alpha l \sin^2 \beta l}. \qquad (6\text{-}59)$$

Графики, иллюстрирующие зависимость $r_{вх}$ и $x_{вх}$ от длины l, даны на рис. 6-34. Как и в предыдущем случае, расчет проводился при условии, что $\alpha\lambda = 0,4$. Изображенные здесь кривые полезно сравнить с кривыми рис. 6-31.

6-11. Длинная линия как фидер

Линия, по которой осуществляется передача энергии высокочастотных колебаний от генератора к нагрузке, называется линией передачи, или фидером. Последнее название происходит от английского глагола to feed — питать.

В современных радиотехнических устройствах находят применение фидеры различных типов. В диапазоне метровых и более длинных волн для передачи энергии обычно используется открытый двухпроводный фидер. Однако на более коротких волнах открытая линия начинает интенсивно излучать электромагнитное поле в окружающее пространство; возрастают также тепловые потери в проводах. Вследствие этого коэффициент по-

лезного действия открытого двухпроводного фидера по мере укорочения волны резко падает.

В дециметровом диапазоне волн наиболее широко применяется коаксиальная линия передачи. Она в отличие от двухпроводной потерь на излучение не имеет, так как электромагнитное поле ее отделено от внешнего пространства надежным экраном — оболочкой внешнего цилиндрического проводника. Коаксиальный фидер обладает также меньшими тепловыми потерями ввиду того, что образующие его проводники имеют достаточно большие поверхности.

На сантиметровых волнах в качестве фидера используется волновод, представляющий собой полую металлическую трубу, в которой распространяются электромагнитные волны. Отсутствие в волноводе внутреннего проводника уменьшает расход энергии на нагревание и, следовательно, повышает коэффициент полезного действия по сравнению с к. п. д. коаксиального фидера.

Теория волноводов основана на решении уравнений электромагнитного поля, поэтому изложение ее выходит за пределы данной книги.

При изучении особенностей применения фидеров весьма важно определить условия, при которых в нагрузку передается максимальная мощность.

В идеальном случае, когда линия потерь не имеет, вся подводимая к ней мощность расходуется в сопротивлении нагрузки. (Здесь, конечно, подразумевается, что активная составляющая этого сопротивления не равна нулю).

В реальных линиях часть полезной мощности, несомненно, будет теряться в проводах. Чтобы передача энергии осуществлялась с наименьшими потерями, фидер должен работать в режиме бегущих волн. Действительно, пусть средняя мощность в нагрузке при любом значении коэффициента бегущей волны $k_б \neq 0$ по условию остается постоянной. Величина этой мощности, как известно, равна разности мощностей падающей и отраженной волн. Если интенсивность отраженной волны возрастает ($k_б$ уменьшается), для передачи в нагрузку прежней мощности необходимо, чтобы интенсивность падающей волны также увеличилась. Но увеличение амплитуд падающей и отраженной волн приводит к соответствующему возрастанию потерь. Следовательно, к. п. д. системы линия — нагрузка будет максимальным при $k_б = 1$.

В дополнение к изложенному целесообразно отметить еще одно весьма существенное преимущество режима бегущих волн. При передаче электрических колебаний высокой мощности в линии, помимо тепловых потерь, возникают потери, связанные с появлением короны вокруг проводов. Практически максимальная мощность, которую можно передать по линии, ограничивается величиной допустимых напряжений. Присутствие отраженной волны, как известно, приводит к неравномерному распределению амплитуд

напряжения и, следовательно, увеличивает коронирование и возможность электрического пробоя линии в точках, где амплитуды напряжения достигают наибольших значений. Поэтому для уменьшения опасности появления перенапряжения и пробоя также необходимо устранять отраженную волну.

В современной технике цепей с распределенными параметрами применяются различные методы согласования, позволяющие получить режим бегущих волн. Рассмотрим, например, согласование линии с нагрузкой при помощи четвертьволнового трансформатора (см. § 6-9).

Пусть волновое сопротивление линии равно Z_0, а сопротивление нагрузки Z_2 чисто активно, причем $Z_2 = r_2 \neq Z_0$.

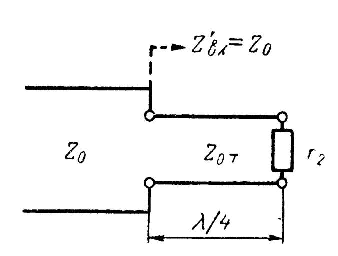


Рис. 6-35. Четвертьволновый согласующий трансформатор.

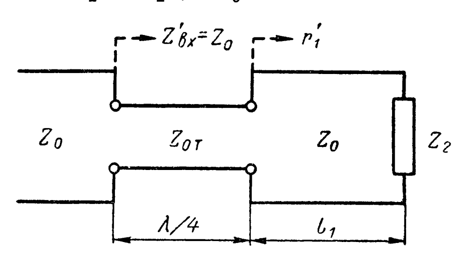


Рис. 6-36. Согласование линии с комплексным сопротивлением при помощи четвертьволнового трансформатора.

Расчет согласующего трансформатора в этом случае сводится к определению его волнового сопротивления $Z_{0т}$. Последнее должно быть выбрано так, чтобы входное сопротивление $Z'_{вх}$ трансформирующего отрезка с нагрузкой r_2 было равно величине Z_0. Так как потери в согласующем элементе обычно малы, при расчете ими можно пренебречь.

Используя формулу (6-54), будем иметь

$$Z'_{вх} = \frac{Z_{0т}^2}{r_2} = Z_0,$$

откуда

$$Z_{0т} = \sqrt{r_2 Z_0}.$$

Размеры поперечного сечения согласующего трансформатора, обладающего требуемым волновым сопротивлением, нетрудно определить по формулам § 6-6.

Примерный вид согласующего устройства подобного типа для двухпроводной линии представлен на рис. 6-35. Из рисунка видно, что подбор необходимой величины $Z_{0т}$ здесь осуществляется путем изменения расстояния между проводами.

Если сопротивление нагрузки имеет комплексный характер, согласующий трансформатор следует включить на расстоянии l_1 от конца линии в точке, где входное сопротивление становится чисто

активным (рис. 6-36). Волновое сопротивление трансформатора при этом должно быть

$$Z_{0т} = \sqrt{r_1' Z_0},$$

где r_1' — входное сопротивление отрезка линии длиной l_1.

Таким образом, четвертьволновый согласующий трансформатор позволяет устранить отраженную волну в основной части линии при любой нагрузке. Однако на практике рассмотренный способ согласования иногда применять нецелесообразно по техническим причинам. Так, например, в конструктивном отношении неудобно иметь согласующие трансформаторы с весьма большими или, наоборот, очень малыми волновыми сопротивлениями.

Более совершенным с практической точки зрения оказывается метод согласования, предложенный советским ученым В. В. Тата-

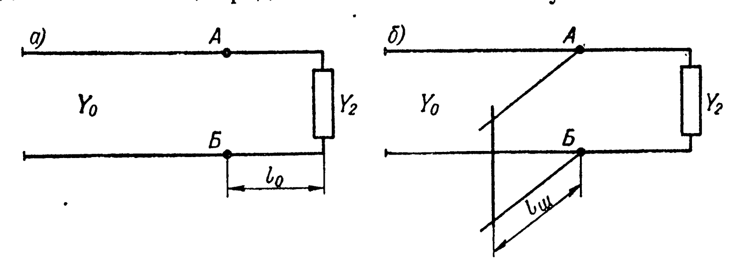


Рис. 6-37. Согласование линии с нагрузкой при помощи шлейфа Татаринова.

риновым. Сущность этого метода состоит в следующем. Пусть линия с волновой проводимостью $Y_0 = \frac{1}{Z_0}$ замкнута на комплексную проводимость $Y_2 = \frac{1}{Z_2} = g_2 - jb_2$. (В данном случае вместо сопротивлений удобнее пользоваться проводимостями). Выше было показано, что при перемещении точки наблюдения от нагрузки к генератору входное сопротивление и соответственно входная проводимость линии непрерывно изменяются. На некотором расстоянии l_0 от конца (рис. 6-37, *а*) активная составляющая входной проводимости равна волновой проводимости линии, а реактивная составляющая принимает какое-то значение $b'_{вх}$, т. е. при $\xi = l_0$ величина $Y'_{вх}(l_0) = Y_0 - jb'_{вх}$. Если теперь между точками *А*-*Б* включить реактивный элемент, проводимость которого

$$b_ш = -b'_{вх}, \tag{6-60}$$

результирующая входная проводимость эквивалентного двухполюсника в этих точках примет вид:

$$Y_{рез} = Y_0 - j(b'_{вх} + b_ш) = Y_0.$$

Отсюда следует, что в основной части линии, слева от точек *А*-*В*, имеется только падающая волна.

В качестве компенсирующего реактивного элемента удобно использовать так называемый параллельный реактивный шлейф — отрезок линии, короткозамкнутой на конце (рис. 6-37, *б*).

Волновое сопротивление его обычно выбирается равным Z_0, а длина $l_ш$ определяется из условия (6-60). Так как входная проводимость короткозамкнутого отрезка линии без учета потерь

$$Y_ш = -j Y_0 \operatorname{ctg} \beta l_ш,$$

для выполнения этого условия необходимо иметь

$$\operatorname{ctg} \beta l_ш = -\frac{b'_{вх}}{Y_0},$$

откуда

$$l_ш = -\frac{1}{\beta} \operatorname{arcctg} \frac{b'_{вх}}{Y_0}.$$

Изложенный способ согласования связан с необходимостью перемещения параллельного шлейфа вдоль проводов фидера. Это приво-

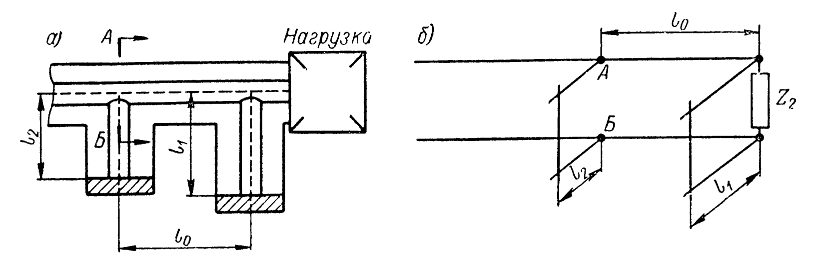


Рис. 6-38. Согласование линии с нагрузкой при помощи двух шлейфов: *а* — коаксиальная линия; *б* — двухпроводная линия.

дит к большим конструктивным трудностям при согласовании коаксиальных линий.

Чтобы избавиться от подобного недостатка, применяют устройство, состоящее из двух неподвижных параллельных шлейфов (рис. 6-38). Обычно первый шлейф подключается в непосредственной близости к нагрузке, а второй удален от него на расстояние $l_0 = \frac{3}{8}\lambda$.

В процессе согласования регулировкой длины шлейфа l_1 добиваются, чтобы активная составляющая входной проводимости в точках *А*-*Б* была равна Y_0. Компенсация же реактивной составляющей проводимости в этих точках осуществляется подбором длины шлейфа l_2.

В заключение определим условия, при которых линия будет получать от внешнего источника (генератора) максимальную мощность. Для этого рассмотрим цепь, изображенную на рис. 6-6, полагая, что $Z_2 = Z_0$.

Если линию с бегущей волной представить как двухполюсник, условие максимальной отдачи мощности [см. (5-146)] принимает вид

$$Z_{вх} = \hat{Z}_i, \tag{6-61}$$

где $Z_{вх}$ — входное сопротивление линии, равное волновому сопротивлению;

Z_i — внутреннее сопротивление генератора.

Так как обычно равенство (6-61) не выполняется, возникает необходимость согласовать фидер с источником. Это согласова-

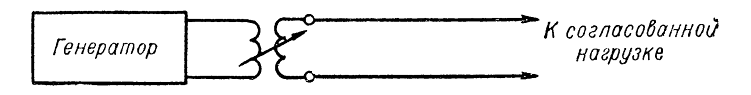


Рис. 6-39. Согласование линии с генератором.

ние можно осуществить с помощью трансформатора сопротивлений (рис. 6-39). На рисунке последний условно изображен в виде трансформатора с переменной связью.

Таким образом, для передачи от генератора в нагрузку максимальной мощности линия должна быть согласована не только на выходе (с нагрузкой), но и на входе (с источником).

6-12. Линия как колебательная система

Изучение свойств линий в режиме стоячих волн показало, что при соответствующих условиях они ведут себя подобно колебательным контурам с сосредоточенными параметрами. Отсюда вытекает принципиальная возможность использования отрезков линий в качестве колебательных систем. Подобные колебательные системы с распределенными параметрами нашли широкое применение в диапазоне ультракоротких волн.

В обычном контуре L, C, предназначенном для работы на УКВ, индуктивности и емкости должны быть весьма малыми. В реальных условиях результирующие индуктивность и емкость колебательной системы, как известно, определяются, во-первых, собственными параметрами контура и, во-вторых, дополнительными реактивностями связанных с ним элементов схемы. При правильном конструировании этих элементов величину дополнительной индуктивности удается сделать весьма малой, и влиянием ее на резонансную частоту контура в диапазоне УКВ (метровые волны) можно пренебречь. К сожалению, по иному обстоит дело с дополнительной емкостью. В большинстве случаев она оказывается столь заметной, что даже отпадает необходимость вводить в контур отдельный конденсатор.

Таким образом, для увеличения резонансной частоты контура приходится уменьшать индуктивность. В результате характери-

стическое сопротивление $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ становится малым. Но так как с увеличением частоты колебаний активные потери растут, добротность контура резко падает.

Рассмотрим линию, короткозамкнутую на конце. Из выражения (6-43) видно, что она эквивалентна параллельному колебательному контуру, настроенному на частоту f_0, если ее длина

$$l = (2n-1)\frac{v}{4f_0} = (2n-1)\frac{\lambda_0}{4}, \qquad (6\text{-}62)$$

где

$$\lambda_0 = \frac{v}{f_0}$$

и

$$n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

Отсюда следует, что имеется множество значений $l = l_n$, для которых на частоте f_0 выполняется условие параллельного резонанса. С другой стороны можно утверждать, что линия при заданной длине обладает множеством резонансных частот

$$f_{0n} = (2n-1)\frac{v}{4l} = (2n-1)\frac{1}{4l\sqrt{L_1C_1}}, \qquad (6\text{-}63)$$

соответствующих различным n.

Распределение амплитуд напряжения вдоль линии для разных значений n показано на рис. 6-40. Кривая распределения при $n = 1$ характеризует основной тип колебаний, а остальные кривые — колебания высших типов или высшие гармоники (речь идет о пространственных гармониках, которые не следует смешивать с временными).

Наряду с частотами f_{0n} целесообразно определить также резонансные длины волн

$$\lambda_{0n} = \frac{v}{f_{0n}} = \frac{4l}{2n-1}; \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \qquad (6\text{-}64)$$

Из этой формулы вытекает, что при $n = 1$ по длине линии укладывается одна четверть волны, при $n = 2$ — три четверти волны и т. д.

Далее, на основании (6-43) можно заключить, что рассматриваемая линия будет эквивалентна последовательному контуру, если

$$l = m\frac{\lambda_0}{2} = m\frac{v}{2f_0}; \qquad m = 1,\ 2,\ 3\ \ldots \qquad (6\text{-}65)$$

Частоты колебаний, соответствующие последовательному резонансу,

$$f_{0m} = m\frac{v}{2l} = m\frac{1}{2l\sqrt{L_1C_1}}, \qquad (6\text{-}66)$$

а резонансные длины волн

$$\lambda_{0m} = \frac{2l}{m}. \qquad (6\text{-}67)$$

Кривые распределения амплитуд напряжения для этого случая приведены на рис. 6-41.

Рассчитаем добротность линии, образующей колебательную систему с распределенными параметрами. Для этого воспользуемся формулой (4-19): $Q = \omega_0 \frac{W}{P}$, применимой к любым системам с малыми потерями. Здесь W — энергия, запасенная в колебательной системе; P — средняя мощность потерь; ω_0 — резонансная частота.

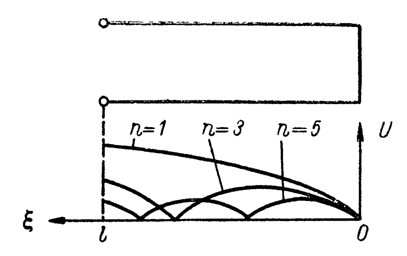


Рис. 6-40. Типы колебаний в линии, короткозамкнутой на конце, при параллельном резонансе.

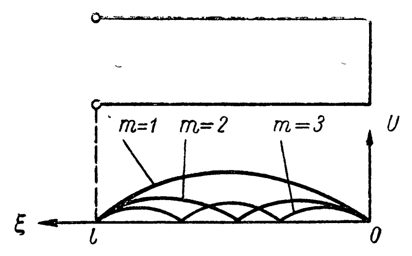


Рис. 6-41. Типы колебаний в линии, короткозамкнутой на конце, при последовательном резонансе.

В режиме стоячих волн величина энергии, запасенной в элементе линии $d\xi$, как было показано в § 6-8,

$$dW = dW_{e\text{макс}} = dW_{m\text{макс}} = \frac{1}{2} L_1 I_2^2 \sin^2 \beta\xi \, d\xi = $$
$$= \frac{1}{2} L_1 I^2(\xi) \, d\xi.$$

Интегрируя это равенство по длине l, находим

$$W = \frac{1}{2} L_1 \int_0^l I^2(\xi) \, d\xi.$$

Аналогично мощность потерь в элементе $d\xi$ имеет вид

$$dP = \frac{1}{2} I^2(\xi) \, r_1 \, d\xi.$$

Следовательно,

$$P = \frac{1}{2} r_1 \int_0^l I^2(\xi) \, d\xi.$$

Подставив значения W и P в исходную формулу и принимая во внимание, что ω_0 есть ω_{0n}, или ω_{0m}, получаем

$$Q = \frac{\omega_0 L_1}{r_1}. \qquad (6\text{-}68)$$

Предположим, что в линии возбуждены колебания определенного типа с заданным n или m. Выясним, как изменяется доброт-

ность колебательной системы при ее перестройке путем изменения длины l. Если полагать, что сопротивление потерь r_1 определяется только активным сопротивлением проводов, изменяющимся пропорционально корню квадратному из частоты [см., например, (6-33) и (6-35)], то на основании (6-63), (6-66) и (6-68) будем иметь

$$Q \equiv \sqrt{f_0} \equiv \frac{1}{\sqrt{l}}.$$

Значит, добротность исследуемой системы с ростом частоты (при неизменном типе колебаний) возрастает.

В том случае, когда длина линии постоянна, а меняется тип возбуждаемых колебаний (n или m — переменное), добротность системы также меняется: при увеличении n или m резонансная частота, как было показано выше, растет и, следовательно, Q увеличивается. Если же одновременно с изменением типа колебаний меняется и длина, а резонансная частота остается постоянной, то добротность системы остается постоянной.

Преобразуем выражение (6-68), используя формулу (6-63). В результате получим

$$Q = (2n-1)\frac{\pi}{2}\cdot\frac{L_1}{r_1 l\sqrt{L_1 C_1}} = (2n-1)\frac{\pi}{2}\cdot\frac{Z_0}{r_1 l};$$
$$n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$$

Это соотношение удобно использовать для оценки величины Q реальных колебательных систем с распределенными параметрами.

Определим, например, порядок добротности колебательной системы в виде отрезка двухпроводной линии с медными проводами, закороченной на конце. Волновое сопротивление в этом случае, как было отмечено в § 6-6, составляет сотни ом, а величина $r_1 l$ на ультракоротких волнах равна единицам или даже десятым долям ома. Следовательно, добротность подобной линии будет достигать сотен единиц.

Аналогичная колебательная система, образованная коаксиальной линией, характеризуется меньшим уровнем активных потерь (см. § 6-11) и, следовательно, имеет более высокую добротность. На практике для коаксиальных систем величина $Q \sim 10^3$.

Приведенные цифры убедительно показывают, что колебательные системы с распределенными параметрами в диапазоне ультракоротких волн обладают значительными преимуществами по сравнению с обычными колебательными контурами.

Другим важным параметром колебательной системы является ее входное сопротивление при резонансе. Обращаясь к (6-58) и (6-59), для линии, эквивалентной параллельному контуру, будем иметь

$$R_э = r_{вх} = \frac{Z_0}{\operatorname{th}\alpha l}, \qquad x_{вх} = 0.$$

Если принять во внимание, что в системах с малыми потерями $\alpha l \ll 1$ и $\operatorname{th} \alpha l \approx \alpha l$, то

$$R_э \approx \frac{Z_0}{\alpha l}. \qquad (6\text{-}69)$$

Отсюда видно, что с уменьшением потерь резонансное сопротивление линии возрастает. Практически эта величина составляет десятки тысяч ом.

Для линии, эквивалентной последовательному контуру, выражения (6-58) и (6-59) при $\beta l = m\pi$ дают

$$R_э = r_{вх} = Z_0 \operatorname{th} \alpha l, \qquad x_{вх} = 0.$$

В случае малых потерь $R_э \approx \alpha l Z_0$, откуда видно, что $R_э \ll Z_0$.

Резонансное сопротивление эквивалентного контура, очевидно, будет зависеть от типа колебаний, возбуждаемых в линии. В самом деле, подставив в (6-69) значение l из (6-62), для параллельного резонанса будем иметь

$$R_э \approx \frac{4Z_0}{(2n-1)\,\alpha\lambda_0}. \qquad (6\text{-}70)$$

Аналогично, для последовательного резонанса

$$R_э \approx \frac{m}{2}\,\alpha\lambda_0 Z_0. \qquad (6\text{-}71)$$

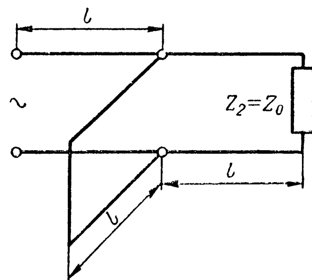


Рис. 6-42. Т-образный фильтр с распределенными параметрами.

Из равенства (6-70) следует, что при неизменной длине волны, но различных n и l резонансное сопротивление параллельного контура с увеличением n (работа на высших гармониках) падает. Резонансное сопротивление последовательного контура при тех же условиях, как показывает (6-71), увеличивается. (Напомним, что добротность колебательных систем при постоянной λ_0, но разных l и n (или m) не меняется).

Изложенные выше результаты были получены применительно к линии, короткозамкнутой на конце. Совершенно аналогично можно исследовать резонансные свойства линии в режиме холостого хода. В частности, легко показать, используя (6-41), что последняя эквивалентна либо параллельному контуру, если ее длина $l = \frac{\lambda_0}{2}, \lambda_0, \frac{3}{2}\lambda_0, \ldots$; либо последовательному контуру, если $l = \frac{\lambda_0}{4}, \frac{3\lambda_0}{4}, \frac{5\lambda_0}{4}, \ldots$; λ_0 — резонансная волна.

Добротность колебательной системы в этом случае определяется выражением (6-68), а входные сопротивления — (6-70) или (6-71).

Отрезки линий на ультракоротких волнах используются не только как колебательные системы, но и как полосовые или заграждающие фильтры.

На рис. 6-42 приведен простейший пример Т-образной цепи с распределенными параметрами, которую можно применить в качестве фильтра. Эта цепь образована тремя отрезками линий равной длины с волновым сопротивлением Z_0.

Короткозамкнутый отрезок на частотах $f_{0n} = (2n-1)\frac{1}{4l\sqrt{L_1C_1}}$ (где $n = 1, 2, 3, \ldots$), как известно, будет иметь весьма большое входное сопротивление и, следовательно, он практически не влияет на прохождение колебаний от генератора к нагрузке. Наоборот, при частотах $f_{0m} = m\frac{1}{2l\sqrt{L_1C_1}}$ (где $m = 1, 2, 3, \ldots$) входное сопротивление короткозамкнутого отрезка очень мало и колебания в нагрузку практически не проходят.

Таким образом, цепь, изображенная на рис. 6-42, в окрестностях частот f_{0n} ведет себя как полосовой фильтр, а в окрестностях частот f_{0m} — как заграждающий фильтр.

6-13. Колебательная система в виде короткозамкнутой линии с емкостью на входе

В реальных условиях на одном из концов линии, образующей колебательную систему с распределенными параметрами, обычно находится дополнительная сосредоточенная емкость. На рис. 6-43 приведен подобный пример, часто встречающийся на практике. Здесь показано, что слева к линии подключается емкость междуэлектродного промежутка сетка — анод лампы.

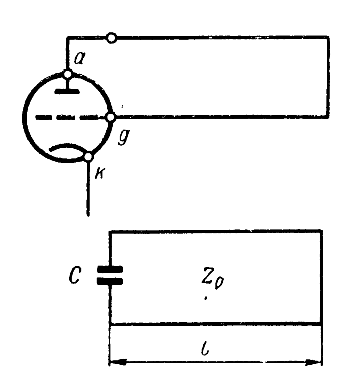


Рис. 6-43. Короткозамкнутая линия с емкостью на входе.

При настройке такой колебательной системы в резонанс полное реактивное сопротивление ее должно быть равно нулю, т. е.

$$x_1 + x_{вх} = 0,$$

где $x_1 = -\frac{1}{\omega C}$ — реактивное сопротивление емкости C;

$x_{вх} = Z_0 \operatorname{tg} \beta l$ — реактивное (входное) сопротивление линии, короткозамкнутой на конце.

Подставив значения x_1 и $x_{вх}$ в исходное равенство, будем иметь

$$\operatorname{tg} \beta l = \frac{1}{Z_0 \omega C}.$$

Принимая во внимание, что

$$\omega Z_0 = \omega \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \frac{\omega \sqrt{L_1 C_1}}{C_1} = \frac{\beta}{C_1}$$

и обозначив $\beta l = y$, получим трансцендентное уравнение

$$\operatorname{tg} y = \frac{lC_1}{yC}, \qquad (6\text{-}72)$$

определяющее значение βl и, следовательно, резонансные частоты системы.

Для решения уравнения (6-72) построим графики функций $\operatorname{tg} y$ и lC_1/yC (рис. 6-44), а затем найдем абсциссы точек пересечения

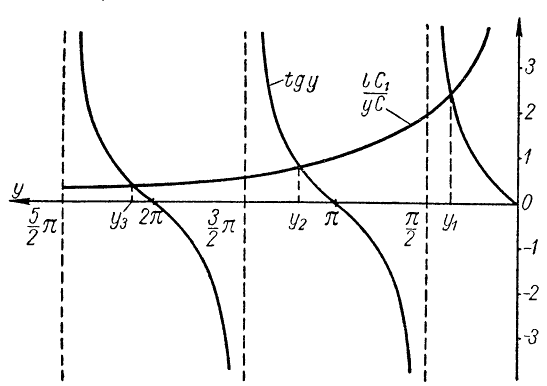


Рис. 6-44. К расчету резонансных частот короткозамкнутой линии с емкостью на входе.

этих кривых. Из рисунка видно, что уравнение имеет бесчисленное множество корней y_1, y_2, y_3,... Соответствующие им резонансные частоты определяются по формуле

$$f_{0n} = \frac{y_n}{2\pi l \sqrt{L_1 C_1}}; \qquad n = 1,\ 2, \dots$$

Сравнивая значения f_{0n} с резонансными частотами обычной линии, короткозамкнутой на конце [см. (6-63)], можно прийти к выводу, что включение емкости на входе приводит к уменьшению резонансных частот исходной колебательной системы. Действительно, из кривых рис. 6-44 видно, что $y_n < (2n-1)\frac{\pi}{2}$, поэтому $f_{0n} < (2n-1)\frac{v}{4l}$.

Резонансные волны λ_{0n}, наоборот, при включении емкости удлиняются.

6-14. Линия как четырехполюсник

Длинную линию, как и всякую линейную электрическую систему, можно представить в виде линейного пассивного четырехполюсника. Замена линии эквивалентным четырехполюсником дает возможность использовать при расчетах методы общей теории линейных цепей, что в некоторых случаях оказывается удобным.

Чтобы определить параметры четырехполюсника, эквивалентного однородной линии, напишем уравнения, связывающие комплексные амплитуды напряжений и токов на входе и выходе. Как следует из (6-22), эти уравнения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \dot{I}_2 Z_0 \operatorname{sh} \gamma l, \\ \dot{I}_1 &= \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \frac{\dot{U}_2}{Z_0} \operatorname{sh} \gamma l. \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}73)$$

Сравнивая (6-73) с выражениями (5-42) и (5-43), находим, что первичные параметры четырехполюсника

$$\left.\begin{aligned} A &= \operatorname{ch} \gamma l, \\ B &= Z_0 \operatorname{sh} \gamma l, \\ C &= \frac{1}{Z_0} \operatorname{sh} \gamma l, \\ D &= \operatorname{ch} \gamma l. \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}74)$$

Отсюда видно, что четырехполюсник является симметричным, так как $A = D$.

Аналогично из сопоставления уравнений (6-73) и (5-101), (5-102) при $m_т = 1$ для вторичных параметров получаем

$$\left.\begin{aligned} Z_{01} &= Z_{02} = Z_0 = \sqrt{\frac{Z_1}{Y_1}}, \\ \Gamma &= \gamma l = \alpha l + j\beta l. \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}75)$$

Таким образом, характеристическое сопротивление четырехполюсника совпадает с волновым сопротивлением линии, а коэффициент распространения $\Gamma = b + j\varphi_K$ определяется постоянной $\gamma = \frac{\Gamma}{l}$. Последняя представляет собой коэффициент распространения четырехполюсника, образованного отрезком линии единичной длины («погонный» коэффициент распространения).

Из предыдущего равенства следует, что коэффициент затухания линии

$$\alpha = \frac{b}{l},$$

где b — собственное затухание эквивалентного четырехполюсника, а волновое число β связано с коэффициентом фазы φ_K зависимостью $\beta = \frac{\varphi_K}{l}$.

Для линии без потерь соотношения (6-74), (6-75) принимают вид:

$$A = \cos \beta l, \qquad B = jZ_0 \sin \beta l, \qquad C = j\,\frac{\sin \beta l}{Z_0},$$

$$D = \cos \beta l, \qquad Z_{01} = Z_{02} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}, \qquad \Gamma = j\beta l.$$

На основании теории четырехполюсников рассматриваемый отрезок линии можно заменить эквивалентной Т- или П-образной схемой

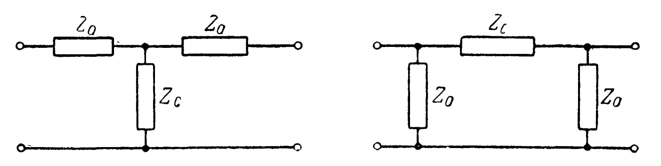


Рис. 6-45. Эквивалентные схемы отрезка линии.

(рис. 6-45). Величины эквивалентных сопротивлений $Z_a = Z_b$ и Z_c определяются по формулам, полученным в главе пятой (см. табл. 5-3).

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

7-1. Введение

При анализе процессов в линейных цепях до сих пор мы считали что воздействие изменяется во времени по гармоническому закону или же остается постоянным. Однако во многих важных для практики случаях приходится иметь дело с воздействиями более сложного типа. Так, например, в радиолокационной технике широко применяется напряжение в виде последовательности прямоугольных или трапецеидальных импульсов, повторяющихся через одинаковые промежутки времени (рис. 7-1); в телевизионной и измерительной технике часто используется электрический ток (или напряжение) «пилообразной» формы (рис. 7-2) и т. д.

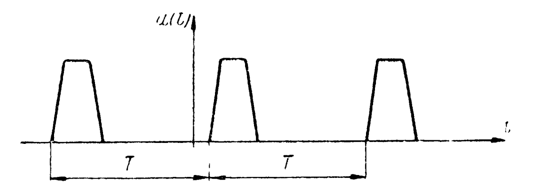


Рис. 7-1. Периодическая последовательность импульсов.

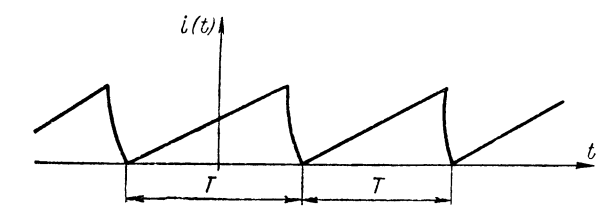


Рис. 7-2. Периодический ток «пилообразной» формы.

Электрические колебания, описываемые функцией $f(t)$, которая на интервале $-\infty < t < \infty$ удовлетворяет условию $f(t) = f(t \pm kt)$, как уже отмечалось ранее, носят название периодических. (T — период колебаний, $k = 0, 1, 2, \ldots$).

Чтобы получить представление о принципах расчета цепей при произвольных периодических воздействиях, рассмотрим линейный двухполюсник, к которому прикладывается n гармонических напряжений с различными амплитудами и кратными частотами колебаний (рис. 7-3).

Так как по условию исследуемая цепь линейна, к ней применим принцип суперпозиции. В соответствии с этим принципом можно утверждать, что ток, текущий по двухполюснику, равен сумме гармонических токов i_1, i_2, i_3, ..., i_n, возбуждаемых гармоническими напряжениями $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ по отдельности. Поэтому расчет тока в цепи сводится к вычислению откликов на обычные гармонические воздействия.

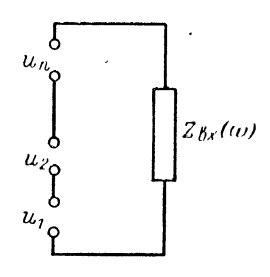
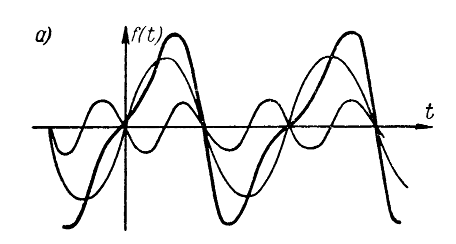


Рис. 7-3. К расчету тока в двухполюснике при воздействии гармонических напряжений.



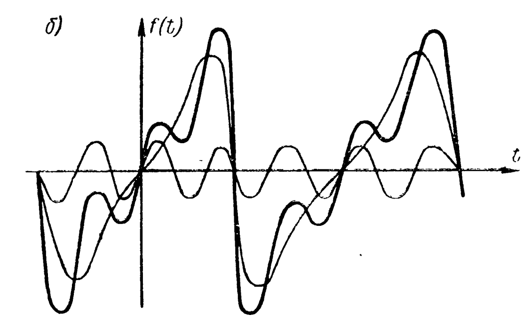


Рис. 7-4. Периодические колебания, образованные сложением двух (*а*) и трех (*б*) гармонических колебаний.

Нетрудно видеть, что результирующее напряжение $u(t) = \sum_{p=1}^{n} u_p(t)$ на входе двухполюсника является периодической функцией сложной формы. На рис. 7-4 показаны периодические колебания, образованные сложением двух и трех синусоидальных функций с различными амплитудами и частотами. Следовательно, здесь по существу речь идет о расчете тока в цепи при несинусоидальном периодическом воздействии.

Аналогичные рассуждения, очевидно, применимы к любым периодическим воздействиям сложного типа, если только их можно свести к сумме обычных гармонических колебаний.

7-2. Разложение периодической функции в ряд Фурье

В математике представление периодической функции в виде совокупности синусоидальных слагаемых (составляющих) осуществляется с помощью рядов Фурье. Согласно теории Фурье функция $f(x)$ с периодом, равным 2π (рис. 7-5), может быть разложена в тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{7-1}$$

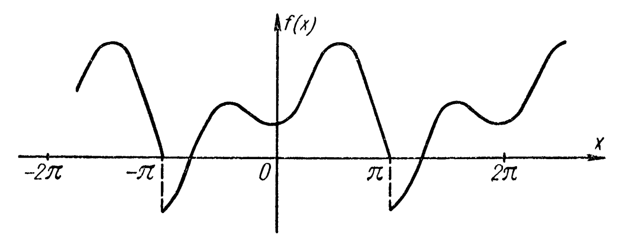


Рис. 7-5. Периодическая функция с периодом 2π.

причем постоянные $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, называемые коэффициентами Фурье, определяются выражениями:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx\, dx; \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{7-2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx\, dx; \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{7-3}$$

Этот ряд будет равномерно сходящимся, если исходная функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле, т. е. $f(x)$ имеет на интервале $[-\pi, +\pi]$ конечное число разрывов, а также конечное число максимумов и минимумов, и, кроме того,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|\, dx < \infty.$$

Для временны́х периодических процессов в качестве независимой переменной x в разложении Фурье следует выбирать величину Ωt, где $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, а T — период колебаний. При таком условии ряд (7-1) для функции $f(t)$ принимает вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t), \tag{7-4}$$

а коэффициенты Фурье

$$a_n = \frac{2}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cos n\Omega t \, dt; \tag{7-5}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \sin n\Omega t \, dt. \tag{7-6}$$

Разложение (7-4) можно записать в несколько иной форме:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t - \psi_n). \tag{7-7}$$

Здесь

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \tag{7-8}$$

и

$$\psi_n = \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n}. \tag{7-9}$$

Совокупность гармонических составляющих, на которые раскладывается функция $f(t)$, называется спектром. Спектр периодической функции сложной формы, как вытекает из разложения (7-7), состоит из постоянной составляющей и множества гармонических составляющих, частоты которых образуют дискретный ряд значений $n\Omega$; $n = 1, 2, 3, \ldots$, кратных основной частоте колебаний Ω. Амплитуды гармонических составляющих (или сокращенно гармоник) равны A_n, а начальные фазы — ψ_n. Такой спектр называется дискретным, или линейчатым.

Заметим, что постоянную составляющую в разложении (7-7) можно рассматривать тоже как гармонику с нулевой частотой колебаний и амплитудой $A_0 = \frac{a_0}{2}$.

В общем случае гармонические колебания, входящие в состав спектра, будут, по-видимому, иметь различные амплитуды и фазы. Чтобы получить наглядное представление о спектре, целесообразно воспользоваться графиками — так называемыми спектральными диаграммами. Различают два типа диаграмм: амплитудные и фазовые. При построении их по оси абсцисс откладывают частоты гармонических колебаний, а по оси ординат — значения амплитуд или соответственно начальных фаз.

На рис. 7-6 приведен пример амплитудной (*а*) и фазовой (*б*) спектральных диаграмм периодической функции. По виду этих графиков нетрудно понять, почему спектр периодического колебания получил название линейчатого.

Во всех предыдущих рассуждениях исходная функция раскладывается в ряд на промежутке $\left[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right]$. Аналогичное разложение, оказывается, существует для любого интервала $[t_0, t_0 + T)$, где t_0 — произвольная величина.

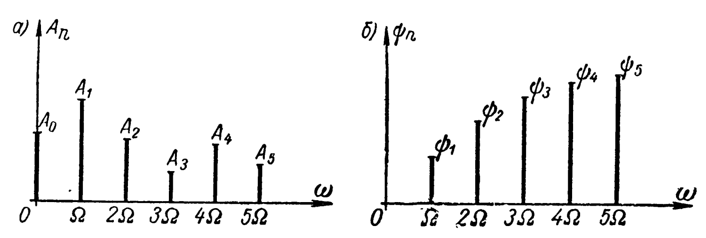


Рис. 7-6. Амплитудная и фазовая спектральные диаграммы периодической функции.

Общий вид разложения $f(t)$ при различных t_0 по-прежнему будет совпадать с (7-4) или (7-7); меняются только пределы интегрирования в выражениях для коэффициентов Фурье

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\Omega t\,dt, \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\Omega t\,dt. \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}10)$$

Ряды Фурье, помимо тригонометрической формы, могут быть записаны также в комплексном виде. Известно, что

$$\cos n\Omega t = \frac{e^{jn\Omega t} + e^{-jn\Omega t}}{2},$$

и

$$\sin n\Omega t = \frac{e^{jn\Omega t} - e^{-jn\Omega t}}{2j}.$$

Подставляя эти выражения в разложение (7-4), после несложных преобразований получим

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\Omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\Omega t}. \qquad (7\text{-}11)$$

Воспользуемся далее обозначениями:

$$a_n - jb_n = \boldsymbol{A}_n \quad \text{и} \quad a_n + jb_n = \boldsymbol{A}_{-n}.$$

Тогда вместо (7-11) будем иметь

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_n e^{jn\Omega t} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_{-n} e^{-jn\Omega t}.$$

Полагая $a_0 = A_0$ и учитывая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{-n} e^{-jn\Omega t} = \sum_{n=-1}^{-\infty} A_n e^{jn\Omega t},$$

приведем разложение $f(t)$ к окончательному виду:

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{jn\Omega t}. \qquad (7\text{-}12)$$

Равенство (7-12) есть комплексный ряд Фурье функции $f(t)$.

Комплексный коэффициент Фурье A_n с учетом выражений (7-5), (7-6) и (7-9) определяется так:

$$A_n = A_n e^{-j\psi_n} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cos n\Omega t \, dt - j \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \sin n\Omega t \, dt =$$

$$= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt. \qquad (7\text{-}13)$$

В разложении (7-12) суммирование членов происходит как по положительным, так и по отрицательным n. Это означает, что комплексный ряд Фурье содержит гармоники не только с положительными, но и с отрицательными частотами. Совершенно ясно, что последние никакого физического смысла не имеют. Они появляются только как следствие формального представления тригонометрических функций в виде совокупности показательных функций с мнимым аргументом.

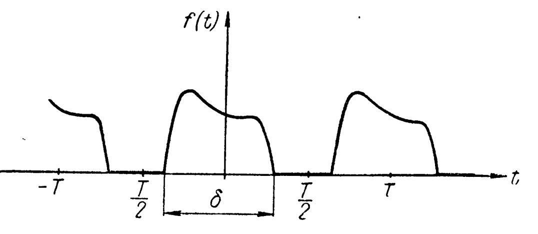


Рис. 7-7. К определению спектральной функции.

Предположим, что функция $f(t)$ с периодом T отлична от нуля на интервале $\delta < T$, а в остальные моменты времени равна нулю (рис. 7-7). Выясним, каким образом спектр подобной функции зависит от величины T.

Прежде всего необходимо отметить, что период T определяет расстояние (по шкале частот) между соседними линиями спектра

$$(n+1)\Omega - n\Omega = (n+1)\frac{2\pi}{T} - n\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T}.$$

При увеличении T это расстояние уменьшается, и спектр становится более «плотным».

От величины T зависят также амплитуды гармонических составляющих спектра. Действительно, комплексные коэффициенты Фурье для $f(t)$

$$A_n = \frac{2}{T}\int\limits_{(\delta)} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt. \tag{7-14}$$

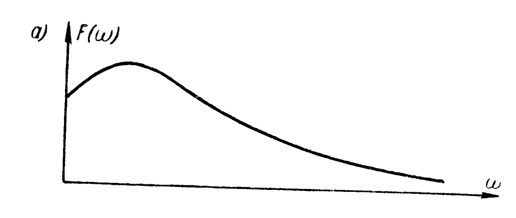
Здесь $\omega = n\Omega$, а символ (δ) означает, что интегрирование производится по промежутку δ, в пределах которого $f(t)$ отлична от нуля. Отсюда видно, что амплитуда A_n есть функция T.

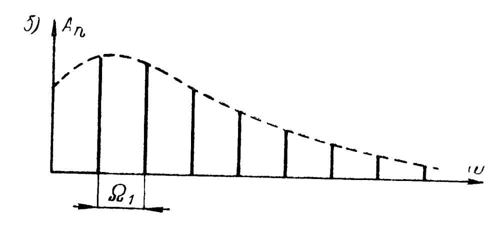
Зависимость комплексных амплитуд гармонических составляющих от частоты (если ее рассматривать как непрерывную переменную ω) согласно равенству (7-14) определяется функцией

$$F(j\omega) = \int\limits_{(\delta)} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int\limits_{(\delta)} f(t) \cos \omega t\, dt - j\int\limits_{(\delta)} f(t) \sin \omega t\, dt, \tag{7-15}$$

которая не содержит T и носит название **спектральной функции**.

Из выражений (7-14) и (7-15) вытекает, что $A_n = \frac{2}{T} F(\omega)$, если $\omega = n\Omega$.





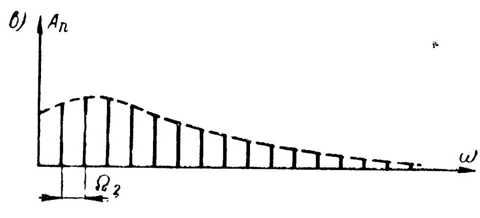


Рис. 7-8. Спектральная функция и спектральные диаграммы периодических колебаний: *а* — модуль спектральной функции; спектральные диаграммы: *б* — при $T = T_1 = \frac{2\pi}{\Omega_1}$; *в* — при $T = T_2 = \frac{T_1}{2} = \frac{\pi}{\Omega_1}$.

На рис. 7-8, *а* приведен график модуля $F(j\omega)$ для некоторой периодической функции, удовлетворяющей поставленным выше условиям. Здесь же построены спектральные диаграммы $f(t)$ при двух значениях периода T (рис. 7-8, *б* и *в* соответственно). Из рисунков видно, что кривая $F(\omega) = |F(j\omega)|$ аналогична пунктирным кривым, соединяющим концы спектральных линий — огибающим спектра (исключение составляет лишь точка $\omega = 0$).

Таким образом, спектральная функция дает представление о соотношениях между амплитудами и фазами гармоник в спектре, т. е. о соотношениях между комплексными амплитудами $\dot{A}_n$, причем эти соотношения, оказывается, не зависят от T.

В заключение полезно выяснить, существуют ли в действительности гармоники, образующие спектр колебаний сложной формы, или же спектр является математической абстракцией?

Ответ на этот вопрос не может быть однозначным. Если колебания сложной формы получаются сложением гармонических колебаний, создаваемых реальными источниками (как это, например, имеет место в схеме рис. 7-3), то физическая реальность гармоник спектра не вызывает сомнений. В других же случаях, когда отдельные источники различных гармоник отсутствуют, действительно существуют только исходные физические колебания. Совокупность гармонических составляющих, входящих в спектр таких колебаний, следует рассматривать лишь как удобное математическое представление физического процесса. Тем не менее, введение спектральных представлений во многих случаях позволяет осуществить количественный анализ явлений, возникающих при передаче электрических колебаний по цепям. Благодаря этому спектр будет играть роль важнейшей физической характеристики исследуемых колебаний.

7-3. Ряды Фурье четных и нечетных функций

Рассмотрим некоторые особенности рядов Фурье при дополнительных условиях, накладываемых на функцию $f(t)$.

Пусть $f(t)$ — четная функция, т. е. $f(-t) = f(t)$ (рис. 7-9, *а*). При таком условии коэффициенты Фурье принимают вид

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\cos n\Omega t\,dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\Omega t\,dt, \qquad (7\text{-}16)$$

и

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\sin n\Omega t\,dt \equiv 0.$$

Следовательно, в разложении (7-4) останутся только члены, содержащие косинусоидальные функции

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega t. \qquad (7\text{-}17)$$

Если $f(t)$ — нечетная функция, т. е. $f(-t) = -f(t)$ (рис. 7-9,б), то $a_n \equiv 0$ и

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \sin n\Omega t \, dt = \frac{4}{T} \int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\Omega t \, dt. \qquad (7\text{-}18)$$

Ряд Фурье теперь будет иметь только синусоидальные составляющие

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\Omega t. \qquad (7\text{-}19)$$

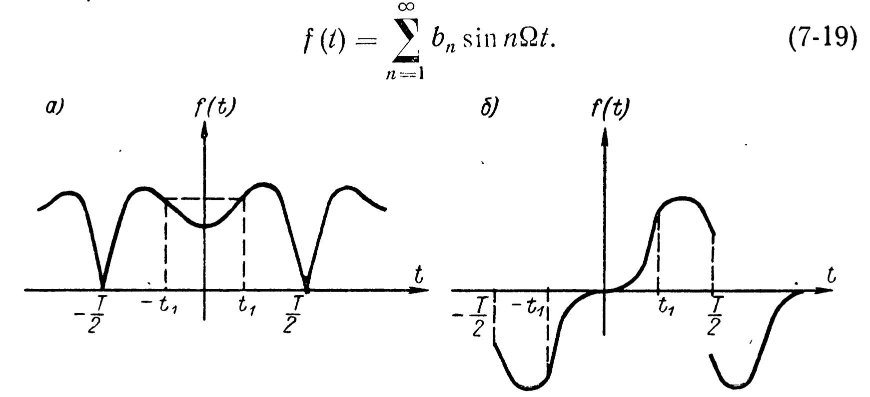


Рис. 7-9 Четная и нечетная периодические функции.

В разложении Фурье общего вида, содержащем как косинусоидальные, так и синусоидальные гармоники, сумма $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega t$ оказывается четной функцией времени, а сумма $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\Omega t$ — нечетной функцией. Отсюда вытекает, что любую периодическую функцию можно представить как совокупность четного и нечетного слагаемых. Возможность подобного представления следует также из тождества

$$f(t) = \underbrace{\frac{f(t) + f(-t)}{2}}_{\text{четная функция}} + \underbrace{\frac{f(t) - f(-t)}{2}}_{\text{нечетная функция}}.$$

7-4. Спектры простейших периодических функций

Рассмотрим спектры конкретных функций, используемых для аппроксимации некоторых периодических токов и напряжений.

а) Последовательность импульсов прямоугольной формы

Предположим, что $f(t)$ определяет периодическую последовательность прямоугольных импульсов напряжения с амплитудой U, продолжительностью $t_и$ и периодом следования T (рис. 7-10).

Так как при выбранном начале отсчета времени (точка 0 на рис. 7-10) функция $f(t)$ оказывается четной, спектр ее будет содержать только косинусоидальные гармоники и постоянную составляющую.

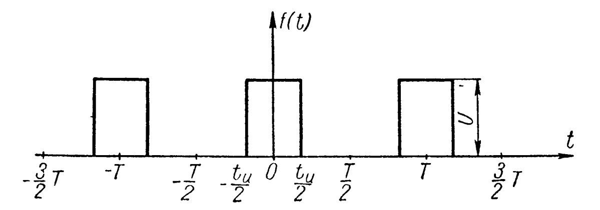


Рис. 7-10. Периодическая последовательность импульсов прямоугольной формы.

Амплитуды этих гармоник согласно (7-16)

$$U_n = a_n = \frac{4}{T}\int\limits_0^{\frac{t_и}{2}} U\cos n\Omega t\,dt = \frac{4}{T}U\frac{\sin n\Omega t}{n\Omega}\Bigg|_0^{\frac{t_и}{2}} = \frac{2}{\pi}U\frac{\sin\frac{n\Omega t_и}{2}}{n}, \quad (7\text{-}20)$$

а постоянная составляющая

$$U_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{2}{T}\int\limits_0^{\frac{t_и}{2}} U\,dt = U\frac{t_и}{T}. \quad (7\text{-}21)$$

Таким образом, ряд Фурье рассматриваемой функции принимает вид

$$f(t) = u(t) = U\left[\frac{t_и}{T} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\Omega}{2}t_и}{n}\cos n\Omega t\right], \quad (7\text{-}22)$$

т. е. спектр ее имеет бесчисленное множество гармонических составляющих.

Амплитуды U_n гармоник при различных n зависят от величины $\left|\frac{\sin\frac{n\Omega t_и}{2}}{n}\right|$, а начальные фазы ψ_n определяются знаком функции $\sin\frac{n\Omega t_и}{2}$.

На рис. 7-11 и 7-12 представлены спектральные диаграммы, вычисленные в предположении, что $\frac{t_и}{T} = \frac{1}{10}$. Из рисунка видно, что огибающая спектра, а следовательно, и спектральная функция в

точках $2\pi/t_и$, $4\pi/t_и$, $6\pi/t_и$ и т. д. обращаются в нуль. Фазы ψ_n различных составляющих при переходе через указанные точки меняются скачком на π. (На интервале $0 \leqslant \omega \leqslant \frac{2\pi}{t_и}$ полагается, что $\psi_n = 0$).

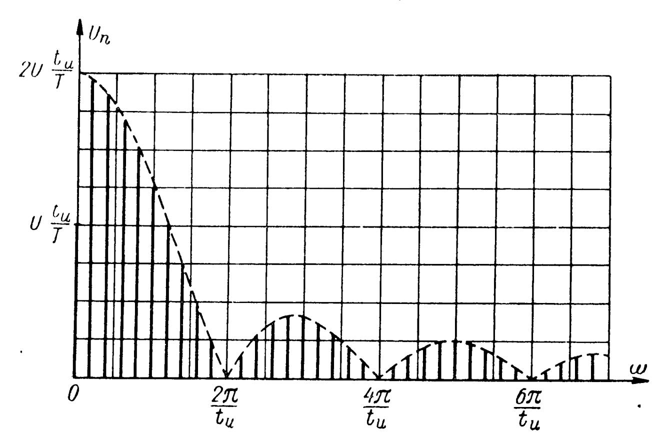


Рис. 7-11. Амплитудная спектральная диаграмма импульсов прямоугольной формы.

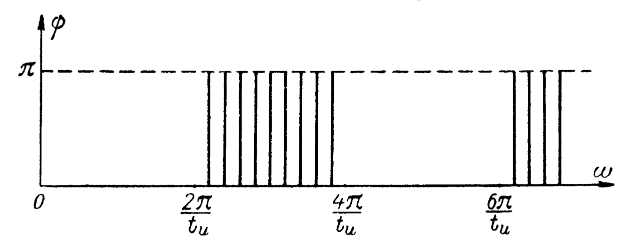


Рис. 7-12. Фазовая спектральная диаграмма импульсов прямоугольной формы.

Если продолжительность импульсов мала по сравнению с периодом их повторения (как это имеет место в радиолокационной технике), для начальных n в разложении (7-22) можно полагать:

$$n\Omega t_и = n\frac{2\pi}{T}t_и \ll 1, \quad \sin n\Omega t_и \approx n\Omega t_и,$$

$$\frac{\sin\frac{n\Omega t_и}{2}}{n} \approx \frac{\Omega t_и}{2}.$$

Последнее равенство означает, что амплитуды начальных гармоник в спектре «коротких» импульсов с ростом n почти не меняются (или, точнее, убывают весьма медленно).

При практических расчетах бесконечные ряды в большинстве случаев приходится заменять суммами конечного числа слагаемых. Ясно, что точность аппроксимации исходной функции в этом случае

зависит от количества используемых гармоник. Пусть, например, дана последовательность прямоугольных импульсов с продолжи-

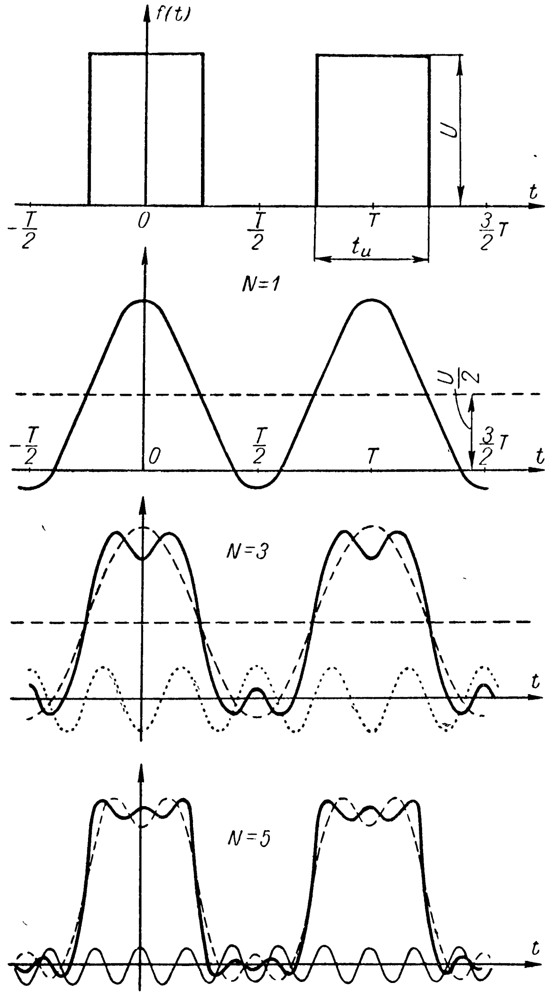


Рис. 7-13. Различные аппроксимации импульсов прямоугольной формы.

тельностью $t_и = \frac{T}{2}$. Для такой последовательности из разложения (7-22) будем иметь

$$f(t) = U\left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\cos n\Omega t\right]. \qquad (7\text{-}23)$$

Заменяя в этом выражении ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \cos n\Omega t$ суммой N первых гармоник, получим различные приближения к функции $f(t)$. Графики таких приближений построены на рис. 7-13.

Необходимо отметить, что в разложении (7-23) суммирование гармоник осуществляется только по нечетным n, так как при четных n величина $\sin \frac{n\pi}{2}$ обращается в нуль, т. е. $n=(2m-1)$; $m=1, 2, 3, \ldots$

Последовательность знакопеременных импульсов одинаковой продолжительности (рис. 7-14) также разлагается в ряд Фурье по косинусоидальным

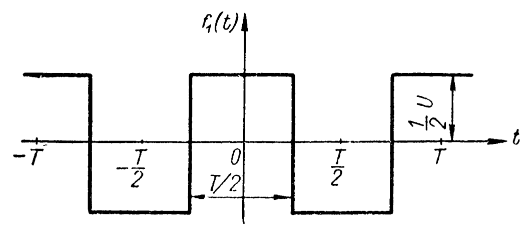


Рис. 7-14. Периодическая последовательность знакопеременных импульсов прямоугольной формы при $t_и = \frac{T}{2}$ (четная функция).

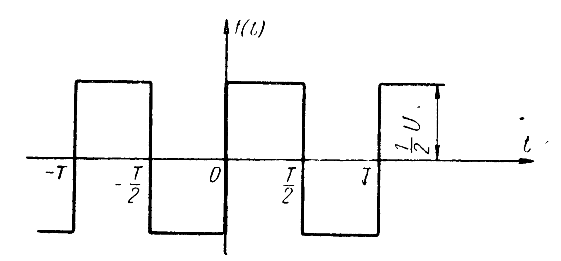


Рис. 7-15. Периодическая последовательность знакопеременных импульсов прямоугольной формы при $t_и = \frac{T}{2}$ (нечетная функция)

гармоникам, аналогичный ряду (7-23). В самом деле, функцию $f_1(t)$, представленную на рис. 7-14, можно получить из функции $f(t)$ (см. рис. 7-13) вычитанием постоянной величины $U/2$. Следовательно,

$$f_1(t) = f(t) - \frac{1}{2} U = \frac{2}{\pi} U \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \cos n\Omega t =$$

$$= \frac{2}{\pi} U \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2m-1)\pi}{2}}{2m-1} \cos [(2m-1)\Omega t]. \quad (7\text{-}24)$$

Читателю выражение (7-24) рекомендуется вывести прямым путем, с помощью формул (7-16) и (7-17).

Если начало координат на рис. 7-14 сместить влево на величину $T/4$, рассматриваемая функция становится нечетной (рис. 7-15). Теперь ряд Фурье будет содержать только синусоидальные составляющие:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\Omega t$$

и

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} U \sin n\Omega t\, dt = -\frac{2}{T} U \left.\frac{\cos n\Omega t}{n\Omega}\right|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{\pi} U \frac{1-\cos n\pi}{n}.$$

Подставляя значение b_n в предыдущее выражение и учитывая, что $1 - \cos n\pi = 2\sin^2\frac{n\pi}{2}$, получим

$$f(t) = \frac{2}{\pi} U \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\frac{n\pi}{2}}{n} \sin n\Omega t. \qquad (7\text{-}25)$$

Суммирование здесь также происходит лишь по нечетным n.

б) Периодические колебания треугольной формы

Определим прежде всего спектр «пилообразных» колебаний, полагая, что на интервале $-\frac{T}{2} \leqslant t \leqslant +\frac{T}{2}$ функция

$$f(t) = 2U\frac{t}{T}. \qquad (7\text{-}26)$$

График таких колебаний изображен на рис. 7-16.

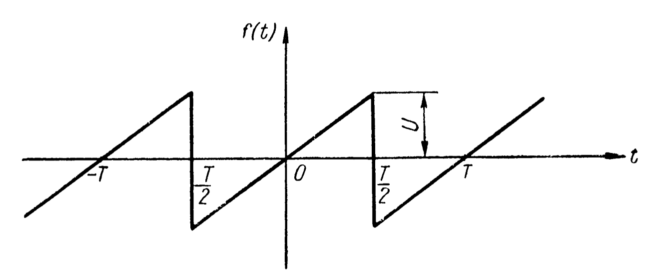


Рис. 7-16. «Пилообразные» колебания без постоянной составляющей.

Так как функция (7-26) нечетна, ряд Фурье ее принимает вид (7-19), причем коэффициенты

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} 2U\frac{t}{T} \sin n\Omega t\, dt$$

или после интегрирования по частям

$$b_n = \frac{8}{T^2} U \frac{1}{n\Omega} \left[\frac{\sin n\Omega t}{n\Omega} - t \cos n\Omega t \right]_0^{\frac{T}{2}} = -\frac{2}{\pi} U \frac{\cos n\pi}{n}.$$

Используя этот результат, на основании (7-19) будем иметь

$$f(t) = -U \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} \sin n\Omega t. \qquad (7\text{-}27)$$

Из выражения (7-27) видно, что амплитуды гармоник спектра убывают обратно пропорционально величине n, а начальные фазы зависят от знака $\cos n\pi$.

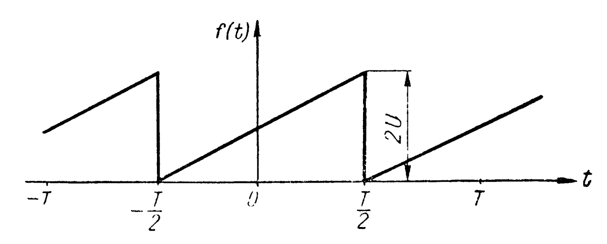


Рис. 7-17. «Пилообразные» колебания с постоянной составляющей.

Если к разложению (7-27) добавим постоянную составляющую U, получим ряд Фурье новой функции, показанной на рис. 7-17.

Рассмотрим далее спектр периодической последовательности импульсов треугольной формы (рис. 7-18), которые наряду с прямоугольными импульсами также находят практическое применение в радиолокационной технике.

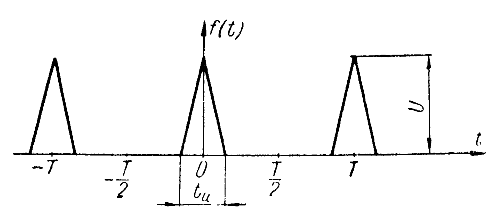


Рис. 7-18. Периодическая последовательность импульсов треугольной формы.

Применяя соотношения (7-16) и (7-17) и учитывая, что на интервале $0 \leqslant t \leqslant \frac{t_и}{2}$ функция $f(t) = U - 2U \frac{t}{t_и}$, находим:

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{t_и}{2}} \left(U - 2U \frac{t}{t_и} \right) \cos n\Omega t \, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} U \frac{\sin \frac{n\Omega t_и}{2}}{n} - \frac{8}{T} \cdot \frac{U}{t_и} \left[\frac{\cos n\Omega t}{(n\Omega)^2} + \frac{t \sin n\Omega t}{n\Omega} \right]_0^{\frac{t_и}{2}} =$$

$$= \frac{8}{\pi} U \frac{\sin^2 \frac{n\Omega t_и}{4}}{n^2 \Omega t_и}; \qquad (7\text{-}28)$$

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{t_и}{2}} \left(U - 2U \frac{t}{t_и} \right) dt = U \frac{t_и}{T}; \qquad (7\text{-}29)$$

$$f(t) = \frac{1}{2} U \frac{t_и}{T} + \frac{8}{\pi} U \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\Omega t_и}{4}}{n^2 \Omega t_и} \cos n\Omega t. \qquad (7\text{-}30)$$

Спектральная диаграмма последовательности треугольных импульсов, вычисленная при условии $t_и = \frac{1}{10} T$, представлена на рис. 7-19, *а*. Как видно из рисунка, огибающая спектра имеет нулевые ординаты в точках $\omega = \frac{4\pi}{t_и}; \frac{8\pi}{t_и}; \frac{12\pi}{t_и}$ и т. д.

Спектральную функцию последовательности треугольных импульсов нетрудно рассчитать с помощью равенства (7-15). После соответствующих преобразований получим

$$F(j\omega) = \int_{-\frac{t_и}{2}}^{+\frac{t_и}{2}} f(t) e^{-j\omega t} dt = 2 \int_0^{\frac{t_и}{2}} \left(U - 2U \frac{t}{t_и} \right) \cos \omega t \, dt =$$

$$= 8U \frac{\sin^2 \frac{\omega t_и}{4}}{\omega^2 t_и}. \qquad (7\text{-}31)$$

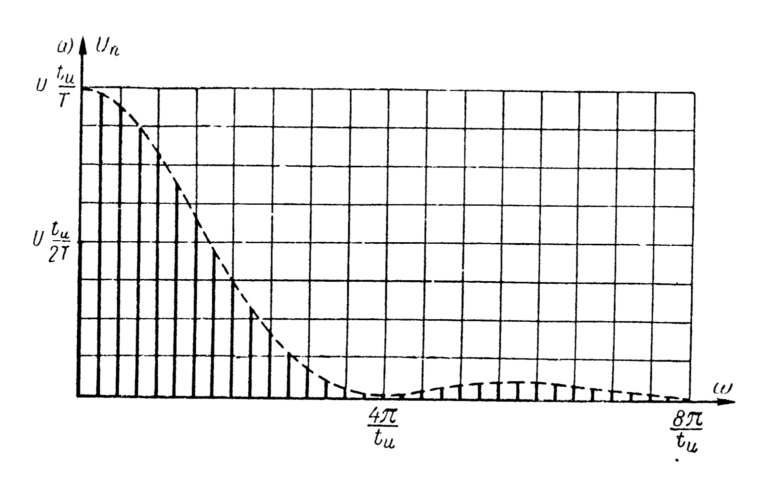
График этой функции показан на рис. 7-19, *б*.

Если продолжительность импульса $t_и$ равна периоду повторения T (рис. 7-20), то $\Omega t_и = \frac{2\pi}{T} T = 2\pi$, и разложение (7-30) принимает вид

$$f(t) = \frac{1}{2} U + \frac{4}{\pi^2} U \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{2}}{n^2} \cos n\Omega t =$$

$$= \frac{1}{2} U + \frac{4}{\pi^2} U \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos [(2m-1)\Omega t]}{(2m-1)^2}. \qquad (7\text{-}32)$$

Сравнивая последнее выражение с равенством (7-23), можно заметить, что амплитуды гармонических составляющих в спектре



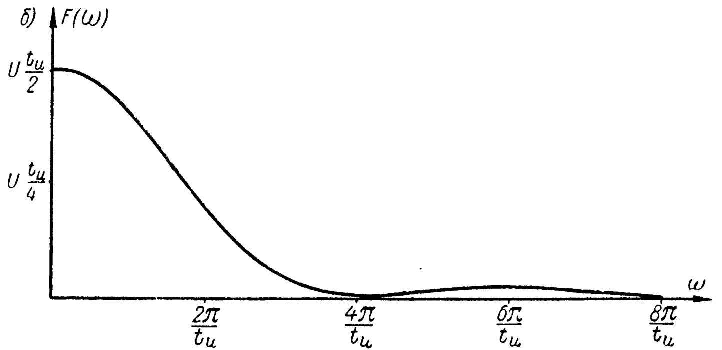


Рис. 7-19. Спектральная диаграмма (*а*) и спектральная функция (*б*) импульсов треугольной формы.

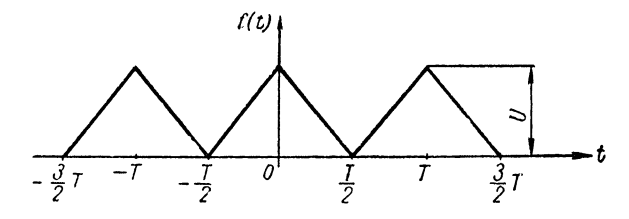


Рис. 7-20. Периодическая последовательность треугольных «импульсов» с продолжительностью, равной периоду повторения.

(7-32) убывают с ростом n (или m) значительно быстрее, чем в спектре импульсов прямоугольной формы. Объясняется это тем, что функция $f(t)$, изображенная на рис. 7-20, не имеет разрывов.

Определим, наконец, ряд Фурье функции, график которой построен на рис. 7-21. Для такой функции $a_n \equiv 0$ и

$$b_n = \frac{4}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\Omega t\,dt.$$

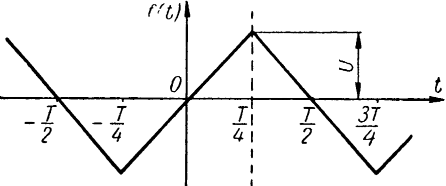


Рис. 7-21. Знакопеременные колебания треугольной формы.

Так как $f(t)$ симметрична относительно линии $t = \frac{T}{4}$, то b_n при всех четных n обращается в нуль, а при нечетных $n = 2m - 1$

$$b_m = \frac{8}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{4}} 4U\frac{t}{T}\sin(2m-1)\,\Omega t\,dt =$$

$$= \frac{32}{T}U\left\{\frac{\sin[(2m-1)\,\Omega t]}{(2m-1)^2\,\Omega^2} - \frac{t\cos[(2m-1)\,\Omega t]}{(2m-1)\,\Omega}\right\}\Bigg|_0^{\frac{T}{4}} = \frac{8}{\pi^2}U\frac{\sin\frac{(2m-1)\,\pi}{2}}{(2m-1)^2}.$$

Следовательно,

$$f(t) = \frac{8}{\pi^2}U\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2m-1)\,\pi}{2}}{(2m-1)^2}\sin[(2m-1)\,\Omega t]. \qquad (7\text{-}33)$$

7-5. Мощность и действующее значение периодического тока сложной формы

Пусть несинусоидальный периодический ток $i(t)$ течет по активному сопротивлению r. Определим среднюю мощность, которая расходуется на этом сопротивлении.

Как известно, величина средней мощности

$$P = \frac{1}{T}\int\limits_0^T p(t)\,dt = \frac{1}{T}\int\limits_0^T i^2(t)\,r\,dt,$$

где $p(t)$ — мгновенная мощность.

Разлагая функцию $i(t)$ в ряд

$$i(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t + b_n\sin n\Omega t),$$

получим

$$P = r\frac{1}{T}\int\limits_0^T\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t + b_n\sin n\Omega t)\right]^2 dt.$$

Правая часть последнего равенства, как нетрудно заметить, содержит интегралы:

$$\int_0^T \cos n\Omega t\, dt, \quad \int_0^T \sin n\Omega t\, dt, \quad \int_0^T \cos p\Omega t \cos q\Omega t\, dt,$$

$$\int_0^T \cos p\Omega t \sin q\Omega t\, dt, \quad \int_0^T \sin p\Omega t \sin q\Omega t\, dt;$$

здесь p и q — произвольные целые числа.

Легко убедиться, что подобные выражения равны нулю. Исключение составляют лишь третий и пятый интегралы при $p = q$:

$$\int_0^T \cos^2 p\Omega t\, dt = \frac{1}{2} T, \quad \int_0^T \sin^2 q\Omega t\, dt = \frac{1}{2} T.$$

Учитывая эти соотношения, будем иметь

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t)\, r\, dt = r\left[\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)\right]. \quad (7\text{-}34)$$

Обозначим, как обычно, постоянную составляющую тока $\frac{a_0}{2} = I_0$, а амплитуду n-й гармоники $I_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Тогда выражение (7-34) можем переписать в виде

$$P = I_0^2 r + \frac{1}{2} r \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2. \quad (7\text{-}35)$$

Отсюда вытекает, что средняя мощность, расходуемая в сопротивлении r, равна сумме средних мощностей всех гармонических составляющих. Другими словами, полная (средняя) мощность периодического тока сложной формы как бы распределена между различными гармониками спектра.

Равенство (7-35) дает возможность рассчитать эффективное (или действующее) значение $I_д$ тока. По определению $I_д = \sqrt{\frac{P}{r}}$, т. е. средняя мощность, выделяемая в сопротивлении r, равна $P = I_д^2 r$. Следовательно, $I_д = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2}$. Так как $\frac{1}{2} I_n^2 = I_{дn}^2$, где $I_{дn}$ — действующее значение тока n-й гармоники, то

$$I_д = \sqrt{I_0^2 + I_{д1}^2 + I_{д2}^2 + I_{д3}^2 + \ldots}. \quad (7\text{-}36)$$

Аналогично рассчитывается и действующее значение напряжения в цепи.

Пусть сопротивление r, по которому течет ток, равно 1 *ом*. Тогда равенство (7-34) принимает вид

$$\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

Ясно, что последнее выражение справедливо не только для тока $i(t)$, но и для любой периодической функции $f(t)$, удовлетворяющей условию Дирихле.

В математике соотношение

$$\frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2\,dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

носит название равенства Парсеваля.

7-6. Расчет отклика при несинусоидальном периодическом воздействии

Применим ряды Фурье для расчета отклика в цепи при периодическом воздействии сложной формы.

Пусть несинусоидальное периодическое напряжение приложено к двухполюснику с входным сопротивлением $Z_{\text{вх}}(\omega) = r_{\text{вх}} + jx_{\text{вх}}$. Чтобы найти ток в этом двухполюснике, разложим $u(t)$ в комплексный ряд:

$$u(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{U}_n e^{jn\Omega t}; \tag{7-37}$$

$\dot{U}_n$ — комплексная амплитуда n-й гармоники напряжения.

Так как любая гармоника напряжения определена на интервале $-\infty < t < \infty$, на основании обычного способа расчета отклика при синусоидальном воздействии можно написать

$$\dot{I}_n = \frac{\dot{U}_n}{Z_{\text{вх}}(n\Omega)},$$

где $\dot{I}_n$ — комплексная амплитуда n-й гармоники тока в двухполюснике, а $n\Omega$ — частота n-й гармоники. Используя далее принцип суперпозиции, будем иметь

$$i(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\dot{U}_n}{Z_{\text{вх}}(n\Omega)} e^{jn\Omega t}. \tag{7-38}$$

Если ряд Фурье напряжения $u(t)$ записан в тригонометрическом виде, т. е.

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos(n\Omega t - \psi_n), \tag{7-39}$$

то для n-й гармоники тока получаем

$$i(t)=\frac{U_n}{z_{\text{вх}}(n\Omega)}\cos[n\Omega t-\psi_n-\varphi(n\Omega)],$$

где $z_{\text{вх}}(n\Omega)$ — модуль, $\varphi(n\Omega)$ — аргумент входного сопротивления двухполюсника на частоте $n\Omega$. Следовательно, в другой форме записи

$$i(t)=\frac{U_0}{z_{\text{вх}}(0)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_n}{z_{\text{вх}}(n\Omega)}\cos[n\Omega t-\psi_n-\varphi(n\Omega)]. \quad (7\text{-}40)$$

Здесь $\frac{U_0}{z_{\text{вх}}(0)}=I_0$ — постоянная составляющая тока, а $z_{\text{вх}}(0)$ — входное сопротивление двухполюсника по постоянному току.

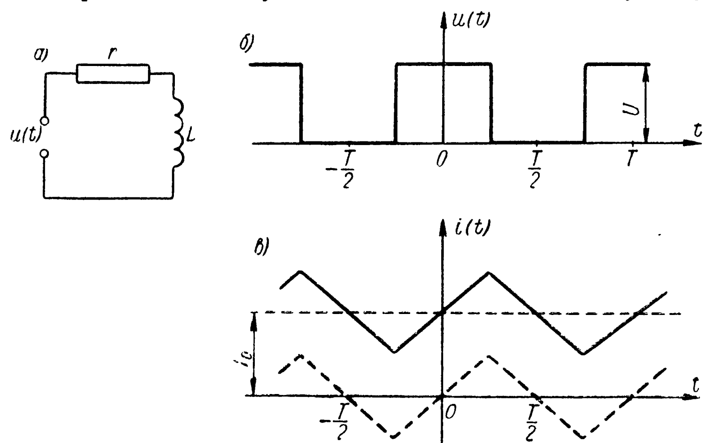


Рис. 7-22. Отклик цепи r, L при воздействии прямоугольных импульсов напряжения.

Для величины $Z_{\text{вх}}(0)$ в принципе можно написать:

$$Z_{\text{вх}}(0)=r_{\text{вх}}(0)+jx_{\text{вх}}(0).$$

Однако на постоянном токе $x_{\text{вх}}(0)$ равно либо нулю (в случае индуктивности), либо — ∞ (в случае емкости). Поэтому $Z_{\text{вх}}(0)=z_{\text{вх}}(0)=$ $=r_{\text{вх}}(0)$ или же $Z_{\text{вх}}(0)\to -j\infty$. В соответствии с этим постоянная составляющая тока в двухполюснике

$$I_0=\frac{U_0}{r_{\text{вх}}(0)} \quad \text{или же} \quad I_0=0.$$

Величина средней мощности, выделяемой в активной составляющей $r_{\text{вх}}(\omega)$ входного сопротивления двухполюсника, определяется равенством, аналогичным (7-35):

$$P=I_0^2 r_{\text{вх}}(0)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[I_n^2 r_{\text{вх}}(n\Omega).$$

Учитывая, что $I_0 r_{вх}(0) = U_0$, а

$$I_n r_{вх}(n\Omega) = I_n z_{вх}(n\Omega)\cos\varphi_n = U_n \cos\varphi_n,$$

будем иметь

$$P = U_0 I_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos\varphi_n.$$

Этот результат можно также получить путем усреднения за период T произведения $u(t)\,i(t)$.

Используем (7-40) для расчета тока в цепи r, L (рис. 7-22, *а*), находящейся под воздействием периодического напряжения прямоугольной формы (рис. 7-22, *б*). Выше было показано, что ряд Фурье последовательности прямоугольных импульсов с продолжительностью $t_и = \frac{T}{2}$ имеет вид (7-23).

Так как в рассматриваемом примере входное сопротивление двухполюсника

$$Z_{вх}(\omega) = r + j\omega L = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2}\, e^{j\varphi(\omega)},$$

где $\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{r}$, то согласно (7-23) и (7-40)

$$i(t) = \frac{U}{2r} + \frac{2}{\pi}U\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\cdot\frac{\cos(n\Omega t - \varphi_n)}{\sqrt{r^2 + (n\Omega L)^2}},$$

причем

$$\varphi_n = \operatorname{arctg}\frac{n\Omega L}{r}.$$

Предположим, что выполнено условие

$$\frac{\Omega L}{r} = 2\pi\frac{\frac{L}{r}}{T} \gg 1.$$

Тогда для любых n можно считать, что $z_{вх}(n\Omega) \approx n\Omega L$, а $\varphi_n \approx \frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$i(t) \approx \frac{U}{2r} + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{U}{\Omega L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}\sin n\Omega t$$

или с учетом того, что $n = 2m - 1$,

$$i(t) \approx \frac{U}{2r} + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{U}{\Omega L}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2m-1)\pi}{2}}{(2m-1)^2}\sin[(2m-1)\Omega t].$$

Сравнивая полученное выражение с разложением (7-32), нетрудно прийти к выводу, что ток в цепи изменяется во времени по «треугольному» закону (рис. 7-22, *в*), существенно отличающемуся от закона $u(t)$.

На рисунке, помимо кривой результирующего тока (сплошная линия), пунктиром показана постоянная составляющая тока величиной I_0, а также переменная составляющая, получающаяся при суммировании всех синусоидальных гармоник.

Рис. 7-23. Колебательный контур в режиме передачи напряжения.

Если исследуемая цепь представляет собой четырехполюсник, расчет отклика производится следующим образом.

Пусть, как и в предыдущем случае, на вход цепи подается периодическое напряжение [см. (7-39)]. Теперь это напряжение обозначим $u_1(t)$.

При воздействии n-й гармоники напряжения $u_1(t)$ на выходе четырехполюсника появится гармоническое напряжение с частотой $n\Omega$, амплитудой $U_{2n} = U_{1n}K(n\Omega)$ и начальной фазой $\varphi(n\Omega)$, т. е.

$$[u_2(t)]_n = U_{1n}K(n\Omega)\cos[n\Omega t - \varphi(n\Omega)].$$

Здесь $K(n\Omega)$ — модуль, $\varphi(n\Omega)$ — аргумент коэффициента передачи четырехполюсника (по напряжению) на частоте $n\Omega$, а индекс «2» обозначает все то, что относится к отклику.

Суммируя все гармоники, включая и постоянную составляющую выходного напряжения, будем иметь

$$u_2(t) = U_{10}K(0) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{1n}K(n\Omega)\cos[n\Omega t - \varphi(n\Omega)]. \qquad (7\text{-}41)$$

Предположим что в качестве четырехполюсника используется последовательный колебательный контур, причем выходное напряжение снимается с емкости (рис. 7-23).

Коэффициент передачи такого четырехполюсника при частоте $n\Omega$ согласно (4-38) и (4-45) принимает вид

$$K(jn\Omega) = \frac{Q\dfrac{\omega_0}{n\Omega}}{\sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{n\Omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{n\Omega}\right)^2}}\, e^{-j\varphi_{Cn}},$$

где $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ — резонансная частота;

Q — добротность контура;

$$\varphi_{Cn} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{n\Omega L - \dfrac{1}{n\Omega C}}{r} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left[Q\left(\frac{n\Omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{n\Omega}\right)\right].$$

Подставляя значения модуля и аргумента $K(jn\Omega)$ в выражение (7-41), получим

$$u_2(t) = U_{10} + Q\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_{1n}\frac{\omega_0}{n\Omega}}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{n\Omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{n\Omega}\right)^2}}\cos(n\Omega t - \varphi_{Cn}). \quad (7\text{-}42)$$

Из этого выражения следует, что величина и форма выходного напряжения существенно зависит от добротности колебательного

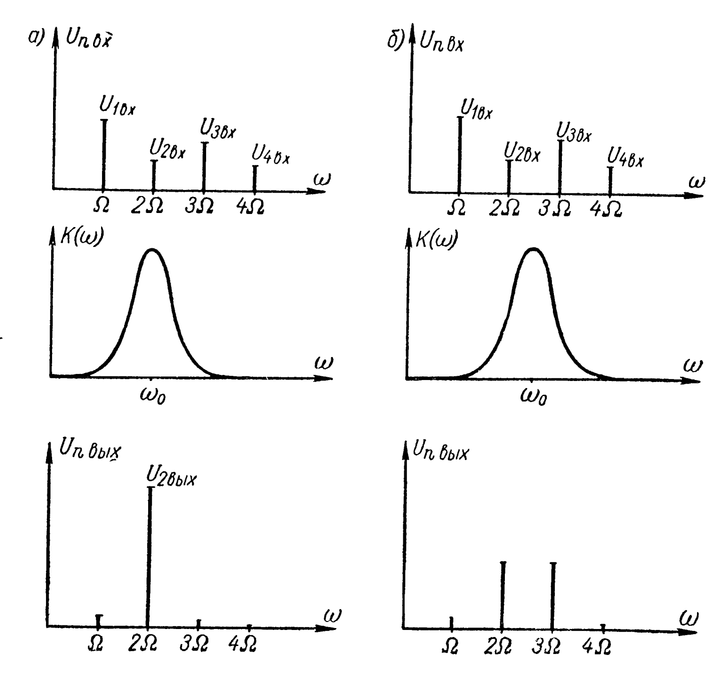


Рис. 7-24. Преобразование спектра периодического напряжения в колебательном контуре.

контура, а также от соотношения между резонансной частотой и частотами гармонических составляющих.

В том случае, когда резонансная частота ω_0 совпадает с частотой n-й гармоники и, кроме того, добротность Q достаточно велика (полоса пропускания контура меньше частотного промежутка между соседними гармониками), напряжение на конденсаторе будет почти синусоидальным. Действительно, при условии $\omega_0 = n\Omega$ преобладающее значение в спектре отклика имеет n-я гармоника, амплитуда которой $U_{2n} = U_{1n}Q$. Другие гармоники выходного напряжения, в особенности те, для которых $\omega_0 \gg n\Omega$ или

$\omega_0 \ll n\Omega$, характеризуются значительно меньшими амплитудами и, следовательно, не играют заметной роли.

Если же частота настройки контура не совпадает с частотой $n\Omega$, напряжение на конденсаторе будет содержать различные гармонические составляющие с различными амплитудами и фазами.

На рис. 7-24, *а* показаны амплитудные спектральные диаграммы входного $u_1(t)$ и выходного $u_2(t)$ напряжений, построенные при условии, что резонансная частота контура совпадает с частотой второй гармоники воздействия. Здесь же приведен график функции $K(\omega)$ рассматриваемой цепи. На рис. 7-24, *б* построены аналогичные диаграммы, соответствующие настройке контура на произвольную частоту, не равную $n\Omega$.

Таким образом, колебательный контур осуществляет преобразование спектра приложенного напряжения. Вследствие этого выходное напряжение (отклик) получается отличным по форме от воздействия.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

8-1. Введение

В предыдущих главах были изучены свойства линейных цепей в установившемся (стационарном) режиме. Такой режим, как уже было сказано выше, наблюдается в цепи, если напряжения и токи во всех ее элементах изменяются на бесконечном интервале времени по периодическому закону или же остаются постоянными.

В действительности условия стационарности процессов в цепях никогда не выполняются. Даже при гармонических воздействиях включение и выключение внешнего источника нарушает периодический характер изменения токов и напряжений и, стало быть, усложняет явления в цепи. Очевидно, любое изменение вида воздействия, или любое изменение параметров цепи (в том числе и вида схемы) приводит к нарушению стационарности процесса.

Отсюда вытекает, что реальные электрические процессы всегда будут отличаться от стационарных и лишь при некоторых условиях, зависящих от вида воздействия и свойств цепи, могут приближаться к ним. Поэтому анализ электрических цепей в режимах, более общих, нежели установившиеся, представляет для радиоэлектроники весьма большой интерес.

Рассмотрим с качественной точки зрения явления, возникающие в линейных цепях при переходе от одного стационарного состояния (режима) к другому.

Если цепь содержит только постоянные активные сопротивления, то изменение вида внешнего воздействия или вида схемы «мгновенно» вызывает соответствующие изменения напряжения и тока в ветвях. Однако при наличии реактивных элементов картина будет принципиально иной. Переход цепи к новому стационарному состоянию в этом случае сопровождается появлением так называемых *переходных* или *нестационарных процессов*.

Возникновение таких процессов связано с особенностями изменения энергии электромагнитного поля в реактивных элементах. Из физических соображений ясно, что энергия поля в индуктив-

ностях и емкостях системы не может меняться во времени мгновенно. Изменение энергии за единицу времени, как известно, представляет собой мощность, отдаваемую или потребляемую соответствующим элементом схемы, т. е. $\frac{dw}{dt} = p$. Если допустить, что энергия w меняется скачком, то величина производной обращается в бесконечность, и, следовательно, мощность p принимает бесконечно большое значение. Последний вывод, разумеется, не имеет смысла.

Таким образом, в цепи с реактивными (энергоемкими) элементами величины, определяющие запас энергии, при переходе к новому стационарному состоянию должны меняться во времени плавно, без скачков. В результате выходной ток и напряжение будут в большей или меньшей степени отличаться по форме от внешнего воздействия.

Теоретически все переходные процессы имеют бесконечно большую продолжительность. Однако на практике значения напряжения и тока уже по истечении определенных конечных промежутков времени становятся близкими к установившимся значениям.

Нестационарные явления играют важную роль в работе многих устройств, применяемых в современной радиотехнике и электронике. Особенно велика их роль в схемах, предназначенных для получения напряжений (или токов) специальной формы. Следует однако отметить, что в ряде случаев возникновение этих процессов в принципе нежелательно (см. главу тринадцатую).

Ниже излагается теория переходных процессов, возникающих при включении источников внешнего напряжения, а также при коротком замыкании некоторых цепей [Л.11].

8-2. Собственные процессы и вынужденный режим

Анализ электрических процессов в линейной цепи, как известно, основан на решении уравнений Кирхгофа для мгновенных напряжений и токов в ее элементах. Эти уравнения после несложных математических преобразований приводятся к линейному неоднородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим, например, цепь, образованную последовательным соединением активного сопротивления r, индуктивности L и емкости C при переменном воздействии $e(t)$. Уравнение Кирхгофа в этом случае имеет вид

$$ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = e(t).$$

Продифференцировав обе части равенства по t и разделив их на L, получим дифференциальное уравнение для тока

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{r}{L}\cdot\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = \frac{1}{L}\cdot\frac{de}{dt}. \qquad (8\text{-}1)$$

В общем случае процессы в линейной цепи будут описываться линейным дифференциальным уравнением n-го порядка

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x(t). \tag{8-2}$$

Здесь $y(t)$ — искомая функция;
$x(t)$ — известная функция, характеризующая внешнее воздействие;
a_0, a_1, ..., a_n — постоянные коэффициенты.

Применительно к уравнению (8-1) неизвестная $y(t)$ равна $i(t)$,

$$n = 2, \qquad a_1 = \frac{r}{L}, \qquad a_0 = \frac{1}{LC} \quad \text{и} \quad x(t) = \frac{1}{L} \cdot \frac{de}{dt}.$$

В установившемся режиме решение уравнения (8-2) или (8-1) не требует никаких дополнительных сведений о состоянии системы. Однако для расчета отклика в переходном режиме приходится вводить так называемые начальные условия, характеризующие исходное состояние цепи. В качестве таких условий выбирают значения напряжений на емкостях и токов в индуктивностях; совокупность этих значений позволяет определить начальный запас энергии полей. Количество начальных условий должно быть равно порядку уравнения (8-2).

В математике существуют различные способы решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, на основе которых разработаны соответствующие методы исследования электрических цепей. Для расчета переходных процессов, в частности, можно использовать так называемый классический метод, согласно которому решение уравнения (8-2) необходимо искать в виде суммы двух функций:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t),$$

где y_1 — частное решение исходного уравнения;
y_2 — общий интеграл однородного уравнения

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0. \tag{8-3}$$

Функция $y_1(t)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению с правой частью, как нетрудно видеть, непосредственно зависит от вида внешнего воздействия. Следовательно, $y_1(t)$ представляет собой вынужденный режим, задаваемый в цепи внешним источником.

Общее решение однородного дифференциального уравнения (8-3), т. е. функция $y_2(t)$, характеризует электрические явления, обусловленные изменением начального энергетического состояния цепи в отсутствие вынуждающего воздействия. Поэтому они получили название собственных, или свободных, явлений (процессов).

Таким образом, переходный процесс в общем случае есть совокупность свободной и вынужденной составляющих токов и напряжений. Эти составляющие, конечно, должны быть связаны между собой посредством начальных условий.

Так как начальный запас энергии в реактивных элементах всегда ограничен, при наличии потерь собственные явления с течением времени затухают, и в конце концов (при $t \to \infty$) в цепи будет наблюдаться только вынужденный режим.

8-3. Переходные процессы в цепи *r*, *L*

Перейдем к анализу простейших переходных процессов в цепях с одним энергоемким (реактивным) элементом.

Предположим, что цепь, состоящая из активного сопротивления r и индуктивности L, соединенных последовательно, подключается к источнику внешнего напряжения в момент $t = 0$ (рис. 8-1).

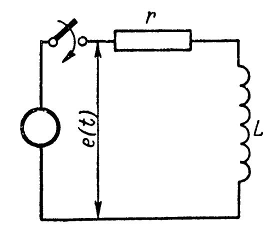


Рис. 8-1. Включение цепи r, L на внешнее напряжение.

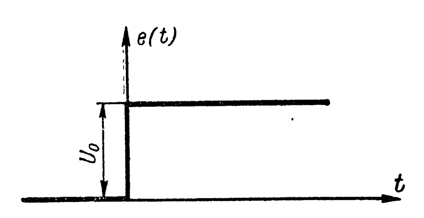


Рис. 8-2. Функция включения постоянного напряжения (скачок напряжения).

Для определения переходного тока i, т. е. тока переходного процесса при $t \geqslant 0$, составим уравнение Кирхгофа

$$ir + L\frac{di}{dt} = e(t); \qquad (8\text{-}4)$$

$e(t)$ — напряжение на входе цепи (функция внешнего воздействия). Поделив обе части этого равенства на L, получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{di}{dt} + \frac{r}{L}i = \frac{1}{L}e(t). \qquad (8\text{-}5)$$

Общее решение уравнения (8-5), как уже указывалось в предыдущем параграфе, можно представить в виде

$$i = i_{св} + i_{в}. \qquad (8\text{-}6)$$

Здесь $i_{св}$ — свободный ток цепи;
$i_{в}$ — ток вынужденного режима.

Функция $i_{\text{св}}$ согласно (8-3) удовлетворяет однородному уравнению $\frac{di_{\text{св}}}{dt}+\frac{r}{L}i_{\text{св}}=0$, следовательно,

$$i_{\text{св}}=Ae^{-pt}=Ae^{-\frac{r}{L}t}, \tag{8-7}$$

где A — постоянная интегрирования, а $p=-\frac{r}{L}$ — корень характеристического уравнения $p+\frac{r}{L}=0$.

Подставляя значения (8-7) в (8-6), получим

$$i=Ae^{-\frac{r}{L}t}+i_{\text{в}}. \tag{8-8}$$

Вынужденный ток в цепи определяется видом функции $e(t)$. В соответствии с этим рассмотрим некоторые частные случаи переходных процессов.

а) Включение цепи r, L на постоянное напряжение

При включении источника постоянного напряжения функцию внешнего воздействия можно аппроксимировать разрывной функцией $e(t)$, изображенной на рис. 8-2. Такая функция вполне удовлетворительно отображает общий характер изменения реального воздействия, возникающего в результате быстрого включения источника.

Для расчета вынужденной составляющей тока предположим, что в исследуемой цепи установился постоянный ток. Величина его, очевидно, будет равна $U_0 r$, где U_0 — приложенное напряжение. С другой стороны, из выражения (8-8) видно, что при $t\to\infty$ ток $i=i_{\text{в}}$. Следовательно, $i_{\text{в}}=\frac{U_0}{r}$ и

$$i=Ae^{-\frac{r}{L}t}+\frac{U_0}{r}. \tag{8-9}$$

Чтобы найти неизвестную постоянную интегрирования, введем начальные условия.

Энергетическое состояние рассматриваемой цепи характеризуется количеством энергии, заключенной в магнитном поле катушки индуктивности, т. е. величиной

$$w_L=\frac{Li^2}{2}.$$

Так как количество энергии, запасенной в реактивном элементе, не может изменяться скачком (см. § 8-1), ток, текущий через индуктивность L, при любых изменениях приложенного напряжения должен оставаться непрерывной функцией времени, т. е. скачки тока в индуктивности невозможны.

Обозначив величину тока в момент, непосредственно предшествующий включению источника, символом i (0—), а величину его сразу же после включения — символом i (0+), на основании предыдущих соображений будем иметь

$$i(0+) = i(0-) = 0. \qquad (8\text{-}10)$$

Используя (8-10) совместно с (8-9), получим $A = -\frac{U_0}{r}$. Подставив значение A в (8-9), находим окончательно

$$i_{\text{св}} = -Ie^{-\frac{r}{L}t} \qquad (8\text{-}11)$$

и

$$i = I\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right), \qquad (8\text{-}12)$$

где $I = \frac{U_0}{r}$.

Напряжения на активном сопротивлении и индуктивности определяются выражениями:

$$u_r = ir = U_0\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right); \qquad (8\text{-}13)$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = U_0 e^{-\frac{r}{L}t}. \qquad (8\text{-}14)$$

Из формулы (8-12) видно, что величина тока в цепи не устанавливается мгновенно, а нарастает во времени по экспоненциальному закону. Аналогично изменяется и напряжение на сопротивлении.

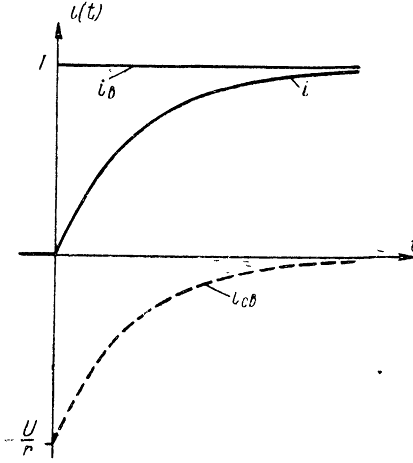


Рис. 8-3. Ток в цепи r, L при включении постоянного напряжения.

Напряжение на индуктивности в начальный момент согласно (8-14) равно напряжению источника, а затем непрерывно уменьшается, стремясь в пределе к нулю. Так как до включения источника, например при $t =$ = (0—), u_L было равно нулю, то в момент включения эта величина в отличие от тока изменяется скачком.

Свободный ток цепи в начальный момент имеет максимальное по абсолютной величине значение, а затем непрерывно уменьшается.

На рис. 8-3 и 8-4 приведены кривые изменения токов и напряжений, иллюстрирующие переходный процесс.

Чтобы получить представление о скорости нарастания тока в цепи, вычислим производную di/dt при $t = (0+)$. Дифференцируя (8-12) по t, получим

$$\frac{di}{dt} = I \frac{r}{L} e^{-\frac{r}{L}t}, \qquad (8\text{-}15)$$

откуда

$$\frac{di\,(0+)}{dt} = I \frac{r}{L} = I \frac{1}{\tau_L}. \qquad (8\text{-}16)$$

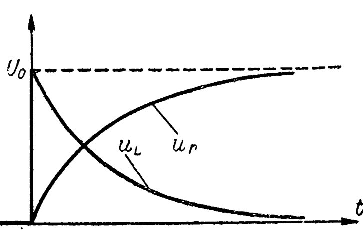


Рис. 8-4. Напряжения в цепи r, L при включении постоянного напряжения.

Величина $\tau_L = \frac{L}{r}$ представляет собой **постоянную времени** цепи r, L. Чем больше эта величина, тем медленнее нарастает ток и, следовательно, тем медленнее протекают переходные процессы. Кривые изменения тока в цепях r, L с различными постоянными времени показаны на рис. 8-5.

Из выражения (8-11) следует, что за время τ_L свободный ток уменьшается по сравнению с его начальным значением в e раз. Действительно, при $t = \tau_L$

$$i_{св}(\tau_L) = Ie^{-1} \approx 0{,}368I; \quad e = 2{,}718\ldots$$

Переходный ток в этот же момент

$$i(\tau_L) = I(1 - e^{-1}) \approx 0{,}632I.$$

Постоянную времени τ_L можно определить графически, если использовать геометрическую интерпретацию производной $di\,(0+)/dt$.

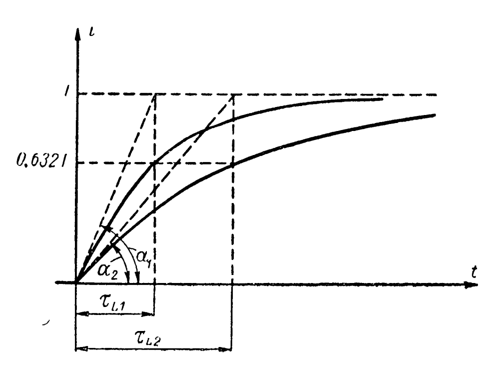


Рис. 8-5. Установление тока в цепи r, L при различных постоянных времени.

Обозначив $di\,(0+)/dt$ через $\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона касательной к кривой тока в начале координат, на основании (8-16) будем иметь

$$\tau_L = I \operatorname{ctg}\alpha. \qquad (8\text{-}17)$$

Отсюда вытекает, что τ_L есть абсцисса точки пересечения «начальной» касательной с линией $i = I$ (рис. 8-5).

Введем в рассмотрение новую систему координат. Для этого по оси абсцисс будем откладывать ток i, а по оси ординат — напряжение u_L или равноценную ему (с точностью до постоянного множителя L) величину di/dt. Тогда состояние цепи r, L в любой

момент $t = t_n$ можно изобразить на плоскости $(i,\ di/dt)$ в виде точки M_n с координатами $i(t_n) = i_n$, $\left.\frac{di}{dt}\right|_{t_n} = \frac{di_n}{dt}$ (рис. 8-6). Геометрическое место таких точек образует линию, уравнение которой нетрудно получить из выражения (8-4). В самом деле, это выражение при $e(t) = U_0$ дает

$$\frac{di}{dt} = \frac{U_0}{L} - \frac{r}{L}i = \frac{\frac{U_0}{r} - i}{\frac{L}{r}} = \frac{I - i}{\tau_L};\quad t \geqslant 0. \qquad (8\text{-}18)$$

Отсюда видно, что график функции $\frac{di}{dt} = f(i)$ представляет собой прямую линию (рис. 8-7). Угол наклона ее к оси абсцисс зависит от величины τ_L.

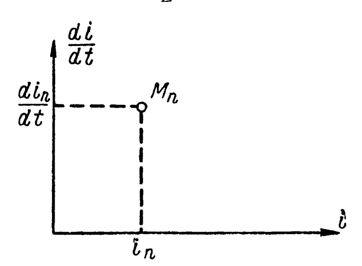


Рис. 8-6. Изображающая точка M_n на плоскости $(i,\ di/dt)$.

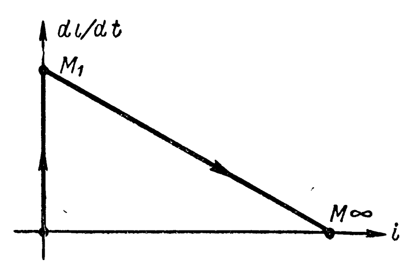


Рис. 8-7. График функции $\frac{di}{dt} = f(i)$ для переходного процесса в цепи r, L при включении постоянного напряжения.

Рассмотрим положение точки M, изображающей состояние цепи, в различные моменты. До включения источника величины тока и напряжения на индуктивности (а следовательно, и производной di/dt), очевидно, равны нулю, поэтому точка M при $t = (0-)$ будет находиться в начале координат. В момент включения, т. е. при $t = (0+)$, она скачком переходит в положение M_1, а затем перемещается по прямой вниз, стремясь к точке M_∞, изображающей стационарное состояние цепи.

Таким образом, функция $\frac{di}{dt} = f(i)$ позволяет судить о переходном процессе в любой момент времени.

б) Включение цепи r, L на синусоидальное напряжение

Если функция внешнего воздействия при $t \geqslant 0$ имеет вид $e = U\cos(\omega t + \psi)$, вынужденный ток будет представлять собой ток установившихся гармонических колебаний:

$$i_в = I\cos(\omega t + \psi - \varphi),$$

где $I=\frac{U}{z}$; $z=\sqrt{r^2+\omega^2L^2}$ и $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega L}{r}$.

Подставив значение $i_в$ в (8-8), находим, что

$$i=Ae^{-\frac{t}{\tau_L}}+I\cos(\omega t+\psi-\varphi).$$

В начальный момент ток, протекающий через индуктивность, как уже было установлено, должен быть равен нулю. Поэтому $A+I\cos(\psi-\varphi)=0$, откуда $A=-I\cos(\psi-\varphi)$.

Следовательно, ток в цепи при $t\geqslant 0$ определяется выражением

$$i=I\left[\cos(\omega t+\psi-\varphi)-\cos(\psi-\varphi)\,e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right]. \qquad (8\text{-}19)$$

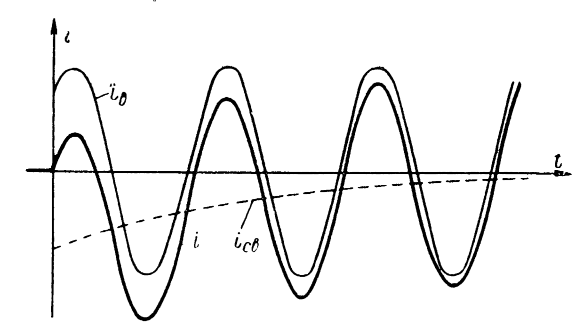


Рис. 8-8. Переходный процесс в цепи r, L при включении синусоидального напряжения.

Напряжение на индуктивности

$$u_L=L\frac{di}{dt}=I\left[-\omega L\sin(\omega t+\psi-\varphi)+\frac{L}{\tau_L}\cos(\psi-\varphi)\,e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right]=$$

$$=U\left[\cos\varphi\cos(\psi-\varphi)\,e^{-\frac{t}{\tau_L}}-\sin\varphi\sin(\omega t+\psi-\varphi)\right].$$

При $t=(0+)$ напряжение $u_L\,(0+)$ совпадает с $e\,(0+)$; это значит, что в момент включения источника все напряжение его будет приложено только к индуктивности (компенсирует э. д. с. самоиндукции).

Рассмотрим более подробно равенство (8-19).

Любопытно отметить, что если углы φ и ψ связаны соотношением $\psi-\varphi=\frac{\pi}{2}$, в цепи сразу же после включения устанавливается стационарное состояние. Причина такого необычного явления заключается в том, что вынужденный ток при $\psi-\varphi=\frac{\pi}{2}$

в начальный момент равен нулю. Вследствие этого исходные начальные условия удовлетворяются без свободного тока.

Однако в общем случае вынужденный ток при включении источника не равен нулю, и в цепи наблюдается переходный процесс. Кривые изменения токов i, $i_в$ и $i_{св}$ приведены на рис. 8-8. Из рисунка видно, что в начальный период переходный ток i заметно отличается

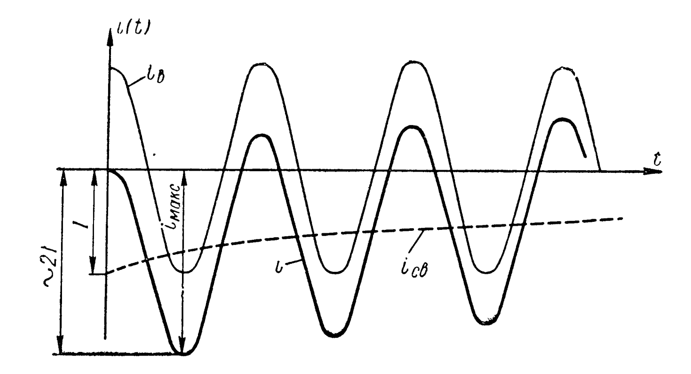


Рис. 8-9. Переходный процесс в цепи r, L при $\psi = \varphi$.

по форме от вынужденного, причем в некоторых точках величина его превышает амплитуду тока стационарного состояния.

Максимально возможные значения тока в цепи, как вытекает из (8-19), будут наблюдаться при условии, что вынужденный ток в момент включения источника имеет наибольшую величину, т. е. при $\varphi = \psi$ или $\psi - \varphi = \pm\pi$. Если постоянная времени τ_L велика, то на интервале, где $t \ll \tau_L$, максимумы тока приближаются к $2I$ (рис. 8-9).

в) Короткое замыкание цепи r, L

Предположим, что цепь r, L, по которой течет постоянный ток, при $t = 0$ замыкается накоротко (рис. 8-10). Очевидно, в такой цепи после коммутации будет иметь место только собственный процесс, так как при $t \geqslant 0$ функция внешнего воздействия $e(t) = 0$. В рассматриваемом случае величина свободного тока по-прежнему определяется выражением (8-7), а постоянная интегрирования A находится из условия

$$i_{св}(0+) = i(0-) = \frac{U_0}{r} = I_0.$$

В соответствии с этим

$$i_{св} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau_L}}. \qquad (8\text{-}20)$$

Кривая изменения тока $i_{св}$ во времени приведена на рис. 8-11. Здесь же показан график изменения э. д. с. самоиндукции

$$e_L = -L\frac{di}{dt} = I_0 r e^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

Скорость убывания тока, как видно из (8-20), определяется постоянной времени цепи. Чем меньше величина $\tau_L = \frac{L}{r}$, тем быстрее затухает переходный процесс. При $t = \tau_L$ ток принимает значение $i_{св}(\tau_L) \approx 0,368\ I_0$.

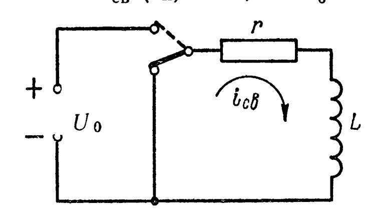


Рис. 8-10. Короткое замыкание цепи r, L.

Рис. 8-11. Переходный процесс в цепи r, L при коротком замыкании.

Проводя рассуждения, аналогичные изложенным выше, можно показать (рис. 8-11), что постоянная τ_L равна отрезку, отсекаемому на оси абсцисс касательной к кривой $i_{св} = (t)$ в точке $t = (0+)$.

За время переходного процесса начальная энергия, заключенная в индуктивности, будет расходоваться на тепловые потери в активном сопротивлении. Вычисляя величину этих потерь, получим

$$\int_0^\infty i_{св}^2 r\,dt = r\int_0^\infty I_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau_L}}\,dt = \frac{LI_0^2}{2} = w_L(0).$$

г) Включение цепи r, L на линейно изменяющееся напряжение

Рассмотрим переходный процесс в цепи r, L при воздействии внешнего напряжения, изменяющегося по линейному закону

$$e(t) = U_0 + U_1 t; \qquad 0 \leqslant t < \infty. \qquad (8\text{-}21)$$

Здесь U_0 — начальное напряжение в момент включения источника (рис. 8-12);
U_1 — величина, характеризующая скорость изменения внешнего напряжения $\left(\frac{de}{dt} = U_1\right)$.

Частное решение уравнения (8-5), определяющее вынужденный ток, теперь придется искать в виде $i_в = Bt + D$. Подставляя это выражение в (8-5), будем иметь

$$B + \frac{r}{L}(Bt + D) = \frac{1}{L}U_0 + \frac{U_1}{L}t.$$

Приравняв члены с одинаковыми степенями t, получим

$$B + \frac{D}{\tau_L} = \frac{U_0}{L} \quad \text{и} \quad B = \frac{1}{\tau_L} = \frac{U_1}{L},$$

откуда

$$B = \frac{U_1}{L}\tau_L = \frac{U_1}{r}, \qquad D = \frac{U_0}{r} - \frac{U_1\tau_L}{r}.$$

Таким образом,

$$i_в = \frac{U_1}{r}t + \frac{1}{r}(U_0 - U_1\tau_L),$$

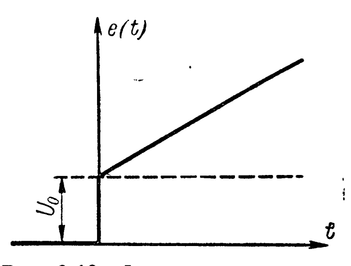


Рис. 8-12. Функция включения линейно изменяющегося напряжения.

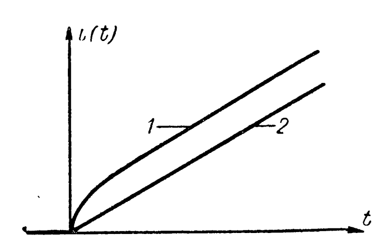


Рис. 8-13. Переходные процессы в цепи r, L при включении линейно изменяющегося напряжения.

а полный ток

$$i = \frac{U_1}{r}t + \frac{1}{r}(U_0 - U_1\tau_L) + Ae^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

В начальный момент $t = (0+)$ должно выполняться условие $i(0+) = 0$; поэтому

$$A = -\frac{1}{r}(U_0 - U_1\tau_L),$$

и окончательно

$$i = \frac{U_1}{r}t + \frac{U_0 - U_1\tau_L}{r}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right). \tag{8-22}$$

Из равенства (8-22) следует, что закон изменения тока во времени в общем случае отличается от линейного (кривая *1* на рис. 8-13). Если, однако, начальный скачок внешнего напряжения U_0 равен изменению напряжения за время τ_L, т. е. $U_0 = U_1\tau_L$, то

$$i = \frac{U_1}{r}t.$$

Значит, подбирая величину внешнего напряжения в момент включения, можно добиться, чтобы ток в индуктивности изменялся по линейному закону (кривая *2* на рис. 8-13). Такой способ получения «линейного тока» в цепях с индуктивностями находит применение в некоторых радиотехнических устройствах.

8-4. Переходные процессы в цепи r, C

Значительный практический интерес представляют нестационарные явления, возникающие при заряде, а также разряде конденсатора.

Предположим, что цепь r, C, изображенная на рис. 8-14, в момент $t=0$ подключается к источнику внешнего напряжения. Напишем для этой цепи второй закон Кирхгофа

$$u_C + u_r = e(t); \qquad t \geqslant 0.$$

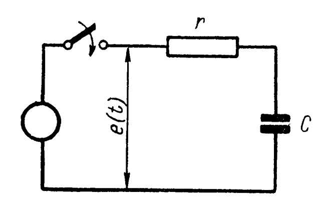


Рис. 8-14. Включение цепи r, C на внешнее напряжение.

Здесь u_C — падение напряжения на конденсаторе;
u_r — падение напряжения на активном сопротивлении.

Учитывая, что ток в цепи $i = C\frac{du_C}{dt}$ и $u_r = ir = rC\frac{du_C}{dt}$, будем иметь

$$rC\frac{du_C}{dt} + u_C = e(t)$$

или

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{rC}u_C = \frac{1}{rC}e(t). \qquad (8\text{-}23)$$

Полученное равенство представляет собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка с неизвестной функцией u_C. По своей структуре оно аналогично уравнению (8-5).

Общее решение уравнения (8-23) можно записать в виде суммы свободной $u_{св}$ и вынужденной $u_в$ составляющих напряжения:

$$u_C = u_{св} + u_в = Ae^{-\frac{t}{\tau_C}} + u_в, \qquad (8\text{-}24)$$

где $\tau_C = rC$ — постоянная времени цепи r, C.

Рассмотрим некоторые примеры переходных процессов при различных формах внешнего воздействия.

а) Включение цепи r, C на постоянное напряжение (заряд конденсатора через сопротивление)

Если цепь r, C подключается к источнику постоянного напряжения U_0, функция $e(t)$ имеет вид, показанный на рис. 8-2. Величина $u_в$ в этом случае должна быть равна внешнему напряжению U_0, так как при $t\to\infty$ конденсатор заряжается до напряжения источника питания. Следовательно,

$$u_C = U_0 + Ae^{-\frac{t}{\tau_C}}.$$

Для определения постоянной интегрирования введем начальные условия. Энергетическое состояние исследуемой системы теперь характеризуется количеством энергии $w_C = \frac{Cu_C^2}{2}$, заключенной в электрическом поле конденсатора. На основании рассуждений о непрерывном характере изменения энергии можно утверждать, что напряжение на конденсаторе не может изменяться во времени скачком. В соответствии с этим будем иметь $u_C(0+) = u_C(0-) = 0$, откуда вытекает, что $A = -U_0$.

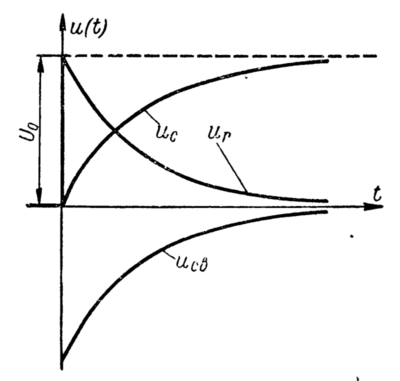


Рис. 8-15. Переходный процесс в цепи r, C при включении постоянного напряжения.

Таким образом, при $t \geqslant 0$

$$u_{св} = -U_0 e^{-\frac{t}{\tau_C}};$$

$$u_C = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right). \qquad (8\text{-}25)$$

Из выражения (8-25) видно, что напряжение на конденсаторе в процессе заряда возрастает по экспоненциальному закону, стремясь к величине U_0 (рис. 8-15). Скорость заряда конденсатора зависит от постоянной времени цепи: чем больше величина емкости и активного сопротивления, определяющих τ_C, тем медленнее растет напряжение u_C.

Ток

$$i = C\frac{du_C}{dt} = \frac{CU_0}{\tau_C} e^{-\frac{t}{\tau_C}} = \frac{U_0}{r} e^{-\frac{t}{\tau_C}}$$

с течением времени убывает по экспоненте, направление его совпадает с выбранным при составлении дифференциального уравнения условно положительным направлением.

Аналогично изменяется и напряжение на активном сопротивлении

$$u_r = ir = U_0 e^{-\frac{t}{\tau_C}}. \qquad (8\text{-}26)$$

В момент включения источника питания значение u_r изменяется скачком от нуля до максимума. График изменения $u_r(t)$ изображен на рис. 8-15. Здесь же показана кривая $u_{св}(t)$.

Во время переходного процесса в конденсаторе происходит непрерывное накопление электрической энергии, которая при $t \to \infty$ достигает величины $W_{C\,макс} = \frac{CU_0^2}{2}$. Одновременно часть энергии, отдаваемой источником питания, расходуется в активном сопроти-

влении. Любопытно, что энергия, теряемая на сопротивлении, равна энергии, запасаемой в конденсаторе. Действительно,

$$W_r = \int_0^\infty i^2 r\,dt = \frac{U_0^2}{r}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau_C}}\,dt = -\frac{U_0^2}{r}\cdot\frac{e^{-\frac{2t}{\tau_C}}}{\frac{2}{\tau_C}}\Bigg|_0^\infty = \frac{CU_0^2}{2} = W_{C\,\text{макс}}.$$

Если емкость C в момент включения имела напряжение $U_н$, начальные условия должны быть записаны в виде

$$u_C(0+) = u_C(0-) = U_н.$$

В этом случае напряжение u_C определяется формулой

$$u_C = U_0 - (U_0 - U_н)\,e^{-\frac{t}{\tau_C}} = U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right) + U_н e^{-\frac{t}{\tau_C}},$$

вывод которой предоставляется читателю.

б) Включение цепи r, C на синусоидальное напряжение

Пусть при $t \geqslant 0$ функция внешнего воздействия

$$e(t) = U\cos(\omega t + \psi).$$

Поскольку напряжение на емкости отстает по фазе от тока на угол $\pi/2$, вынужденное напряжение на конденсаторе будет

$$u_в = \frac{1}{\omega C}\cdot\frac{U}{z}\cos\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

где

$$z = \sqrt{r^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{x_C}{r}\right) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\omega C r}\right).$$

Подставив значение $u_в$ в (8-24), получим

$$u_C = Ae^{-\frac{t}{\tau_C}} + \frac{U}{\omega C z}\cos\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Если до включения внешнего источника конденсатор не имел заряда, то при $t = (0+)$ напряжение $u_C = 0$, откуда вытекает, что

$$A = -\frac{U}{\omega C z}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi - \psi\right) = \frac{U}{\omega C z}\sin(\varphi - \psi).$$

Следовательно, во время переходного процесса

$$u_C = \frac{U}{\omega C z}\left[\sin(\varphi - \psi)\,e^{-\frac{t}{\tau_C}} + \cos\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right]. \qquad (8\text{-}27)$$

В установившемся режиме (т. е. при $t \to \infty$) $u_C = u_в$.

Ток в цепи

$$i = C\frac{du_C}{dt} = -\frac{U}{z}\left[\frac{1}{\omega\tau_C}\sin(\varphi-\psi)e^{-\frac{t}{\tau_C}} + \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

При $t = (0+)$

$$i(0+) = \frac{U}{r}[\sin\varphi\sin(\varphi-\psi) + \cos\varphi\cos(\varphi-\psi)] = \frac{U}{r}\cos\psi.$$

Последний результат говорит о том, что в начальный момент времени конденсатор как бы замыкается накоротко и величина тока в цепи зависит только от активного сопротивления.

Предположим, что в момент включения источника мгновенное значение вынужденного напряжения на конденсаторе оказалось

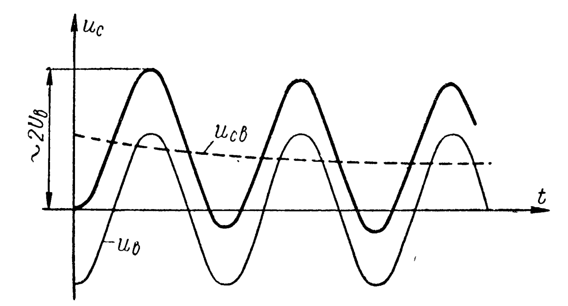


Рис. 8-16. Переходный процесс в цепи r, C при включении синусоидального напряжения.

равным нулю. Это, очевидно, будет иметь место, если $\varphi - \psi = 0$. При таком соотношении фаз никаких собственных процессов не возникает, и в цепи сразу устанавливается стационарный режим:

$$u_C = \frac{U}{\omega C z}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = U_в \sin\omega t,$$

где

$$U_в = \frac{U}{\omega C z}.$$

В общем случае, когда $\varphi - \psi \neq 0$, напряжение на конденсаторе, как следует из (8-27), может существенно отличаться от напряжения вынужденных колебаний. Наиболее характерным в этом отношении является переходный процесс, наблюдаемый при $\varphi - \psi = \pm\frac{\pi}{2}$.

На рис. 8-16 приведена кривая изменения напряжения на конденсаторе в зависимости от t, построенная для цепи с большой постоянной времени при $\varphi - \psi = \frac{\pi}{2}$. Из графика видно, что максимальные значения напряжения u_C почти в два раза превышают амплитуды напряжения вынужденных колебаний.

в) **Разряд конденсатора на сопротивление (короткое замыкание цепи r, C)**

При коротком замыкании цепи r, C в момент $t = 0$ (рис. 8-17) конденсатор C, предварительно заряженный до какого-то напряжения, должен разряжаться на активное сопротивление r. Так как функция внешнего воздействия для любых $t \geqslant 0$ равна нулю, в цепи будут наблюдаться только собственные явления. В соответствии с этим решение уравнения (8-23) имеет вид

$$u_C = Ae^{-\frac{t}{\tau_C}}.$$

Пусть при $t = (0+)$, начальное напряжение на конденсаторе $u_C = U_0$. Тогда $A = U_0$ и

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau_C}}. \qquad (8\text{-}28)$$

Величина тока

$$i = C\frac{du_C}{dt} = -\frac{C}{\tau_C}U_0 e^{-\frac{t}{\tau_C}} = -\frac{U_0}{r}e^{-\frac{t}{\tau_C}}. \qquad (8\text{-}29)$$

Отрицательный знак в последнем равенстве говорит о том, что направление тока в рассматриваемом случае противоположно направлению, условно принятому за положительное (рис. 8-17).

Из выражений (8-28) и (8-29) видно, что напряжение на конденсаторе и ток в цепи убывают во времени по экспоненциальному закону, причем скорость их изменения, как обычно, определяется постоянной времени τ_C. Кривые $u_C(t)$ и $i(t)$ показаны на рис. 8-18. В момент $t = 0$ величина тока изменяется скачком от нуля до максимума, а напряжение на емкости равно U_0.

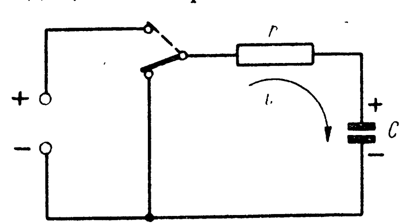


Рис. 8-17. Короткое замыкание цепи r, C.

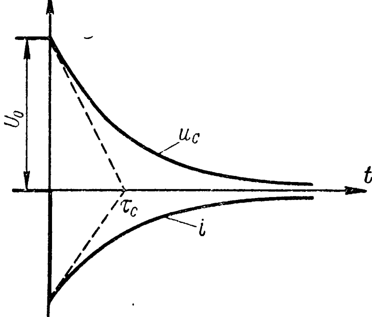


Рис. 8-18. Переходный процесс в цепи r, C при коротком замыкании.

При разряде конденсатора энергия его непрерывно расходуется в виде тепловых потерь на активном сопротивлении. На основании закона сохранения энергии величина $W_C = \frac{CU_0^2}{2}$ должна быть равна

$\int\limits_0^\infty ri^2(t)\,dt$. Справедливость этого утверждения нетрудно проверить путем расчета.

Электрическое состояние цепи r, C во время переходного процесса удобно характеризовать значениями напряжения на емкости и его производной по времени. Последняя величина с точностью до постоянного множителя C определяет ток.

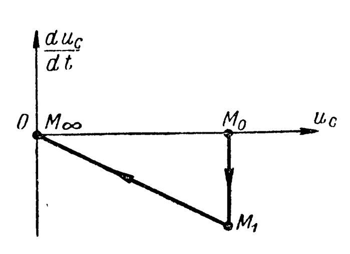


Рис. 8-19. График функции $\frac{du_C}{dt} = f(u_C)$ для переходного процесса в цепи r, C при коротком замыкании.

На рис. 8-19 приводится график зависимости du_C/dt от u_C при разряде конденсатора. Начальное состояние цепи при $t = (0-)$ изображается точкой M_0. В момент короткого замыкания изображающая точка из положения M_0 скачком переходит в положение M_1, а затем начинает двигаться вдоль прямой

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{u_C}{\tau_C},$$

стремясь в пределе к точке M_∞ в начале координат.

Угол наклона прямой к оси абсцисс зависит от величины постоянной времени τ_C. При $\tau_C \to \infty$ прямая совпадает с осью абсцисс.

8-5. Собственные процессы в цепи r, L, C

Переходные процессы в цепи, образованной последовательным соединением элементов r, L, C (рис. 8-20, *а*), как было указано в § 8-2, описываются дифференциальным уравнением (8-1).

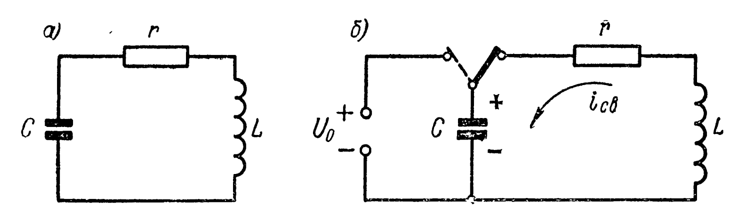


Рис. 8-20. К анализу собственных колебаний в цепи r, L, C.

Если функция внешнего воздействия $e(t)$ при любых $t \geqslant 0$ равна нулю (режим короткого замыкания цепи), то уравнение (8-1) становится однородным:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\alpha\frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0,$$

где

$$\alpha = \frac{r}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Общее решение его имеет вид

$$i(t) = i_{св} = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t}.$$

Здесь p_1 и p_2 — корни характеристического уравнения

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0,$$

определяемые равенством

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \qquad (8\text{-}30)$$

Обозначив

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}, \qquad (8\text{-}31)$$

получим

$$i_{св} = e^{-\alpha t}(Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}). \qquad (8\text{-}32)$$

Для вычисления неизвестных постоянных A и B необходимо использовать начальные условия.

Предположим, что электромагнитная энергия в момент, предшествующий короткому замыканию цепи, полностью сосредоточена в емкости, т. е. конденсатор C при $t = (0-)$ имеет напряжение U_0, а ток в индуктивности $i(0-) = 0$ (рис. 8-20, *б*).

В соответствии с этим можно написать:

$$u_C(0+) = U_0, \qquad (8\text{-}33)$$

$$i_{св}(0+) = i(0-) = 0. \qquad (8\text{-}34)$$

Налагая условие (8-34) на выражение (8-32), находим, что $B = -A$, откуда

$$i_{св} = Ae^{-\alpha t}(e^{\beta t} - e^{-\beta t}). \qquad (8\text{-}35)$$

Согласно условию (8-34) напряжение на активном сопротивлении в начальный момент должно быть равно нулю. Следовательно, при $t = (0+)$ для выбранных условно положительных направлений тока и напряжения (рис. 8-20) на основании второго закона Кирхгофа имеем

$$u_C(0+) + u_L(0+) = 0$$

или с учетом (8-33)

$$u_L(0+) = L\frac{di_{св}(0+)}{dt} = -U_0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{di_{св}(0+)}{dt} = -\frac{1}{L}U_0. \qquad (8\text{-}36)$$

Вычисляя производную тока по времени и используя условие (8-36), будем иметь

$$A = -\frac{U_0}{L(p_1 - p_2)} = -\frac{U_0}{2\beta L}.$$

Таким образом, выражение для собственного тока в контуре окончательно принимает вид

$$i_{св} = -\frac{U_0}{2\beta L}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = -\frac{U_0}{2\beta L}e^{-\alpha t}(e^{\beta t} - e^{-\beta t}). \qquad (8\text{-}37)$$

Напряжение на индуктивности

$$u_L = L\frac{di_{св}}{dt} = -\frac{U_0}{2\beta}(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}). \qquad (8\text{-}38)$$

Наконец, напряжение на емкости при $t \geqslant 0$ есть функция

$$u_C = -u_L - u_r = -u_L - i_{св}r = \frac{U_0}{2\beta}(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}) +$$

$$+\frac{U_0}{2\beta}\cdot\frac{r}{L}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = -\frac{U_0}{2\beta}(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}). \qquad (8\text{-}39)$$

При $t = (0+)$ из (8-39) получаем

$$u_C(0+) = -\frac{U_0}{2\beta}(p_2 - p_1) = -\frac{U_0}{2\beta}(-\alpha - \beta + \alpha - \beta) = U_0.$$

Из формулы (8-31) следует, что коэффициент β может быть как вещественным (при $\alpha \geqslant \omega_0$), так и мнимым (при $\alpha < \omega_0$). В соответствии с этим в контуре могут иметь место два вида собственных процессов.

а) Апериодический процесс

Пусть β — вещественная величина, причем $\alpha > \omega_0$, или в другой форме

$$r > 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\rho, \qquad (8\text{-}40)$$

где ρ — характеристическое сопротивление контура.

Анализ формулы (8-39) показывает, что напряжение на конденсаторе при условии (8-40) непрерывно убывает во времени, стремясь в пределе к нулю. График изменения напряжения приведен на рис. 8-21. Аналогичная кривая для тока, рассчитанная по формуле (8-37), построена на рис. 8-22. Из этих графиков видно, что напряжение и ток в контуре меняются по законам, существенно отличным от колебательного, гармонического.

В теории электрических цепей собственные процессы подобного типа получили наименование апериодических. Как показывает изложенное, они наблюдаются в контурах при наличии достаточно больших потерь.

Характер электрических процессов, возникающих в цепи r, L, C при апериодическом разряде конденсатора, зависит (при неизменной емкости) от величины индуктивности L. С ростом L абсолютные величины корней p_1 и p_2, как следует из выражения (8-30), уменьшаются. Поэтому увеличение индуктивности приводит к за-

медлению разряда конденсатора и снижению скорости нарастания тока до максимального значения. Уменьшение индуктивности, напротив, ускоряет разряд конденсатора. При малых L кривые изменения напряжения u_C и тока в контуре приближаются к графикам, изображенным на рис. 8-18.

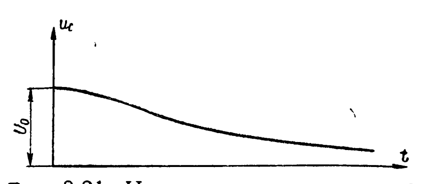


Рис. 8-21. Изменение напряжения на конденсаторе при апериодическом разряде в цепи r, L, C.

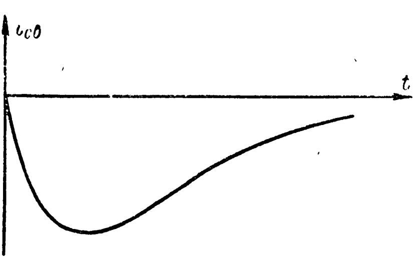


Рис. 8-22. Изменение тока в цепи r, L, C при апериодическом разряде конденсатора.

Предположим далее, что $\alpha = \omega_0$. В этом случае коэффициент β обращается в нуль и корни характеристического уравнения становятся одинаковыми: $p_1 = p_2 = -\alpha$.

Подставляя значения β и p в выражения (8-37) и (8-39) и раскрывая неопределенность вида 0/0 по правилу Лопиталя, будем иметь:

$$i_{св} = -\frac{U_0}{2L} e^{-\alpha t} \lim_{\beta \to 0} \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{\beta} = -\frac{U_0}{L} t e^{-\alpha t},$$

$$u_C = -\frac{U_0}{2} e^{-\alpha t} \lim_{\beta \to 0} \frac{(-\alpha - \beta) e^{\beta t} - (-\alpha + \beta) e^{-\beta t}}{\beta} =$$

$$= U_0 (1 + \alpha t) e^{-\alpha t}.$$

Кривые изменения напряжения на конденсаторе и тока, определяемые полученными равенствами, по виду аналогичны кривым, приведенным на рис. 8-21 и 8-22. На основании этого можно утверждать, что собственные процессы в контуре также имеют апериодический характер, т. е. условие $\alpha = \omega_0$ является предельным условием существования апериодического процесса.

б) Колебательный процесс

Пусть $\alpha < \omega_0$, т. е.

$$r < 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\rho. \qquad (8\text{-}41)$$

Теперь $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = j\omega_c$, и, следовательно, корни характеристического уравнения оказываются комплексными:

$$p_1 = -\alpha + j\omega_c \quad \text{и} \quad p_2 = -\alpha - j\omega_c,$$

причем

$$\omega_c = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r}{2L}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{4\rho^2}}. \qquad (8\text{-}42)$$

Если учесть, что

$$e^{\pm j\omega_c t} = \cos\omega_c t \pm j\sin\omega_c t,$$

то при мнимых β равенство (8-39) принимает вид

$$u_C = -\frac{U_0}{2j\omega_c} e^{-\alpha t}(p_2 e^{j\omega_c t} - p_1 e^{-j\omega_c t}) = \frac{U_0}{\omega_c} e^{-\alpha t}(\alpha\sin\omega_c t + \omega_c\cos\omega_c t) =$$

$$= \frac{\sqrt{\omega_c^2+\alpha^2}}{\omega_c} U_0 e^{-\alpha t}\sin(\omega_c t+\varphi) = \frac{\omega_0}{\omega_c} U_0 e^{-\alpha t}\sin(\omega_c t+\varphi), \quad (8\text{-}43)$$

где

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega_c}{\alpha}.$$

Величина свободного тока в контуре

$$i_{св} = -\frac{U_0}{\omega_c L} e^{-\alpha t}\frac{e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}}{2j} = -\frac{U_0}{\omega_c L} e^{-\alpha t}\sin\omega_c t, \quad (8\text{-}44)$$

а напряжение на индуктивности

$$u_L = L\frac{di_{св}}{dt} = \frac{\omega_0}{\omega_c} U_0 e^{-\alpha t}\sin(\omega_c t - \varphi). \quad (8\text{-}45)$$

Таким образом, ток и напряжение на элементах контура при условии (8-41) изменяются во времени по гармоническому закону, однако амплитуды колебаний с течением времени непрерывно уменьшаются. Затухание колебаний аналитически определяется множителем $e^{-\alpha t}$, поэтому α носит название коэффициента затухания. (Речь идет о затухании во времени, а не в пространстве, как это имело место в теории длинных линий). Физически уменьшение амплитуд собственных колебаний объясняется тем, что с течением времени запас электромагнитной энергии в контуре непрерывно убывает из-за наличия необратимых тепловых потерь. Чем больше активное сопротивление потерь, тем больше величина α, и, следовательно, тем быстрее затухают свободные колебания.

Частота ω_c называется частотой собственных колебаний, или собственной частотой контура. В общем случае она не совпадает с резонансной частотой ω_0.

Сдвиг по фазе между током и напряжениями на индуктивности и емкости контура, определяемый углом φ, зависит от соотношения между частотой ω_c и коэффициентом затухания α.

Если потери в контуре невелики ($r \ll \rho$), то $\omega_c \gg \alpha$ и $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$.

Выражения (8-43) — (8-45) при этом принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} u_C &\approx U_0 e^{-\alpha t} \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = U_0 e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t, \\ i_{св} &= -\frac{U_0}{\rho} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t = \frac{U_0}{\rho} e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \pi), \\ u_L &= U_0 e^{-\alpha t} \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = U_0 e^{-\alpha t} \sin\left(\omega_0 t + \frac{3}{2}\pi\right), \\ \omega_c &\approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \end{aligned}\right\} \qquad (8\text{-}46)$$

Отсюда следует, что напряжение на индуктивности опережает, а напряжение на емкости отстает от тока на угол $\pi/2$.

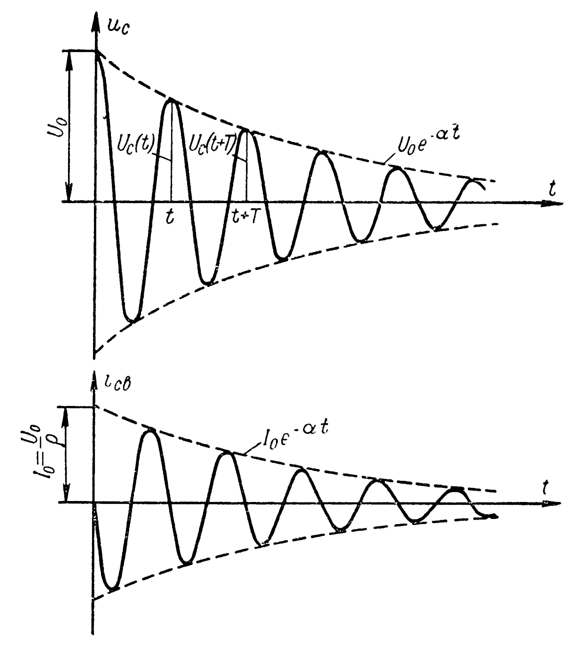


Рис. 8-23. Собственные колебания в контуре (в цепи r, L, C).

Кривые изменения напряжения u_C и тока собственных колебаний в контуре с относительно малыми потерями приведены на рис. 8-23.

Скорость затухания собственных колебаний в контуре можно характеризовать отношением амплитуд напряжения u_C, u_L или тока $i_{св}$ в моменты t и $t + T$, где T — период колебаний (рис. 8-23). Из

выражений (8-43)—(8-45) видно, что отношение соответствующих амплитуд

$$\frac{U_C(t)}{U_C(t+T)}=\frac{U_L(t)}{U_L(t+T)}=\frac{I_{св}(t)}{I_{св}(t+T)}=\frac{e^{-\alpha t}}{e^{-\alpha(t+T)}}=e^{\alpha T}.$$

Натуральный логарифм этого отношения

$$\delta=\alpha T$$

носит наименование логарифмического декремента затухания.

Легко показать, что для контура с малыми потерями

$$\delta=\pi\frac{r}{\sqrt{\frac{L}{C}}}=\pi\frac{r}{\rho}. \tag{8-47}$$

На практике вместо логарифмического декремента обычно используется пропорциональная ему величина

$$d=\frac{\delta}{\pi}=\frac{r}{\rho},$$

которая называется затуханием. Сравнивая выражение для d с формулой (5-20), убеждаемся, что $d=\frac{1}{Q}$.

Промежуток времени, в течение которого амплитуда колебаний в контуре с малыми потерями убывает в e раз, можно рассматривать как постоянную времени $\tau_к$ подобной цепи. Согласно (8-46)

$$\tau_к=\frac{1}{\alpha}=\frac{2L}{r}=2\frac{\omega_0 L}{\omega_0 r}=\frac{2\rho}{\omega_0 r}=\frac{2Q}{\omega_0}. \tag{8-48}$$

Если контур потерь не имеет, запас электромагнитной энергии в нем с течением времени не меняется. В этом случае собственные колебания должны иметь чисто синусоидальный характер. Действительно, из выражений (8-46) следует, что при $r=0$

$$\left.\begin{aligned} i_{св}&=-\frac{U_0}{\rho}\sin\omega_0 t,\\ u_C&=U_0\cos\omega_0 t,\\ u_L&=-U_0\cos\omega_0 t.\end{aligned}\right\} \tag{8-49}$$

Величина энергии электрического и магнитного полей в идеальном контуре определяется соотношениями:

$$w_C=\frac{CU_0^2}{2}\cos^2\omega_0 t,\quad w_L=\frac{Li_{св}^2}{2}=\frac{LU_0^2}{2\rho^2}\sin^2\omega_0 t=\frac{CU_0^2}{2}\sin^2\omega_0 t.$$

Отсюда видно, что при $t=0,\ \frac{T}{2},\ T,\ldots$ энергия, заключенная в конденсаторе, максимальна, а энергия в индуктивности равна нулю.

При $t = \frac{T}{4}, \frac{3}{4}T, \ldots$, наоборот, $w_C = 0$, а $w_L = \frac{CU_0^2}{2}$ достигает максимума. Значит, с энергетической точки зрения процесс собственных колебаний в контуре можно рассматривать как результат непрерывного перераспределения энергии между емкостью и индуктивностью, т. е. между электрическим и магнитными полями.

Анализ собственных процессов проводился в предположении, что начальный запас энергии контура сосредоточен в конденсаторе. Однако исходная энергия в момент замыкания цепи может находиться не в емкости, а в индуктивности или же в обоих реактивных элементах одновременно. В любом из этих трех случаев характер собственных процессов останется одинаковым; отличие между ними будет проявляться лишь в разных начальных значениях собственных токов и напряжений. Так, если энергия была запасена в индуктивности, величина тока в начальный момент времени будет достигать максимума, в то время как при разряде конденсатора начальный ток равен нулю.

Для исследования собственных процессов в контуре можно было бы также использовать дифференциальные уравнения, определяющие заряд или напряжение на конденсаторе. В самом деле, учитывая, что

$$\int i\,dt = q, \quad i = \frac{dq}{dt} \text{ и } \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2},$$

вместо равенства

$$L\frac{di}{dt} + ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = 0$$

будем иметь

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\alpha\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0.$$

Принимая во внимание соотношение $u_C = \frac{q}{C}$, получим для напряжения

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + 2\alpha\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0.$$

По своему виду эти уравнения совпадают с рассмотренным выше дифференциальным уравнением тока.

8-6. Включение колебательного контура на постоянное напряжение

Исследуем переходные процессы, возникающие в цепи r, L, C при включении постоянного напряжения.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (8-1), как известно, имеет вид

$$i = i_{св} + i_в = Ae^{p_1t} + Be^{p_2t} + i_в, \qquad (8\text{-}50)$$

где $i_в$ — вынужденный ток;

p_1 и p_2 — корни характеристического уравнения, определяемые формулой (8-30).

В установившемся режиме величина тока в контуре при постоянном внешнем напряжении U_0 будет равна нулю. Следовательно, вынужденный ток $i_в = 0$, а переходный ток $i = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t}$.

В начальный момент ток в цепи $i(0+)$ и напряжение на конденсаторе $u_C(0+)$, определяющие исходное энергетическое состояние системы, равны нулю. Напряжение на индуктивности в тот же момент

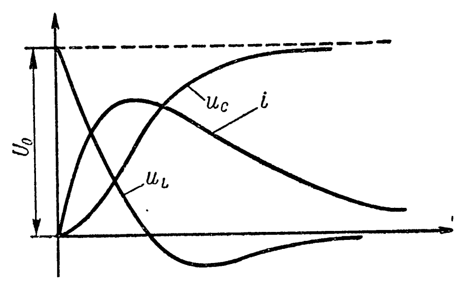


Рис. 8-24. Апериодический процесс в контуре при включении постоянного напряжения.

$$u_L(0+) = L\frac{di(0+)}{dt} = U_0. \tag{8-51}$$

В соответствии с этим начальные условия можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} i(0+) &= 0, \\ \frac{di(0+)}{dt} &= \frac{U_0}{L}. \end{aligned}\right\} \tag{8-52}$$

Подставляя сюда значения тока и его производной, находим, что коэффициенты A и B в (8-50) равны по величине и противоположны по знаку аналогичным коэффициентам, рассчитанным в предыдущем параграфе:

$$A = -B = \frac{U_0}{2\beta L}.$$

В результате для тока в контуре и напряжения на индуктивности будем иметь:

$$i = \frac{U_0}{2\beta L}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}), \tag{8-53}$$

$$u_L = \frac{U_0}{2\beta}(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}). \tag{8-54}$$

Падение напряжения на конденсаторе нетрудно найти на основании второго закона Кирхгофа:

$$u_C = U_0 - u_L - ir = U_0 + \frac{U_0}{2\beta}(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}). \tag{8-55}$$

Переходные процессы в рассматриваемой цепи так же, как и при разряде конденсатора, могут иметь либо апериодический, либо колебательный характер. Исследование выражения (8-55) показывает, что в апериодическом режиме напряжение на конденсаторе при включении источника монотонно возрастает, приближаясь при $t \to \infty$ к значению U_0. Ток в цепи сначала растет, а затем по мере заряда конденсатора начинает падать, стремясь в конце концов

к нулю. Кривые $u_C(t)$ и $i(t)$ изображены на рис. 8-24. На этом же рисунке показана кривая изменения напряжения на индуктивности.

Значительный интерес представляет колебательный процесс, возникающий в контуре при включении постоянного напряжения. Последний, как уже отмечалось, наблюдается, если $\alpha < \omega_0$. Выражения (8-53) — (8-55) в этом случае принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} i &= \frac{U_0}{\omega_c L} e^{-\alpha t} \sin \omega_c t, \\ u_L &= -\frac{\omega_0}{\omega_c} U_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega_c t - \varphi), \\ u_c &= U_0 - \frac{\omega_0}{\omega_c} U_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega_c t + \varphi), \\ \operatorname{tg}\varphi &= \frac{\omega_c}{\alpha}, \qquad \omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (8\text{-}56)$$

На рис. 8-25 построены кривые изменения тока и напряжения на конденсаторе для контура с малыми потерями. Из графика

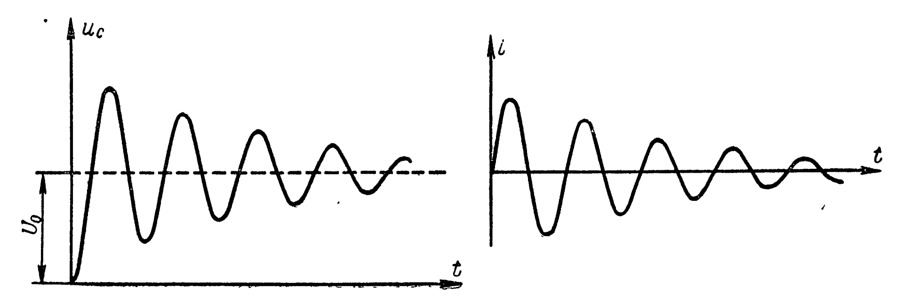


Рис. 8-25. Колебательный процесс в контуре при включении постоянного напряжения.

видно, что контурный ток изменяется во времени аналогично току в режиме собственных колебаний (ср. с рис. 8-23), но имеет обратный знак, а величина напряжения u_C колеблется относительно постоянного напряжения источника. Максимальные значения u_C, как следует из (8-56), не превышают удвоенной величины U_0.

8-7. Включение колебательного контура на переменное (гармоническое) напряжение

Рассмотрим переходные явления, возникающие в контуре при включении источника переменного синусоидального напряжения.

Пусть функция внешнего воздействия при $t \geqslant 0$

$$e(t) = U \cos(\omega t + \psi);$$

ω — угловая частота колебаний. Тогда вынужденный ток в контуре принимает вид

$$i_в = \frac{U}{z}\cos(\omega t + \psi - \varphi) = I_0 \cos(\omega t + \psi - \varphi), \qquad (8\text{-}57)$$

где

$$z = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}.$$

Подставив (8-57) в равенство (8-50), находим, что

$$i = I_0 \cos(\omega t + \psi - \varphi) + Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t}.$$

При включении источника переменной э. д. с. исходное состояние цепи будет определяться начальными условиями

$$\left.\begin{aligned} &i(0+) = 0, \\ &\frac{di(0+)}{dt} = \frac{U}{L}\cos\psi. \end{aligned}\right\} \qquad (8\text{-}58)$$

Физический смысл первого равенства (8-58) очевиден; второе же равенство есть следствие того, что при $t = (0+)$ напряжение на индуктивности должно быть равно внешнему напряжению. В соответствии с этими выражениями имеем:

$$A + B + I_0 \cos(\psi - \varphi) = 0,$$

$$p_1 A + p_2 B - \omega I_0 \sin(\psi - \varphi) = \frac{U}{L}\cos\psi,$$

откуда

$$A = \frac{\omega}{p_1 - p_2} I_0 \sin(\psi - \varphi) + \frac{p_2}{p_1 - p_2} I_0 \cos(\psi - \varphi) + \frac{U}{L(p_1 - p_2)}\cos\psi,$$

$$B = -\frac{\omega}{p_1 - p_2} I_0 \sin(\psi - \varphi) - \frac{p_1}{p_1 - p_2} I_0 \cos(\psi - \varphi) - \frac{U}{L(p_1 - p_2)}\cos\psi.$$

Используя найденные значения A и B, получаем

$$i = I_0 \cos(\omega t + \psi - \varphi) + \frac{I_0}{p_1 - p_2}\cos(\psi - \varphi)(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) +$$
$$+ \frac{U}{L(p_1 - p_2)}\left[\cos\psi + \frac{\omega L}{z}\sin(\psi - \varphi)\right](e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \qquad (8\text{-}59)$$

С точки зрения радиотехнических приложений наибольший интерес представляет исследование переходных явлений колебательного типа, возникающих в контуре при $\alpha < \omega_0$ (см. § 8-5). В этом случае

$$p_1 - p_2 = 2j\omega_c,$$

$$e^{p_1 t} - e^{p_2 t} = e^{-\alpha t}\cdot 2j \sin\omega_c t,$$

$$p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t} = -je^{-\alpha t} 2(\omega_c \cos\omega_c t + \alpha \sin\omega_c t =$$
$$= -j2e^{-\alpha t}\sqrt{\omega_c^2 + \alpha^2}\sin(\omega_c t + \varphi_c) = -j2e^{-\alpha t}\omega_0 \sin(\omega_c t + \varphi_c),$$

и, следовательно,

$$i = I_0 \cos(\omega t + \psi - \varphi) - I_0 \frac{\omega_0}{\omega_c} \cos(\psi - \varphi) \sin(\omega_c t + \varphi_c) +$$

$$+ \frac{U}{\omega L}\left[\cos\psi + \frac{\omega L}{z}\sin(\psi - \varphi)\right] e^{-\alpha t} \sin \omega_c t,$$

$$\varphi_C = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha}.$$

Если потери в цепи малы $\left(\alpha = \frac{r}{2L} \ll \omega_0;\ \omega_c \approx \omega_0 \text{ и } \varphi_C \approx \frac{\pi}{2}\right)$, то

$$i \approx I_0 \cos(\omega t + \psi - \varphi) - I_0 \cos(\psi - \varphi) e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t +$$

$$+ \frac{U}{\omega_0 L}\left[\cos\psi + \frac{\omega L}{z}\sin(\psi - \varphi)\right] e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t. \qquad (8\text{-}60)$$

Анализируя полученное равенство, можно прийти к выводу, что характер переходных процессов в контуре зависит от соотношения между частотой колебаний внешнего воздействия и резонансной частотой.

Предположим, что частота колебаний внешнего напряжения совпадает с резонансной частотой контура, а угол $\psi = -\frac{\pi}{2}$, т. е. напряжение источника в момент включения проходит через нуль. Полагая в равенстве (8-60) $\omega = \omega_0$, $z = r$, $\varphi = 0$ и $\cos\psi = 0$, получим

$$i \approx \frac{U}{r}(1 - e^{-\alpha t}) \sin \omega_0 t. \qquad (8\text{-}61)$$

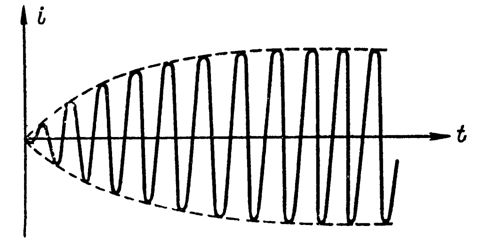


Рис. 8-26. Установление тока в колебательном контуре при включении гармонического напряжения.

Из выражения (8-61) видно, что амплитуда колебаний тока в контуре с течением времени растет по экспоненциальному закону, приближаясь к величине U/r. Кривая установления тока показана на рис. 8-26. [1]

Чтобы иметь представление о скорости нарастания амплитуды колебаний, вычислим производную функции $I(t) = I_0(1 - e^{-\alpha t})$ в начальный момент. Эта производная $\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} = \alpha I_0$. Принимая во внимание соотношение

[1] Можно показать, что закон нарастания амплитуды тока не зависит от угла ψ.

$$\alpha = \frac{r}{2L} = \frac{r}{2\sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{LC}} = \frac{\omega_0}{2Q} = \frac{\Delta\omega_к}{2},$$

где $\Delta\omega_к$ — полоса пропускания контура, находим

$$\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} = \frac{\omega_0}{2Q} I_0 = \frac{\Delta\omega_к}{2} I_0 = \frac{I_0}{\tau_к}, \qquad (8\text{-}62)$$

$\tau_к$ — постоянная времени контура.

Итак, скорость нарастания тока в контуре зависит от полосы пропускания. Чем больше $\Delta\omega_к$ (контур с малой добротностью), тем быстрее растет амплитуда тока и, следовательно, тем быстрее устанавливается стационарный режим. Наоборот, в колебательной системе с узкой полосой пропускания (добротность контура велика) переходные процессы продолжаются длительное время, и амплитуда колебаний тока при включении источника нарастает медленно.

Перейдем к анализу переходных явлений в контуре, когда частота колебаний внешнего воздействия не совпадает с резонансной частотой ω_0. Пусть, как и в предыдущем случае, угол $\psi = \frac{\pi}{2}$.

Выражение для тока в контуре теперь будет иметь вид

$$i = I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \varphi\right) - I_0 \sin\varphi e^{-\alpha t} \cos\omega_0 t + \\ + \frac{\omega}{\omega_0} I_0 \cos\varphi e^{-\alpha t} \sin\omega_0 t.$$

В области малых расстроек (т. е. при $\omega \approx \omega_0$)

$$i \approx I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \varphi\right) + I_0 e^{-\alpha t} (\sin\omega_0 t \cos\varphi - \\ - \cos\omega_0 t \sin\varphi) = -I_0 \sin(\omega t - \varphi) + I_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t - \varphi). \qquad (8\text{-}63)$$

Если контур потерь не имеет ($\alpha = 0$), переходный ток, как вытекает из (8-63), представляет собой совокупность двух гармонических колебаний, имеющих близкие частоты и (приблизительно) равные амплитуды. В результате сложения этих колебаний в цепи возникают так называемые биения:[1]

$$i \approx -I_0 \sin(\omega t - \varphi) + I_0 \sin(\omega_0 t - \varphi) = \\ = -2I_0 \sin\frac{\omega - \omega_0}{2} t \cos\left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t + \varphi\right); \quad \omega > \omega_0.$$

Из найденного выражения следует, что амплитуда тока в контуре медленно изменяется во времени по закону $\left|\sin\frac{\omega - \omega_0}{2} t\right|$, а частота колебаний тока равна $\frac{\omega + \omega_0}{2} \approx \omega$. График функции $i(t)$ показан на рис. 8-27.

[1] Вопрос о сложении двух колебаний разных частот подробнее рассматривается в § 14-10.

Кривая, характеризующая изменение амплитуды колебаний во времени, обычно называется **огибающей**. В рассматриваемом режиме биений огибающая определяется функцией $I(t) = 2I_0 \left| \sin \frac{\omega - \omega_0}{2} t \right|$.

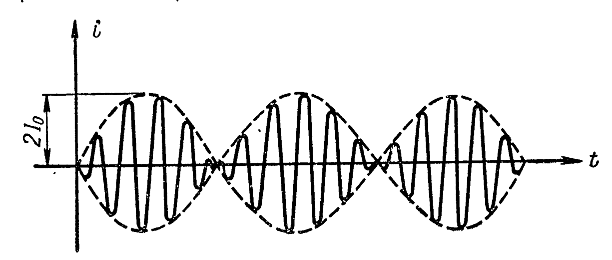


Рис. 8-27. Биения

В реальном колебательном контуре величина свободного тока непрерывно убывает по экспоненциальному закону. Вследствие этого огибающая переходного процесса будет иметь более сложный вид. На рис. 8-28 показан график изменения переходного тока в контуре, рассчитанный по формуле (8-63) при условии, что $\omega - \omega_0 = \Delta\omega > 0$.

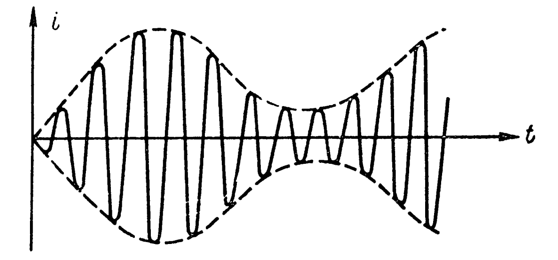


Рис. 8-28. Переходный ток в контуре с потерями при малой расстройке.

Если частота колебаний источника существенно отличается от резонансной частоты контура, характер переходных процессов в цепи изменяется. Пусть, например, $\omega \gg \omega_0$. В этом случае для контура с малыми потерями имеем

$$\varphi \approx \frac{\pi}{2}, \quad z \approx \omega L,$$

и выражение (8-60) принимает вид

$$i \approx I_0 \sin(\omega t - \psi) - I_0 \sin \psi e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t.$$

При $\psi = \frac{\pi}{2}$ ток в контуре будет

$$i \approx I_0 \cos \omega t - I_0 e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t,$$

а напряжение на конденсаторе

$$u_C = \frac{1}{C} \int i\, dt \approx \frac{I_0}{\omega C} \sin \omega t - \frac{I_0}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}\, C} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t.$$

Отсюда следует, что в начальный период, когда $\alpha t \ll 1$, максимальные значения переходного тока в цепи примерно равны удвоенной амплитуде вынужденной составляющей тока. Максимумы переходного напряжения на конденсаторе оказываются значительно больше амплитуды вынужденного напряжения, так как по условию $\frac{\sqrt{\alpha^2+\omega_0^2}}{\omega} \approx \frac{\omega_0}{\omega} \ll 1$. Значит, при включении источника переменного напряжения в контуре может появиться напряжение весьма большой величины (явление перенапряжения). В результате этого возникает опасность электрического пробоя конденсатора или пробоя изоляции катушки.

Предположим, наконец, что $\omega \ll \omega_0$. Теперь $\varphi \approx -\frac{\pi}{2}$, $z \approx \frac{1}{\omega C}$, и для тока в контуре приближенно будем иметь

$$i \approx -I_0 \sin(\omega t + \psi) + I_0 \sin\psi e^{-\alpha t} \cos\omega_0 t + \\ + \frac{U}{\omega_0 L}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \cos\psi e^{-\alpha t} \sin\omega_0 t = \\ = -I_0 \sin(\omega t + \psi) + I_0 \sin\psi e^{-\alpha t} \cos\omega_0 t + \\ + I_0 \frac{\omega_0}{\omega} \cos\psi e^{-\alpha t} \sin\omega_0 t.$$

Полагая $\psi = 0$ (напряжение источника в момент включения проходит через максимум), получим

$$i \approx -I_0 \sin\omega t + I_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\alpha t} \sin\omega_0 t.$$

Из этого равенства видно, что максимальное значение тока в начальный период при $\psi = 0$ во много раз превосходит амплитуду тока в установившемся состоянии, так как в данном случае отношение $\frac{\omega_0}{\omega} \gg 1$. Такой переходный ток в теории электрических цепей получил название сверхтока, или экстратока. При наличии сверхтоков напряжение на конденсаторе

$$u_C \approx \frac{I_0}{\omega C} \cos\omega t - \frac{I_0}{\omega C} e^{-\alpha t} \cos\omega_0 t.$$

Начальные максимумы его приблизительно в два раза больше амплитуды u_C в установившемся состоянии.

8-8. Собственные колебания в системе связанных контуров

Переходные процессы, возникающие в электрических цепях с большим количеством энергоемких элементов, имеют более сложный характер по сравнению с явлениями, рассмотренными в предыдущих параграфах этой главы.

Исследуем, например, собственные процессы в системе двух индуктивно связанных колебательных контуров (рис. 8-29).

Пусть собственный ток в первом контуре равен i_1, а во втором i_2. Для определения их составим уравнения Кирхгофа:

$$\left.\begin{aligned} i_1 r_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1}\int i_1\,dt &= -M\frac{di_2}{dt}, \\ i_2 r_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2}\int i_2\,dt &= -M\frac{di_1}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (8\text{-}64)$$

Здесь величина $-M di_2/dt$, как обычно, представляет собой э. д. с. взаимоиндукции, наводимую током i_2 в первом контуре, а величина $-M di_1/dt$ — э. д. с. взаимоиндукции во втором контуре.

Обозначим в первом уравнении

$$\frac{1}{C_1}\int i_1\,dt = u_{C1} = u_1$$

и во втором

$$\frac{1}{C_2}\int i_2\,dt = u_{C2} = u_2.$$

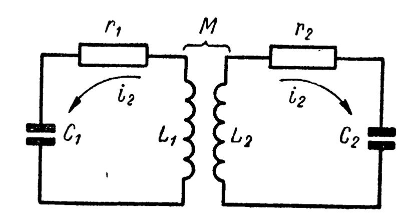


Рис. 8-29. К анализу собственных колебаний в системе связанных контуров.

Тогда, учитывая, что

$$i_1 = C_1\frac{du_1}{dt}, \quad i_2 = C_2\frac{du_2}{dt},$$

$$\frac{di_1}{dt} = C_1\frac{d^2u_1}{dt^2} \quad \text{и} \quad \frac{di_2}{dt} = C_2\frac{d^2u_2}{dt^2},$$

получим систему дифференциальных уравнений с неизвестными u_1 и u_2:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2u_1}{dt^2} + 2\alpha_1\frac{du_1}{dt} + \omega_{01}^2 u_1 &= -k_1\frac{d^2u_2}{dt^2}, \\ \frac{d^2u_2}{dt^2} + 2\alpha_2\frac{du_2}{dt} + \omega_{02}^2 u_2 &= -k_2\frac{d^2u_1}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (8\text{-}65)$$

Здесь

$$\alpha_1 = \frac{r_1}{2L_1}, \quad \alpha_2 = \frac{r_2}{2L_2}, \quad \omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}, \quad \omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}},$$

$$k_1 = \frac{MC_2}{L_1C_1} \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{MC_1}{L_2C_2}.$$

Общее решение уравнений (8-65) оказывается весьма громоздким, поэтому для упрощения дальнейших рассуждений будем полагать, что контуры, во-первых, потерь не имеют ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$) и, во-вторых, резонансные частоты их одинаковы ($\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$). При этих условиях система (8-65) принимает более простой вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2u_1}{dt^2} + \omega_0^2 u_1 &= -k_1\frac{d^2u_2}{dt^2}, \\ \frac{d^2u_2}{dt^2} + \omega_0^2 u_2 &= -k_2\frac{d^2u_1}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (8\text{-}66)$$

Продифференцируем обе части уравнений (8-66) дважды по переменной t:

$$\frac{d^4u_1}{dt^4}+\omega_0^2\frac{d^2u_1}{dt^2}=-k_1\frac{d^4u_2}{dt^4},$$

$$\frac{d^4u_2}{dt^4}+\omega_0^2\frac{d^2u_2}{dt^2}=-k_2\frac{d^4u_1}{dt^4}.$$

Подставляя в первое равенство значение d^4u_2/dt^4 из второго, будем иметь

$$(1-k^2)\frac{d^4u_1}{dt^4}+\omega_0^2\frac{d^2u_1}{dt^2}=k_1\omega_0^2\frac{d^2u_2}{dt^2},$$

где $k=\sqrt{k_1k_2}=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}$ — коэффициент связи.

Определив далее величину $k_1\, d^2u_2/dt^2$ из первого равенства (8-66), получаем дифференциальное уравнение для неизвестной функции u_1:

$$(1-k^2)\frac{d^4u_1}{dt^4}+2\omega_0^2\frac{d^2u_1}{dt^2}+\omega_0^4u_1=0. \qquad (8\text{-}67)$$

Уравнение для функции u_2 выглядит аналогично.

Итак, собственные процессы в рассматриваемой электрической цепи, содержащей четыре реактивных элемента, описываются уравнением четвертого порядка. В общем случае оказывается, что порядок дифференциального уравнения равен числу имеющихся в цепи независимых реактивных элементов, т. е. индуктивностей и емкостей, совокупность которых нельзя заменить эквивалентной индуктивностью или емкостью.

Заметим, что одинаковые по знаку реактивные элементы, соединенные последовательно или параллельно, нельзя считать независимыми в указанном выше смысле, так как их можно заменить либо одной индуктивностью, либо одной емкостью.

Перейдем к решению уравнений, определяющих напряжения u_1 и u_2.

Биквадратное характеристическое уравнение

$$(1-k^2)p^4+2\omega_0^2p^2+\omega_0^4=0$$

имеет корни:

$$p_{1,2}=\pm j\frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}},\quad p_{3,4}=\pm j\frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}.$$

В соответствии с этим

$$u_1=A_1e^{p_1t}+A_2e^{p_2t}+A_3e^{p_3t}+A_4e^{p_4t},$$

или в другой форме записи

$$u_1=A_1e^{j\omega_{\text{I}}t}+A_2e^{-j\omega_{\text{I}}t}+A_3e^{j\omega_{\text{II}}t}+A_4e^{-j\omega_{\text{II}}t}, \qquad (8\text{-}68)$$

где

$$\omega_{\text{I}}=\frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}},\quad \omega_{\text{II}}=\frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}. \qquad (8\text{-}69)$$

Аналогично

$$u_2 = B_1 e^{j\omega_{\rm I} t} + B_2 e^{-j\omega_{\rm I} t} + B_3 e^{j\omega_{\rm II} t} + B_4 e^{-j\omega_{\rm II} t}. \qquad (8\text{-}70)$$

Чтобы установить связь между напряжениями u_1 и u_2, воспользуемся первым уравнением системы (8-66). Подставляя туда значения u_1 и u_2 из (8-68) и (8-70), будем иметь

$$(\omega_0^2 - \omega_{\rm I}^2) A_1 e^{j\omega_{\rm I} t} + (\omega_0^2 - \omega_{\rm I}^2) A_2 e^{-j\omega_{\rm I} t} + (\omega_0^2 - \omega_{\rm II}^2) A_3 e^{j\omega_{\rm II} t} + (\omega_0^2 - \omega_{\rm II}^2) A_4 e^{-j\omega_{\rm II} t} = k_1\omega_{\rm I}^2 B_1 e^{j\omega_{\rm I} t} + k_1\omega_{\rm I}^2 B_2 e^{-j\omega_{\rm I} t} + k_1\omega_{\rm II}^2 B_3 e^{j\omega_{\rm II} t} + k_1\omega_{\rm II}^2 B_4 e^{-j\omega_{\rm II} t}.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых временных функциях, после несложных преобразований получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = k_1 \frac{\omega_{\rm I}^2}{\omega_0^2 - \omega_{\rm I}^2} = \frac{k_1}{\dfrac{\omega_0^2}{\omega_{\rm I}^2} - 1} = \frac{k_1}{k} = \frac{C_2}{C_1}\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}, \\ \frac{A_3}{B_3} = \frac{A_4}{B_4} = k_1 \frac{\omega_{\rm II}^2}{\omega_0^2 - \omega_{\rm II}^2} = \frac{k_1}{\dfrac{\omega_0^2}{\omega_{\rm II}^2} - 1} = -\frac{k_1}{k}. \end{aligned}\right\} \qquad (8\text{-}71)$$

Предположим, что в начальный момент электромагнитная энергия, запасенная в цепи, находится в конденсаторе C_1. В соответствии с этим начальные условия можно написать в виде:

$$u_1(0+) = U_0, \quad u_2(0+) = 0,$$

$$i_1(0+) = C_1 \frac{du_1(0+)}{dt} = 0, \quad i_2(0+) = C_2 \frac{du_2(0+)}{dt} = 0.$$

Здесь U_0 — исходное напряжение на конденсаторе C_1.

Выражения (8-68) и (8-70) и их производные при $t = (0+)$ с учетом (8-71) дают

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = U_0,$$
$$A_1 + A_2 - (A_3 + A_4) = 0;$$
$$\omega_{\rm I} A_1 - \omega_{\rm I} A_2 + \omega_{\rm II} A_3 - \omega_{\rm II} A_4 = 0,$$
$$\omega_{\rm I} A_1 - \omega_{\rm I} A_2 - \omega_{\rm II} A_3 + \omega_{\rm II} A_4 = 0.$$

Из решения найденной системы уравнений следует, что

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = \frac{U_0}{4}.$$

Таким образом, напряжения на конденсаторах C_1 и C_2 окончательно будут

$$u_1 = \frac{U_0}{2} \cdot \frac{e^{j\omega_{\rm I} t} + e^{-j\omega_{\rm I} t}}{2} + \frac{U_0}{2} \cdot \frac{e^{j\omega_{\rm II} t} + e^{-j\omega_{\rm II} t}}{2} = \frac{U_0}{2}(\cos\omega_{\rm I} t + \cos\omega_{\rm II} t) = U_0 \cos\frac{\omega_{\rm II} - \omega_{\rm I}}{2} t \cos\frac{\omega_{\rm II} + \omega_{\rm I}}{2} t,$$

$$u_2 = \frac{U_0}{2} \cdot \frac{k}{k_1}(\cos\omega_{\rm I} t - \cos\omega_{\rm II} t) = \frac{k}{k_1} U_0 \sin\frac{\omega_{\rm II} - \omega_{\rm I}}{2} t \sin\frac{\omega_{\rm II} + \omega_{\rm I}}{2} t.$$

Отсюда видно, что собственные процессы в системе связанных контуров без потерь даже при одинаковых их резонансных частотах характеризуются наличием двух гармонических колебаний с угловыми частотами ω_I и ω_{II}. Последние, как легко заметить, представляют собой обычные частоты связи, определенные в § 4-7.

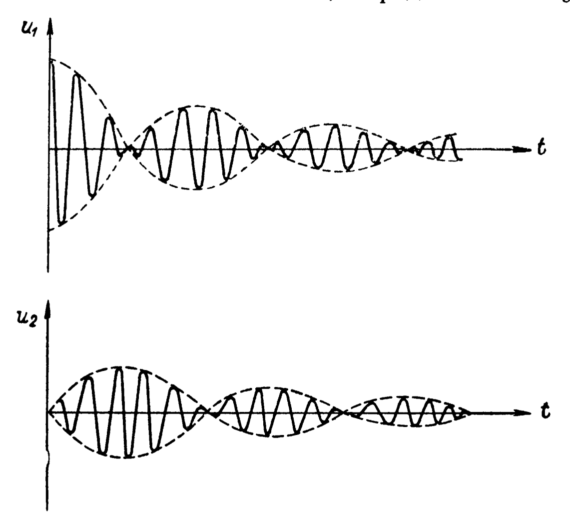


Рис. 8-30. Собственные колебания в связанных контурах.

Если ω_I и ω_{II} отличаются друг от друга незначительно ($k \ll 1$), совокупность гармонических колебаний образует биения. При наличии потерь амплитуды гармонических колебаний в контурах будут экспоненциально затухать во времени. Графики изменения результирующих напряжений u_1 и u_2 в этом случае показаны на рис. 8-30.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

9-1. Принцип суперпозиции в теории переходных процессов

Классический метод анализа переходных процессов, использованный в предыдущей главе, оказывается достаточно эффективным в тех случаях, когда внешнее воздействие имеет сравнительно простой вид. Однако этот метод практически непригоден, если напряжение или ток на входе цепи меняется во времени сложным образом.

Для исследования нестационарных явлений в электрических цепях при произвольном воздействии целесообразно применить принцип суперпозиции подобно тому, как это было сделано в теории несинусоидальных периодических токов (см. главу седьмую).

Идея применения метода наложения в общем случае заключается в следующем. Допустим, что функцию внешнего воздействия $x(t)$ можно представить в виде совокупности каких-то простых, аналитически однотипных функций $x_n(t)$, т. е.

$$x(t)=\sum_n x_n(t).$$

Если отклик исследуемой цепи на воздействие $x_n(t)$ равен известной функции $y_n(t)$, то на основании принципа наложения можно утверждать, что искомый отклик $y(t)$ при воздействии $x(t)$ является суммой откликов $y_n(t)$, т. е.

$$y(t)=\sum_n y_n(t).$$

Очевидно, вид функции $y_n(t)$ при заданном типе элементарного воздействия $x_n(t)$ зависит только от структуры и параметров электрической цепи. Поэтому $y_n(t)$ можно рассматривать как некоторую временную характеристику исследуемой схемы; практически она находится либо из решения соответствующего дифференциального уравнения, либо опытным путем.

Систему функций $x_n(t)$ необходимо выбирать так, чтобы совокупность их позволяла представить любую функцию внешнего

воздействия, имеющую физический смысл. От удачного выбора системы $x_n(t)$ зависит также степень сложности дальнейшего математического анализа электрических процессов.

Ниже рассматриваются различные методы исследования переходных явлений в цепях при произвольном воздействии, которые основываются на изложенной идее [Л.3].

9-2. Метод интеграла наложения (интеграл Дюамеля)

В качестве элементарной функции выберем так называемый единичный скачок, определяемый выражением

$$1(t-\theta)=\begin{cases}0 \text{ при } t<\theta\\ 1 \text{ при } t\geqslant\theta,\end{cases} \tag{9-1}$$

где θ — момент скачка (рис. 9-1).

При воздействии напряжения или тока типа (9-1) на выходе цепи появляется отклик, который согласно § 9-1 можно рассматривать как временную характеристику. Последнюю обычно называют переходной характеристикой, или переходной функцией.

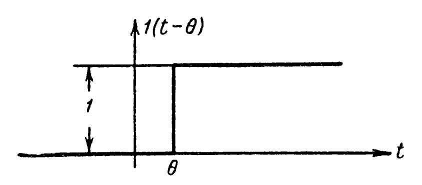


Рис. 9-1. Функция «единичный скачок».

Если внешнее воздействие задано в виде единичного скачка напряжения, а откликом является тоже напряжение на каком-либо элементе цепи, переходная функция оказывается безразмерной, численно равной выходному напряжению. Если же в качестве выходной величины выбирается ток, то переходная функция должна иметь размерность проводимости. В общем случае размерность переходной характеристики равна отношению размерностей выходной и входной величин.

Предположим, что внешнее воздействие задано в виде функции $x(t)$, изображенной на рис. 9-2. Из этого рисунка ясно, что кривую $x(t)$ можно представить как совокупность начального скачка $x(0)\cdot 1(t)$ и множества малых скачков $\Delta x(\theta)\cdot 1(t-\theta)$, последовательно смещаемых во времени на интервал $\Delta\theta$. Подобное представление будет точным, если $\Delta\theta\to d\theta$, а число элементарных скачков растет до ∞.

В соответствии с определением производной величина любого малого скачка

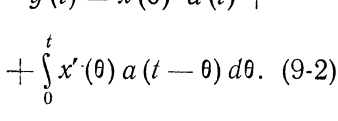
$$\Delta x(\theta)\cdot 1(t-\theta)\approx \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=\theta}\Delta\theta\cdot 1(t-\theta)$$

или в пределе, при $\Delta\theta\to d\theta$,

$$dx(\theta)\cdot 1(t-\theta)=x'(\theta)\,d\theta\cdot 1(t-\theta).$$

Из приведенных выше рассуждений следует, что отклик цепи с известной переходной характеристикой $a(t)$ при внешнем воздействии $x(0)\cdot 1(t)$ будет равен $x(0)\cdot a(t)$. Аналогично, воздействию $\Delta x(\theta)\cdot 1(t-\theta)$ соответствует отклик $\Delta x(\theta)\, a(t-\theta)$, или в пределе — $x'(\theta)\cdot a(t-\theta)d\theta$ (рис. 9-2).

На основании принципа суперпозиции можно утверждать, что результирующий выходной эффект $y(t)$ при воздействии $x(t)$ равен сумме всех откликов, появившихся на выходе цепи за период времени от 0 до t. Полагая, что каждый скачок на входе, за исключением начального, бесконечно мал, получим



$$y(t)=x(0)\cdot a(t)+\int_0^t x'(\theta)\, a(t-\theta)\, d\theta. \quad (9\text{-}2)$$

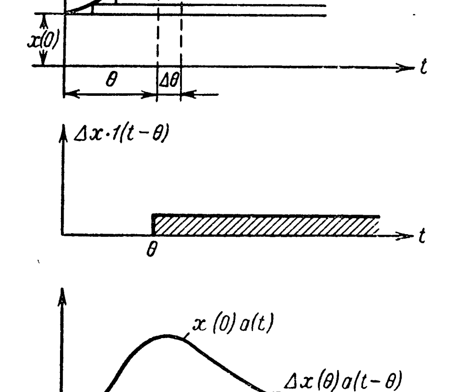


Рис. 9-2. К расчету отклика методом интеграла Дюамеля.

Выражение (9-2) носит название **интеграла Дюамеля**.

Интегрируя второе слагаемое в (9-2) по частям, будем иметь

$$y(t)=x(0)\cdot a(t)+[x(\theta)\cdot a(t-\theta)]_0^t+\int_0^t x(\theta)\cdot a'(t-\theta)\, d\theta=$$

$$=x(t)\cdot a(0)+\int_0^t x(\theta)\cdot a'(t-\theta)\, d\theta. \quad (9\text{-}3)$$

Здесь $a'(t-\theta)$ — производная функции a по ее аргументу. Равенство (9-3) представляет собой другую форму записи интеграла Дюамеля.

Применим изложенную методику к расчету некоторых переходных процессов в цепях r, C и r, L.

а) Цепь r, C при произвольном воздействии (см. рис. 8-14)

Если при воздействии напряжения искомым откликом является напряжение на сопротивлении, переходная характеристика цепи r, C согласно (8-26) должна иметь вид

$$a(t)=a_r(t)=e^{-\frac{t}{\tau_C}},$$

На основании (9-2) можно написать, что выходное напряжение $u_r(t) = y(t)$ при внешнем воздействии $x(t) = u_1(t)$ будет

$$u_r(t) = u_2(t) = u_1(0) e^{-\frac{t}{\tau_C}} + \int_0^t u_1'(\theta) e^{-\frac{t-\theta}{\tau_C}} d\theta, \qquad (9\text{-}4)$$

где τ_C — постоянная времени цепи.

Полученная формула позволяет вычислить отклик цепи при любом воздействии.

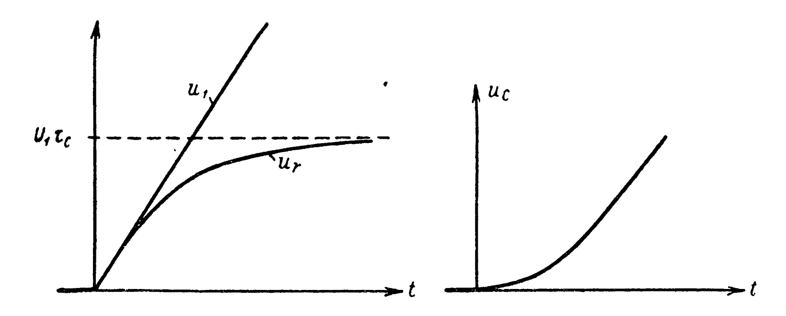


Рис. 9-3. Изменение напряжений на элементах цепи r, C во времени при «линейном» воздействии.

Пусть, например, входное напряжение

$$u_1(t) = U_1 t; \quad U_1 = \text{const}; \quad t \geqslant 0.$$

Используя (9-4) и учитывая, что $u_1'(\theta) = U_1$, находим

$$u_2 = u_1(0) e^{-\frac{t}{\tau_C}} + \int_0^t U_1 e^{-\frac{t-\theta}{\tau_C}} d\theta = U_1 \int_0^t e^{-\frac{t-\theta}{\tau_C}} d\theta =$$

$$= U_1 \tau_C \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right).$$

Кривые изменения напряжений u_1 и $u_2 = u_r$ во времени представлены на рис. 9-3. Из рисунка видно, что для малых t ($t \ll \tau_C$) отклик близок к внешнему воздействию, а при больших t асимптотически приближается к постоянному значению $U_1\tau_C$.

Напряжение на конденсаторе, как обычно, $u_C = u_1 - u_2$. Подставляя сюда значения u_1 и u_2, находим

$$u_C(t) = U_1(t - \tau_C) + U_1 \tau_C e^{-\frac{t}{\tau_C}}.$$

Кривая $u_C(t)$ показана на рис. 9-3.

Напряжение u_C можно также определить по формуле (9-2), если в качестве переходной характеристики использовать функцию $a_C(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}$ [см. выражение (8-25)].

Рассмотрим теперь другой пример. Предположим, что внешнее воздействие задано в виде импульса напряжения прямоугольной формы, и нужно найти напряжения на сопротивлении и емкости.

Прямоугольный импульс на входе цепи, очевидно, можно представить как разность двух одинаковых скачков напряжения (рис. 9-4), смещенных во времени на величину $t_и$, т. е.

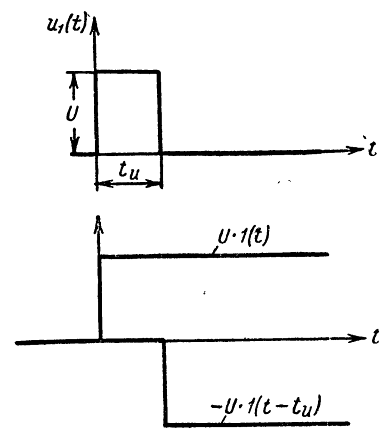


Рис. 9-4. Представление прямоугольного импульса напряжения в виде разности двух скачков.

$$u_1(t) = U \cdot 1(t) - U \cdot 1(t - t_и), \tag{9-5}$$

где U — напряжение скачка (или величина импульсного напряжения);

$t_и$ — продолжительность импульса.

Тогда для напряжения на сопротивлении будем иметь

$$u_r(t) = Ua_r(t) - Ua_r(t - t_и) =$$
$$= Ue^{-\frac{t}{\tau_C}} \cdot 1(t) - Ue^{-\frac{t - t_и}{\tau_C}} \cdot 1(t - t_и).$$

Аналогично напряжение на конденсаторе

$$u_C(t) = Ua_C(t) - Ua_C(t - t_и) =$$
$$= U(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}) \cdot 1(t) - U(1 - e^{-\frac{t - t_и}{\tau_C}}) \cdot 1(t - t_и).$$

Таким образом, расчет выходных величин в этом частном примере удается провести даже без использования интеграла Дюамеля.

На рис. 9-5, *а* изображены графики функций $u_C(t)$ и $u_r(t)$, рассчитанные при условии, что постоянная времени цепи τ_C значительно меньше продолжительности входного импульса $t_и$. Из этих графиков видно, что выходные импульсы напряжения на сопротивлении существенно отличаются по форме от входных импульсов.

На практике аналогичные цепи обычно используются для формирования импульсов малой продолжительности.

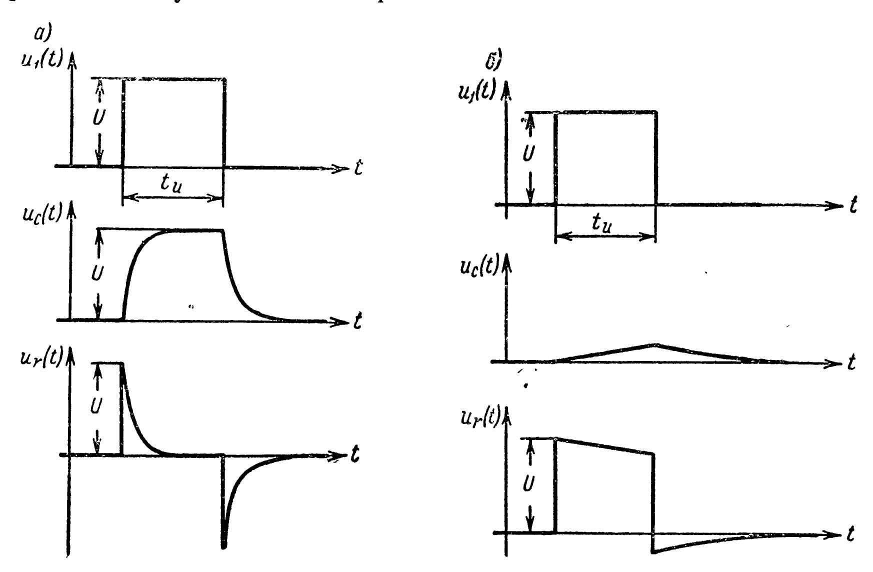


Рис. 9-5. Изменение напряжений на элементах цепи r, C во времени при воздействии прямоугольного импульса напряжения.

Если цепь r, C имеет большую постоянную времени ($\tau_C \gg t_и$), то напряжение на сопротивлении почти не отличается по форме от входного импульса (рис. 9-5, *б*).

б) Цепь r, L при произвольном воздействии

Пусть внешнее воздействие по-прежнему задано в виде напряжения, а откликом является ток.

Переходная характеристика цепи r, L (см. рис. 8-1) согласно формуле (8-12) теперь определяется выражением

$$a(t) = \frac{1}{r}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right).$$

Подставляя значение $a(t)$ в (9-2) и учитывая, что $x(t) = u_1(t)$, а $y(t) = i(t)$, будем иметь

$$i(t) = u_1(0) \cdot a(t) + \int_0^t u_1'(\theta)\left(1 - e^{-\frac{t-\theta}{\tau_L}}\right) d\theta. \qquad (9\text{-}6)$$

Применим равенство (9-6) к расчету тока в цепи при воздействии

$$u_1(t) = U_0 + U_1 t; \quad t \geqslant 0.$$

В этом случае $u_1(0) = U_0$, $u_1'(\theta) = U_1$ и

$$i(t) = \frac{U_0}{r}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right) + \frac{U_1}{r}\int_0^t \left(1 - e^{-\frac{t-\theta}{\tau_L}}\right) d\theta =$$

$$= \frac{U_1}{r} t + \frac{U_0 - U_1\tau_L}{r}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right).$$

Полученное выражение совпадает с формулой (8-22), найденной путем прямого решения дифференциального уравнения цепи r, L.

Напряжение на индуктивности

$$u_L = L\frac{di}{dt} = U_1\tau_L + (U_0 - U_1\tau_L)\, e^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

Такой же результат можно получить, если в качестве переходной характеристики использовать функцию $e^{-\frac{t}{\tau_L}}$, численно равную u_L при воздействии на цепь единичного скачка напряжения, и воспользоваться формулой (9-2).

Сравнивая изложенный расчет с решением, приведенным в § 8-3, п. «г», можно прийти к выводу, что классический метод анализа переходных процессов даже в таком простом случае оказывается значительно сложнее метода интеграла Дюамеля.

9-3. Единичный импульс и импульсная характеристика цепи

Введем в рассмотрение функцию, определяющую прямоугольный импульс продолжительностью Δt и величиной $1/\Delta t$. По аналогии с формулой (9-5) эту функцию аналитически можно записать так:

$$\frac{1(t) - 1(t - \Delta t)}{\Delta t}.$$

Если в данном выражении значение Δt устремить к нулю, получающийся импульс в пределе будет иметь бесконечно малую продолжительность и вместе с тем бесконечно большую величину. В математике функция такого типа носит название δ-ф у н к ц и и и обозначается символом $\delta(t)$.

Итак, по определению

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1(t) - 1(t - \Delta t)}{\Delta t}. \qquad (9\text{-}7)$$

В более общем виде символ $\delta(t - t_0)$ обозначает аналогичную функцию, равную нулю при любых t за исключением $t = t_0$, где она обращается в бесконечность (рис. 9-6).

Величина площади, ограниченной кривой $\delta(t - t_0)$, равна единице. Действительно, интегрирование δ-функции по времени дает

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)\, dt = \lim_{\Delta t \to 0} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} \frac{1}{\Delta t}\, dt = 1. \qquad (9\text{-}8)$$

Используем δ-функцию для анализа переходных процессов, полагая, что внешнее воздействие типа $\delta(t - t_0)$ — так называемый единичный импульс — имеет физический смысл.

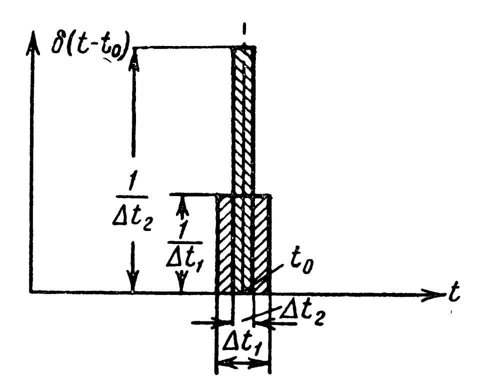


Рис. 9-6. К определению единичного импульса.

При воздействии единичного импульса в исследуемой цепи возникает отклик, описываемый соответствующей временной функцией $h(t)$. Назовем эту функцию импульсной характеристикой цепи. Очевидно, она каким-то образом должна быть связана с переходной характеристикой $a(t)$, так как обе они фактически характеризуют одни и те же свойства системы.

Чтобы выяснить связь между функциями $h(t)$ и $a(t)$, установим вначале связь между единичным импульсом и единичным скачком. Для этого воспользуемся формулой производной функции $f(t)$

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t) - f(t - \Delta t)}{\Delta t}. \qquad (9\text{-}9)$$

Принимая во внимание аналогию между (9-9) и (9-7), убеждаемся, что функцию $\delta(t)$ формально можно рассматривать как производную от единичного скачка, т. е. $\delta(t) = 1'(t)$, или

$$\delta(t - t_0) = 1'(t - t_0).$$

Точно такой же вывод получается в результате дифференцирования по времени функции $f_1(t)$, изображенной на рис. 9-7. В самом деле, вычисляя производную $f_1'(t)$, получим

$$f_1'(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < t < 0, \\ \frac{1}{\Delta t} & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \Delta t, \\ 0 & \text{при } \Delta t < t < \infty, \end{cases}$$

где Δt — продолжительность наклонного участка исходной функции.

Устремив величину Δt к нулю, заметим, что $f_1(t)$ переходит в единичный скачок, а ее производная превращается в δ-функцию.

Предположим, что внешнее воздействие на входе линейной электрической цепи имеет вид единичного скачка. В этом случае отклик ее, как уже отмечалось выше, есть функция $a(t)$ — переходная характеристика. Если, далее, внешнее воздействие представляет собой производную от единичного скачка, т. е. $x(t) = 1'(t) = \delta(t)$, отклик цепи в силу ее линейности, очевидно, должен совпадать с производной функции $a(t)$. Отсюда следует, что *импульсная характеристика системы есть производная по времени ее переходной характеристики*:

$$h(t) = a'(t); \quad t \geqslant 0. \tag{9-10}$$

В том случае, когда функция $a(t)$ при $t = 0$ имеет разрыв, равенство (9-10), полезно преобразовать, так как производная $a'(t)$ в точке $t = 0$ обращается в бесконечность. Для этого разрывную функцию $a(t)$ запишем в виде

$$a(t) = [a(t) - a(0) \cdot 1(t)] + a(0) \cdot 1(t). \tag{9-11}$$

Здесь первое слагаемое $a_1(t) = a(t) - a(0) \cdot 1(t)$ является непрерывной функцией времени, а второе — представляет собой скачок (рис. 9-8). Дифференцируя (9-11) по t, получим

$$h(t) = a'(t) = a_1'(t) + a(0) \cdot \delta(t). \tag{9-12}$$

Рис. 9-7. Функция, линейно нарастающая на интервале Δt.

Из выражений (9-10) и (9-12) видно, что импульсная характеристика является функцией размерной, причем размерность ее равна размерности переходной характеристики, поделенной на время.

Рассмотрим линейную электрическую цепь с переходной характеристикой $a(t)$, полагая, что функция $a(t)$ в точке $t = 0$ разрыва не имеет. При таком условии интеграл Дюамеля (9-3) упрощается:

$$y(t) = \int_0^t x(\theta) \cdot a'(t - \theta)\, d\theta.$$

Подставляя значение производной функции $a(t)$ из выражения (9-10), получим

$$y(t) = \int_0^t x(\theta)\, h(t - \theta)\, d\theta. \tag{9-13}$$

Покажем, что равенство (9-13) справедливо и в тех случаях, когда начальное значение переходной функции отлично от нуля. Действительно, принимая во внимание (9-12), будем иметь

$$\int_0^t x(\theta)\,h(t-\theta)\,d\theta = \int_0^t x(\theta)\,a_1'(t-\theta)\,d\theta + a(0)\int_0^t x(\theta)\,\delta(t-\theta)\,d\theta.$$

Первое слагаемое правой части полученного равенства совпадает с интегралом в выражении (9-3), так как при вычислении производной $a'(t-\theta)$ в последнем точка, где имеет место скачок функции $a(t-\theta)$, исключается из рассмотрения.

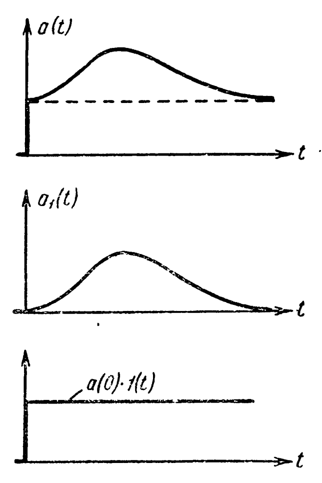


Рис. 9-8. Переходная функция со скачком в начальной точке.

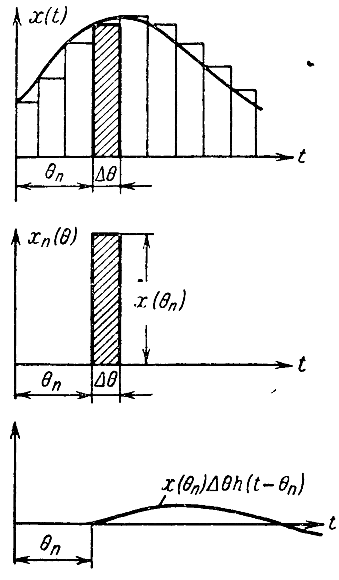


Рис. 9-9. К расчету отклика методом импульсных характеристик.

Во втором слагаемом подынтегральное выражение, содержащее δ-функцию, везде равно нулю, за исключением точки $\theta = t$. Поэтому, учитывая (9-8), можно написать, что

$$a(0)\int_0^t x(\theta)\,\delta(t-\theta)\,d\theta = a(0)\,x(t)\int_{t-\Delta t}^{t}\delta(t-\theta)\,d\theta = a(0)\,x(t).$$

Здесь Δt — величина, стремящаяся к нулю.

Таким образом, в соответствии с (9-3)

$$\int_0^t x(\theta)\,h(t-\theta)\,d\theta = a(0)\,x(t) + \int_0^t x(\theta)\,a'(t-\theta)\,d\theta = y(t).$$

Отсюда следует, что для определения отклика $y(t)$ при внешнем воздействии $x(t)$ вместо переходной характеристики цепи можно использовать импульсную характеристику.

Выясним физический смысл выражения (9-13). Для этого функцию $x(t)$ аппроксимируем последовательностью прямоугольных

импульсов $x_n(\theta)$ малой продолжительности $\Delta\theta$; $n = 0, 1, 2, \dots$ (рис. 9-9). Аналитически каждый импульс можно записать следующим образом:

$$x_n(\theta) = x(\theta_n)[1(t-\theta_n) - 1(t-\theta_n-\Delta\theta)] =$$
$$= x(\theta_n)\Delta\theta\frac{1(t-\theta_n) - 1(t-\theta_{n+1})}{\Delta\theta};$$
$$\theta_n = n\Delta\theta.$$

Так как отклик цепи на элементарное воздействие $\delta(t-\theta_n)$ есть $h(t-\theta_n)$, на основании принципа суперпозиции будем иметь

$$y(t) \approx \sum_{n=0}^{m} x(\theta_n)\Delta\theta h(t-\theta_n); \qquad (9\text{-}14)$$

m — номер импульса, соответствующий моменту t. При стремлении $\Delta\theta$ к нулю (9-14) превращается в интеграл (9-13).

Следовательно, выражение (9-13) представляет собой результат наложения множества элементарных откликов, вызванных импульсными воздействиями $x(\theta)\,d(\theta)$ бесконечно малой продолжительности.

В качестве примера вычислим импульсную характеристику последовательного колебательного контура, полагая, что откликом является ток. В этом случае, как видно из (8-56), переходная функция

$$a(t) = \frac{1}{\omega_c L}e^{-\alpha t}\sin\omega_c t.$$

Используя формулу (9-10), находим

$$h(t) = \frac{1}{\omega_c L}e^{-\alpha t}(\omega_c\cos\omega_c t - \alpha\sin\omega_c t).$$

Для контура с малыми потерями

$$h(t) \approx \frac{1}{L}e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t,$$

так как $\omega_c \approx \omega_0$ и $\alpha \ll \omega_c$.

Переходная и импульсная характеристики рассматриваемой цепи изображены на рис. 9-10.

Предположим далее, что к контуру приложен прямоугольный импульс напряжения, имеющий конечную «амплитуду» U и конечную продолжительность $t_и$.

Величина тока в контуре будет, очевидно, определяться выражением

$$i(t) = Ua(t) - Ua(t-t_и).$$

Подставляя сюда известное значение $a(t)$, получим

$$i(t) = \frac{U}{\omega_c L}[e^{-\alpha t}\sin\omega_c t - e^{-\alpha(t-t_и)}\sin\omega_c(t-t_и)].$$

Если продолжительность импульса мала $\left(t_и \ll T = \frac{2\pi}{\omega_c}\right.$ и $\left.t_и \ll \frac{1}{\alpha} = \tau_к\right)$, то $e^{\alpha t_и} \approx 1$,

$$\sin \omega_c t_и \approx \omega_c t_и \quad \text{и} \quad \cos \omega_c t_и \approx 1;$$

следовательно,

$$i(t) \approx U \frac{t_и}{L} e^{-\alpha t} \cos \omega_c t.$$

Отсюда вытекает, что импульсную характеристику контура практически можно наблюдать при воздействии импульсов с конечной «амплитудой» и конечной (малой) продолжительностью.

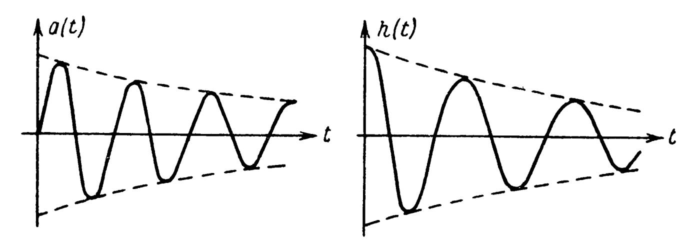


Рис. 9-10. Переходная и импульсная характеристики последовательного колебательного контура.

Этот вывод, разумеется, применим и к другим линейным цепям.

9-4. Интеграл Фурье

Для расчета переходных явлений в линейных электрических цепях, кроме интеграла наложения, можно также использовать метод, распространяющий теорию рядов Фурье на непериодические процессы.

Рассмотрим переход от обычного ряда Фурье к выражениям более общего типа.

Если функция $f(t)$, заданная на интервале $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ (рис. 9-11, *а*), удовлетворяет условиям Дирихле, то согласно (7-12) ее можно представить в виде

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{jn\Omega t}, \tag{9-15}$$

где

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t}\, dt \tag{9-16}$$

— комплексные коэффициенты Фурье;

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{9-17}$$

Из теории рядов Фурье известно, что равенство (9-15) на промежутке $-\infty < t < \infty$ определяет периодическую функцию $f_1(t)$, которая при $-\frac{T}{2} \leqslant t \leqslant \frac{T}{2}$ совпадает с функцией $f(t)$ (рис. 9-11, *б*).

Предположим, что протяженность интервала $\left|-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right|$ растет до бесконечности (рис. 9-11, *в*). Выражения (9-15) — (9-17) в таком случае по-прежнему должны сохранять свой смысл, однако угловая

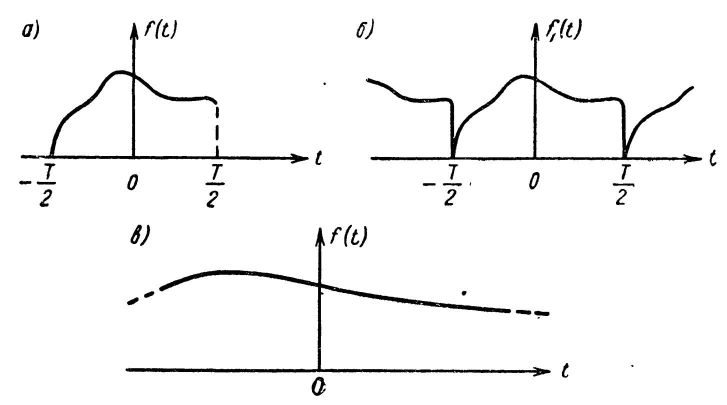


Рис. 9-11. К переходу от ряда к интегралу Фурье.

частота $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ теперь будет стремиться к нулю, и ее придется заменить бесконечно малой величиной $d\omega$. Далее, произведение $n\Omega$ при $T \to \infty$, очевидно, может принимать любые значения и является непрерывной функцией n. Поэтому $n\Omega$ следует рассматривать как текущую частоту ω, изменяющуюся от $-\infty$ до $+\infty$.

С учетом последних соотношений коэффициент A_n для бесконечно большого интервала разложения будет

$$A_n\Big|_{T\to\infty} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-jn\Omega t}\, dt \,\Big|_{T\to\infty} =$$

$$= \frac{d\omega}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \frac{1}{\pi} F(j\omega)\, d\omega,$$

где

$$F(j\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt. \tag{9-18}$$

Отсюда вытекает, что при вычислении $f(t)$ вместо суммирования дискретных значений $\frac{1}{2}A_n e^{jn\Omega t}$ в (9-15) необходимо складывать бесконечно малые величины $\frac{1}{2\pi}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$ с ω, изменяющейся непрерывно. Другими словами, ряд (9-15) превращается в интеграл

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega, \qquad (9\text{-}19)$$

называемый интегралом Фурье.

Выражения (9-18) и (9-19) представляют собой соответственно прямое и обратное преобразования Фурье. В курсе математики доказывается, что эти преобразования имеют смысл при условии, что функция $f(t)$ абсолютно интегрируема, т. е. интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt$ имеет конечное значение.

Итак, из равенства (9-19) видно, что любую абсолютно интегрируемую непериодическую функцию, определенную на интервале $-\infty<t<\infty$, можно представить в виде бесконечного множества гармонических составляющих, частоты которых изменяются от $-\infty$ до $+\infty$.

Совокупность гармоник, как известно, определяет спектр заданной функции $f(t)$. В рассматриваемом случае каждая гармоника имеет бесконечно малую комплексную амплитуду $dA=\frac{1}{\pi}F(j\omega)\,d\omega$. Функция $F(j\omega)$, равная $\pi\frac{dA}{d\omega}$, носит название спектральной плотности. Она характеризует соотношение между комплексными амплитудами гармоник в спектре. Если $f(t)$ отлична от нуля на конечном интервале, спектральная плотность $F(j\omega)$ совпадает со спектральной функцией, определенной в теории рядов Фурье. В этом случае $F(j\omega)$ можно называть, как и в рядах Фурье, спектральной функцией.

Выше уже отмечалось, что частоты гармонических составляющих при $T\to\infty$ меняются непрерывно. Поэтому спектр непериодической функции в отличие от дискретных спектров (см. главу седьмую), называется сплошным.

При изучении спектров следует иметь в виду, что отрицательные частоты в выражении (9-18) никакого физического смысла не имеют. Появились они здесь в связи с тем, что исходный ряд (9-15), а затем и интеграл (9-19) были написаны в комплексной форме.

Объединим равенства (9-18) и (9-19) в одно выражение

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(\theta)\,e^{j\omega(t-\theta)}\,d\theta.$$

Это выражение представляет собой показательную форму интеграла Фурье. Используя далее формулу Эйлера, будем иметь

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(\theta)\cos\omega(t-\theta)\,d\theta+$$
$$+j\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(\theta)\sin\omega(t-\theta)\,d\theta.$$

Так как интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}f(\theta)\sin\omega(t-\theta)\,d\theta$ является нечетной функцией переменной ω, второе слагаемое в последнем выражении равно нулю.

Аналогичный интеграл по переменной θ в первом слагаемом является четной функцией ω, поэтому

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(\theta)\cos\omega(t-\theta)\,d\omega. \qquad (9\text{-}20)$$

Полученное соотношение есть тригонометрическая форма интеграла Фурье.

9-5. Некоторые свойства преобразований Фурье

Спектральная плотность $F(j\omega)$ в интеграле Фурье в общем случае есть функция комплексная. Из выражения (9-18) видно, что

$$F(j\omega)=A(\omega)-jB(\omega)=F(\omega)e^{-j\psi(\omega)}, \qquad (9\text{-}21)$$

где

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,dt; \qquad (9\text{-}22)$$

$$B(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t\,dt. \qquad (9\text{-}23)$$

Модуль спектральной плотности $|F(j\omega)|$ равен

$$F(\omega)=\sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)} \qquad (9\text{-}24)$$

и является четной функцией частоты;

аргумент $$\psi(\omega)=\operatorname{arctg}\frac{B(\omega)}{A(\omega)}, \qquad (9\text{-}25)$$

причем $\psi(-\omega)=-\psi(+\omega)$.

Предположим, что исходная функция $f(t)$ является четной, т. е. $f(t) = f(-t)$. При этом условии $B(\omega) = 0$, и спектральная плотность $F(j\omega)$ оказывается вещественной. Из (9-22) следует, что

$$F(j\omega) = A(\omega) = 2\int_0^\infty f(t)\cos\omega t\,dt. \tag{9-26}$$

Так как $F(\omega) = F(-\omega)$, обратное преобразование Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega t\,d\omega. \tag{9-27}$$

Выражения (9-26) и (9-27) называют к о с и н у с - п р е о б р а з о в а н и я м и Ф у р ь е.

Спектральная плотность нечетной функции является чисто мнимой величиной. Действительно, принимая во внимание, что теперь $f(t) = -f(-t)$, из выражений (9-21), (9-22) и (9-23) получим

$$F(j\omega) = -j\cdot 2\int_0^\infty f(t)\sin\omega t\,dt = -jB(\omega),$$

и

$$f(t) = \frac{j}{\pi}\int_0^\infty F(j\omega)\sin\omega t\,d\omega.$$

Соотношения

$$B(\omega) = 2\int_0^\infty f(t)\sin\omega t\,dt, \tag{9-28}$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega t\,d\omega \tag{9-29}$$

образуют с и н у с - п р е о б р а з о в а н и я Ф у р ь е.

При расчете спектров иногда приходится применять так называемую т е о р е м у з а п а з д ы в а н и я, устанавливающую связь между спектрами двух одинаковых функций, одна из которых смещена во времени на величину t_0 (рис. 9-12). Рассмотрим эту теорему.

Пусть спектральная плотность функции $f_1(t)$ равна $F_1(j\omega)$. Определим спектральную плотность функции $f_2 = f_1(t - t_0)$. Обозначив ее $F_2(j\omega)$, будем иметь

$$F_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t - t_0)\,e^{-j\omega t}dt.$$

Введем новую переменную $\nu = t - t_0$. Тогда

$$F_2(j\omega) = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\nu) e^{-j\omega\nu} d\nu = F_1(j\omega) e^{-j\omega t_0}. \quad (9\text{-}30)$$

Отсюда следует, что запаздывание исходной функции $f(t)$ во времени приводит к изменению аргумента ее спектральной плотности на величину ωt_0, где t_0 — время запаздывания.

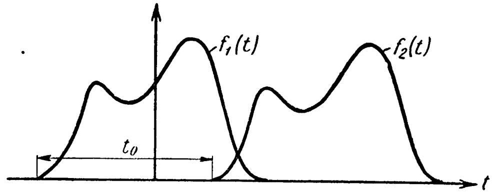


Рис. 9-12. Идентичные функции, смещенные во времени на величину t_0.

В заключение выведем соотношение, аналогичное равенству Парсеваля в теории рядов Фурье. Для этого рассмотрим интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} [F(\omega)]^2 d\omega$, где $F(\omega)$ — модуль спектральной плотности функции $f(t)$.

Так как $[F(\omega)]^2 = \hat{F}(j\omega)\,\hat{F}(j\omega)$ и согласно (9-18)

$$\hat{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{j\omega t} dt, \text{ то}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [F(\omega)]^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right\} d\omega.$$

Меняя в правой части последнего равенства порядок интегрирования по переменным ω и t, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [F(\omega)]^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right\} dt.$$

В результате, учитывая (9-19), а также (9-24), находим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [F(\omega)]^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} [F(\omega)]^2 d\omega. \quad (9\text{-}31)$$

Если функция $f(t)$ имеет размерность тока или напряжения, интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt$ численно равен энергии, расходуемой на активном сопротивлении величиной 1 *ом* за время воздействия. Из равенства (9-31) видно, что выражение $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [F(\omega)]^2 d\omega$ имеет тот же

самый физический смысл. Следовательно, квадрат модуля спектральной плотности, т. е. функция $[F(\omega)]^2 = A^2(\omega) + B^2(\omega)$, характеризует распределение энергии в спектре воздействия $f(t) = x(t)$. Величина $\frac{1}{\pi}[F(\omega)]^2 d\omega$ соответствует энергии гармонических составляющих, находящихся в бесконечно узкой полосе частот $d\omega$.

9-6. Спектры некоторых типовых непериодических функций

а) Спектр одиночного импульса прямоугольной формы

Пусть импульс расположен симметрично относительно начала координат (рис. 9-13). В этом случае функцию $f(t)$ аналитически можно представить в виде

$$f(t)=\begin{cases} 0 \text{ при } -\infty < t < \frac{-t_и}{2}, \\ U \text{ при } \frac{-t_и}{2} \leqslant t \leqslant \frac{t_и}{2}, \\ 0 \text{ при } \frac{t_и}{2} < t < \infty, \end{cases}$$

где $t_и$ — продолжительность импульса.

Так как функция $f(t)$ является четной, для вычисления спектральной плотности целесообразно использовать формулу (9-27). Последняя приводит к следующему результату:

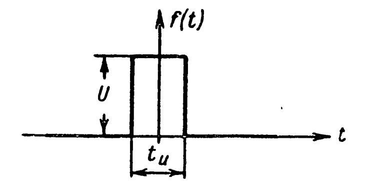


Рис. 9-13. Одиночный импульс прямоугольной формы.

$$F(j\omega) = 2\int_0^{\frac{t_и}{2}} U\cos\omega t\, dt = 2A\frac{\sin\omega t}{\omega}\Bigg|_0^{\frac{t_и}{2}} = 2U\frac{\sin\frac{\omega t_и}{2}}{\omega}. \quad (9\text{-}32)$$

Из выражения (9-32) видно, что $F(\omega)$ обращается в нуль, если $\frac{\omega t_и}{2} = n\pi$; $n = 1, 2, \ldots$ Этому условию соответствуют угловые частоты

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{t_и} \quad (9\text{-}33)$$

или

$$f_n = \frac{n}{t_и}.$$

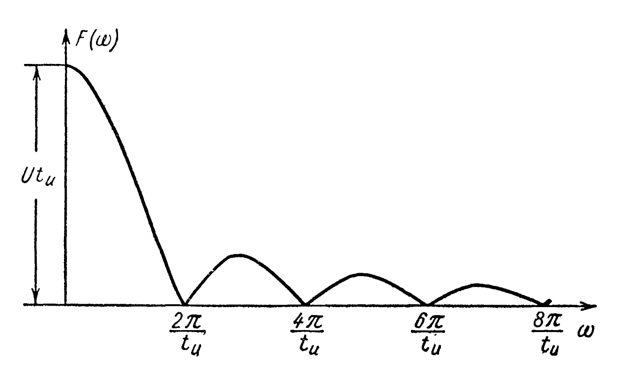


Рис. 9-14. Модуль спектральной плотности прямоугольного импульса.

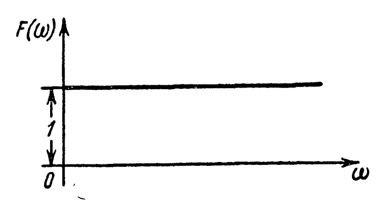


Рис. 9-15. Спектр единичного импульса.

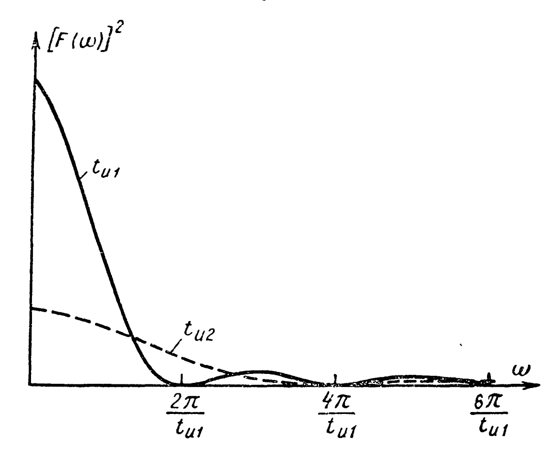


Рис. 9-16. Квадраты модулей спектральной плотности (энергетические спектры) прямоугольных импульсов разной продолжительности.

$$\frac{t_{и2}}{t_{и1}} = \frac{1}{2}.$$

Чтобы вычислить значение $F(\omega)$ в точке $\omega = 0$, необходимо раскрыть неопределенность. После несложных преобразований находим $F(0) = Ut_и$.

График спектра прямоугольного импульса приведен на рис. 9-14.

Как видно из (9-32) и (9-33), характер изменения модуля спектральной плотности существенно зависит от продолжительности импульса. По мере уменьшения величины $t_и$ значения ω_n, при которых функция $F(\omega)$ обращается в нуль, перемещаются по оси частот вправо. Отсюда следует, что при уменьшении длительности импульса спектральная диаграмма его становится более «равномерной».

Если положить $U = \frac{1}{t_и}$, причем $t_и \to 0$, т. е. $f(t) = \delta(t)$, то (9-32) принимает вид

$$F(j\omega) = \lim_{t_и \to 0} \frac{\sin \frac{\omega t_и}{2}}{\frac{\omega t_и}{2}} = 1. \qquad (9\text{-}34)$$

Таким образом, спектральная плотность единичного импульса не зависит от частоты. Другими словами, этот импульс имеет абсолютно равномерный частотный спектр (рис. 9-15).

На рис. 9-16 изображены графики функции $[F(\omega)]^2$, характеризующие распределение энергии в спектрах импульсов при различной продолжительности.

б) Спектр экспоненциально убывающей функции

Вычислим спектр функции

$$f(t) = e^{-\alpha t} \cdot 1(t), \qquad (9\text{-}35)$$

показанной на рис. 9-17. Используя (9-18), получим

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t} \cdot 1(t) e^{-j\omega t} \, dt = \int_{0}^{\infty} e^{(-\alpha - j\omega)t} \, dt =$$

$$= \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = F_1(\omega) + F_2(\omega). \qquad (9\text{-}36)$$

Здесь мы обозначили

$$F_1(\omega) = A(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \text{ и } F_2(\omega) = -jB(\omega) = -j \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}. \qquad (9\text{-}37)$$

Из выражения (9-36) следует, что модуль спектральной плотности функции (9-35)

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}},$$

а аргумент

$$\psi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha}.$$

Скорость убывания модуля $F(\omega)$ зависит от величины коэффициента затухания α. Чем больше коэффициент затухания, тем более равномерным становится спектр. Графики изменения $F(\omega)$ и $\psi(\omega)$ на промежутке $0 \leqslant \omega < \infty$ приведены на рис. 9-18.

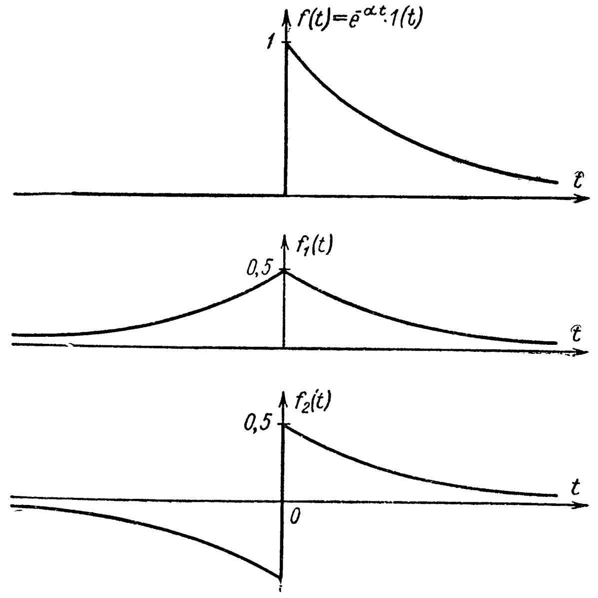


Рис. 9-17. Экспоненциально убывающая функция $f(t) = e^{-\alpha t} \cdot 1(t) = f_1(t) + f_2(t)$.

Покажем, что $F_1(\omega)$ и $F_2(\omega)$ представляют собой спектральные плотности четной функции

$$f_1(t) = \frac{1}{2} e^{-\alpha |t|}$$

и нечетной

$$f_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\alpha t}; & t > 0, \\ -\frac{1}{2} e^{-\alpha |t|}; & t < 0, \end{cases}$$

сумма которых равна $f(t)$ (рис. 9-17).

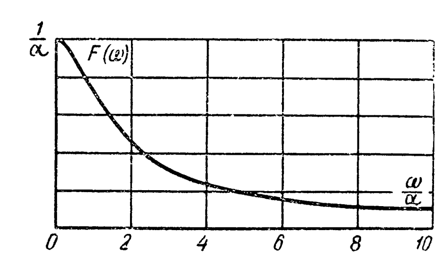
Действительно, используя (9-18) или (9-26), будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \cos \omega t \, dt = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = F_1(\omega).$$

Аналогично

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{-j\omega t} dt = -j \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \sin \omega t \, dt = -j \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = F_2(\omega).$$

Полученные соотношения позволяют найти спектр функции единичного скачка $1(t)$. Заметим, что последняя не удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости, поэтому применить к ней преобразования (9-18) и (9-19) непосредственно не представляется возможным.



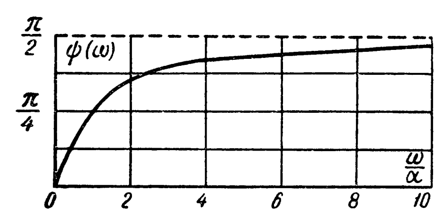


Рис. 9-18. Модуль $F(\omega)$ и аргумент $\psi(\omega)$ спектральной плотности экспоненциально убывающей функции.

Из выражения (9-35) видно, что

$$1(t)=\lim_{\alpha\to 0} e^{-\alpha t}\cdot 1(t)=$$
$$=\lim_{\alpha\to 0}[f_1(t)+f_2(t)]=$$
$$=\frac{1}{2}+\lim_{\alpha\to 0} f_2(t).$$

Представив $f_2(t)$ в виде интеграла Фурье, получим

$$f_2(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}\sin\omega t\,d\omega.$$

Устремляя величину α к нулю, будем иметь

$$\lim_{\alpha\to 0} f_2(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega t}{\omega}\,d\omega.$$

Следовательно,

$$1(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega t}{\omega}\,d\omega. \qquad (9\text{-}38)$$

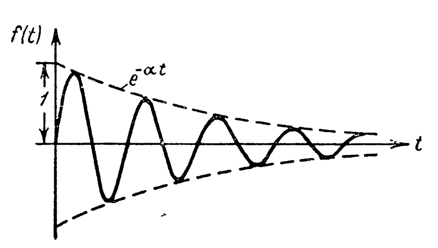


Рис. 9-19. Затухающие колебания.

в) Спектры «гармонических» колебаний с переменными амплитудами

Пусть функция $f(t)$ определяет затухающие колебания: $f(t)=e^{-\alpha t}\sin\omega_{\text{н}}t\cdot 1(t)$ (рис. 9-19).

Спектральная плотность такой функции

$$F(j\omega)=\int_0^\infty e^{-\alpha t}\sin\omega_{\text{н}}te^{-j\omega t}\,dt=\frac{\omega_{\text{н}}}{\omega_{\text{н}}^2+\alpha^2-\omega^2+j\cdot 2\alpha\omega}.$$

Модуль

$$F(\omega)=\frac{\omega_{\text{н}}}{\sqrt{(\omega_{\text{н}}^2+\alpha^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}}=\frac{\omega_{\text{н}}}{\sqrt{(\omega_1^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}},$$

где $\omega_1^2=\omega_{\text{н}}^2+\alpha^2$.

Анализ полученного выражения показывает, что максимумы функции $F(\omega)$ имеют место в точках $\omega=\pm\sqrt{\omega_1^2-2\alpha^2}=\pm\sqrt{\omega_{\text{н}}^2-\alpha^2}$, причем $F_{\text{макс}}(\omega)=$

$= \frac{1}{2\alpha}$. График изменения модуля в зависимости от частоты при $\frac{\omega_н}{\alpha} = 200$ показан на рис. 9-20.

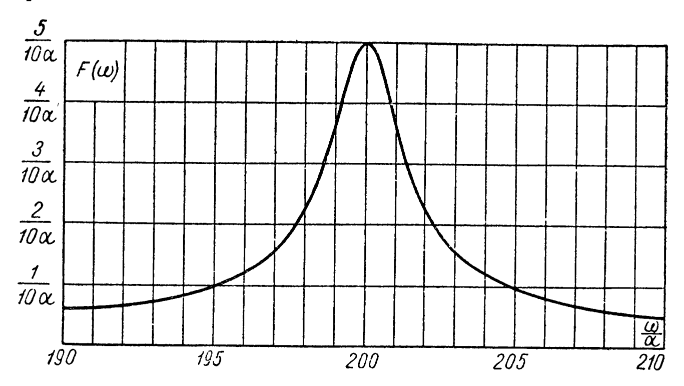


Рис. 9-20. Модуль спектральной плотности затухающих колебаний.

Значительный практический интерес представляет расчет спектра импульса высокочастотных колебаний с прямоугольной огибающей (рис. 9-21).

Так как функция

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } -\infty < t < -\frac{t_и}{2}, \\ I \sin \omega_н t \text{ при } -\frac{t_и}{2} \leqslant t \leqslant \frac{t_и}{2}, \\ 0 \text{ при } \frac{t_и}{2} < t < \infty \end{cases}$$

является нечетной, для определения спектральной плотности импульса можно использовать формулу (9-28). В результате будем иметь

$$B(\omega) = 2 \int_0^{\frac{t_и}{2}} I \sin \omega_н t \sin \omega t \, dt = I \frac{\sin (\omega_н - \omega) \frac{t_и}{2}}{\omega_н - \omega} - I \frac{\sin (\omega_н + \omega) \frac{t_и}{2}}{\omega_н + \omega}. \quad (9\text{-}39)$$

Рис. 9-21. Высокочастотный импульс с огибающей прямоугольной формы.

Если длительность импульса кратна периоду высокочастотных колебаний, т. е. $t_и = mT = m\frac{2\pi}{\omega_н}$ (где $m = 1, 2, 3, \ldots$), формула

(9-39) упрощается. В этом случае $\frac{\omega_н t_и}{2} = m\pi$ и $\frac{\omega t_и}{2} = \frac{\omega}{\omega_н} m\pi$. Следовательно,

$$B(\omega) = -I \frac{\cos m\pi \sin\left(\frac{\omega}{\omega_н} m\pi\right)}{\omega_н - \omega} - I \frac{\cos m\pi \sin\left(\frac{\omega}{\omega_н} m\pi\right)}{\omega_н + \omega} =$$

$$= -2I \frac{\omega_н}{\omega^2 - \omega_н^2} \cos m\pi \sin\left(\frac{\omega}{\omega_н} m\pi\right).$$

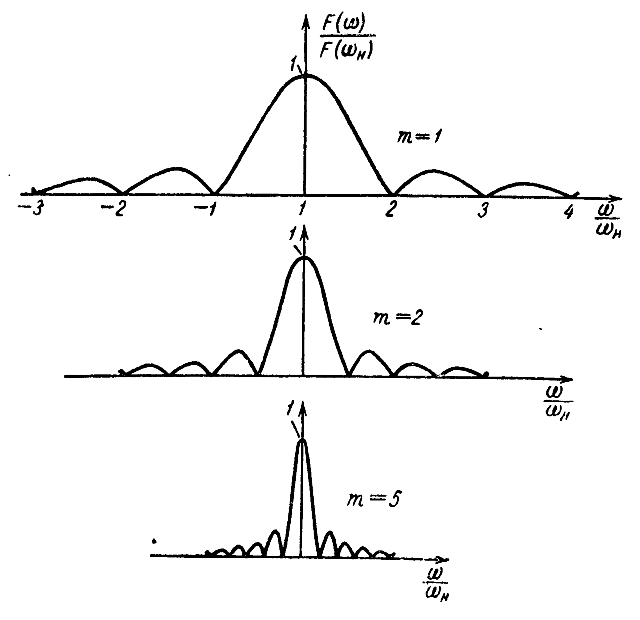


Рис. 9-22. Нормированные модули спектральной плотности высокочастотных импульсов с огибающими прямоугольной формы.

Отсюда

$$F(\omega) = 2I \left| \frac{\omega_н}{\omega^2 - \omega_н^2} \sin\left(\frac{\omega}{\omega_н} m\pi\right) \right|.$$

Если $\omega = \omega_н$, то

$$F(\omega) = I \frac{m\pi}{\omega_н}.$$

В точках, где $\frac{\omega}{\omega_н} m$ — целое число, $F(\omega) = 0$. Величина промежутка между соседними частотами, при которых $F(\omega)$ обращается в нуль, равна $\omega_н/m$. Значит, по мере увеличения числа «волн» в «группе» высокочастотных колебаний при неизменной частоте, т. е. по мере увеличения продолжительности высокочастотного

импульса, спектр функции сжимается. Энергия колебаний в этом случае будет все более и более концентрироваться в окрестностях частоты $\omega_н$.

Графики нормированной спектральной плотности рассматриваемой функции изображены на рис. 9-22.

9-7. Метод интеграла Фурье

Применим интеграл Фурье к расчету откликов в линейных цепях.

Пусть функция $x(t)$, как обычно, характеризует внешнее воздействие. Используя (9-19), запишем $x(t)$ в виде совокупности элементарных гармонических составляющих. Затем, в соответствии с общей методикой, изложенной в § 9-1, определим элементарные отклики dy. Очевидно,

$$dy = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega K(j\omega),$$

где $K(j\omega) = K(\omega)e^{-j\varphi_K(\omega)}$ — частотная характеристика цепи. Тогда на основании принципа суперпозиции результирующий отклик будет

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \qquad (9\text{-}40)$$

Произведение спектральной плотности $F(j\omega)$ воздействия $x(t) = f(t)$ на частотную характеристику системы здесь следует рассматривать как спектральную плотность отклика исследуемой цепи.

В качестве частотной характеристики необходимо выбирать функцию, физический смысл и размерность которой зависит от характера воздействия и отклика. Так, если внешнее воздействие задано в виде напряжения, приложенного к двухполюснику, а откликом является ток, функция $K(j\omega)$ должна быть равна входной проводимости $Y_{вх}(\omega)$ двухполюсника. При расчете напряжения на выходе четырехполюсника по заданному входному напряжению $K(j\omega)$ будет представлять зависимость коэффициента передачи от частоты, т. е. передаточную функцию. Следует также учитывать, что $K(j\omega)$ должна быть определена на интервале $-\infty < \omega < \infty$.

Поясним изложенное примером.

Пусть четырехполюсник имеет коэффициент передачи

$$K(j\omega) = K(\omega) e^{-j\varphi_K(\omega)} = K_0 e^{-j\omega t_0}; \quad -\infty < \omega < \infty, \qquad (9\text{-}41)$$

где t_0 — некоторый постоянный коэффициент с размерностью времени,

Определим напряжение на выходе такого четырехполюсника по заданному входному напряжению. Полагая, что $x(t) = u_1(t)$, а $y(t) = u_2(t)$, в соответствии с (9-39) будем иметь

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) K_0 e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} K_0 \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega.$$

Здесь $F(j\omega)$ — спектральная функция входного напряжения.

На основании теоремы запаздывания [см. (9-30)] можно утверждать, что выражение $F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$ представляет собой спектраль-

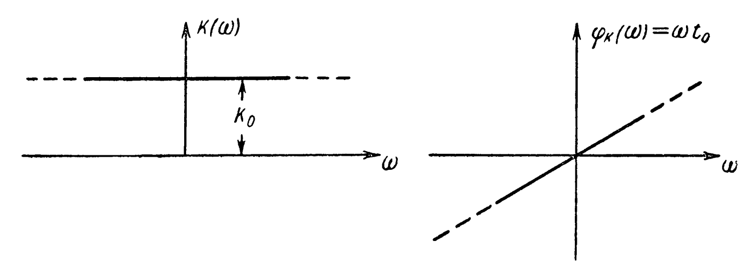


Рис. 9-23. Частотная и фазовая характеристики неискажающего четырехполюсника.

ную плотность функции, сдвинутой во времени относительно функции входного напряжения на интервал t_0, т. е.

$$u_2(t) = K_0 u_1(t - t_0).$$

Таким образом, *четырехполюсник, обладающий в бесконечной полосе частот равномерной частотной и линейной фазовой характеристиками* (рис. 9-23), *осуществляет передачу электрических колебаний без всяких искажений.*

Примером такого четырехполюсника является длинная линия без потерь в режиме бегущих волн. Проведенные в § 6-2 рассуждения показали, что при наличии только прямой (бегущей) волны напряжение в любой точке идеальной линии действительно имеет ту же форму, что и входное напряжение. Величина времени запаздывания, обусловленного конечной скоростью распространения электромагнитных возмущений, $t_0 = \frac{\xi}{v}$, где ξ — координата точки наблюдения и v — фазовая скорость волны.

9-8. Дифференцирующие и интегрирующие цепи

В современных радиотехнических устройствах широко применяются электрические цепи, осуществляющие дифференцирование и интегрирование входных напряжений.

Для изучения свойств таких цепей целесообразно использовать преобразования Фурье. Конечно, речь здесь пойдет о воздействиях, которые могут быть представлены в виде интегралов Фурье. Однако можно показать, что полученные результаты будут справедливы для более широкого класса функций.

а) Дифференцирующие цепи

Выясним условия, при которых линейная цепь будет дифференцировать функцию входного напряжения. Пусть, как обычно, $x(t) = u_1(t)$, а $y(t) = u_2(t)$.

Так как в данном случае функция $u_2(t)$ должна быть равна $K_1 \frac{du_1}{dt}$, где K_1 — постоянный коэффициент с размерностью времени, то, используя (9-40), будем иметь

$$u_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= K_1 \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right\} = K_1 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) j\omega e^{j\omega t} d\omega.$$

Здесь $F(j\omega)$ — спектральная плотность входного напряжения. Из этого равенства видно, что передаточная функция дифференцирующей цепи

$$K(j\omega) = j\omega K_1 = \omega K_1 e^{j\frac{\pi}{2}}. \qquad (9\text{-}42)$$

К сожалению, ни один реальный четырехполюсник не имеет передаточной функции, совпадающей с (9-42). Поэтому в действи-

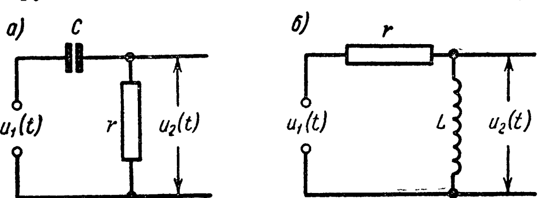


Рис. 9-24. Дифференцирующие цепи.

тельности можно говорить лишь о цепи, осуществляющей приближенное дифференцирование напряжения.

В качестве дифференцирующего элемента на практике обычно используется цепь r, C (рис. 9-24, *а*). Если выходное напряжение снимается с активного сопротивления, передаточная функция такой цепи имеет вид

$$K(j\omega) = \frac{r}{r + \frac{1}{j\omega C}} = j\omega C \frac{r}{1 + j\omega C r}.$$

Предположим, что

$$\omega Cr \ll 1. \tag{9-43}$$

При этом условии $K(j\omega) \approx j\omega rC$, и

$$u_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \approx$$

$$\approx \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) j\omega rCe^{j\omega t} d\omega = rC\frac{du_1}{dt} = \tau_C \frac{du_1}{dt}.$$

Следовательно, падение напряжения u_r на активном сопротивлении оказывается приближенно пропорциональным производной функции входного напряжения [ср. графики функций $u_1(t)$ и $u_2(t) = u_r(t)$, изображенные на рис. 9-5, *а*].

Точность дифференцирования, как показывает изложенное, зависит от степени выполнения неравенства (9-43). Очевидно, последнее выполняется тем точнее, чем меньше постоянная времени цепи и чем ниже частоты гармонических составляющих спектра входного воздействия.

Условию (9-43) можно придать несколько иной вид, если воспользоваться введенной в § 3-4, п. «г» граничной частотой. Согласно (3-133) граничная частота цепи r, C

$$\omega_{гр} = \frac{1}{rC} = \frac{1}{\tau_C}.$$

Поэтому вместо (9-43) получим

$$\omega \ll \omega_{гр}.$$

Из табл. 3-1 видно, что полоса пропускания цепи r, C (отклик снимается с активного сопротивления) включает в себя все частоты, превышающие $\omega_{гр}$. Следовательно, условие $\omega \ll \omega_{гр}$ означает, что при дифференцировании основная часть спектра воздействия должна находиться вне полосы пропускания цепи, т. е. там, где функция $K(\omega)$ почти линейна, а $\varphi_K(\omega) \approx -\frac{\pi}{2}$.

Для импульсных воздействий условие (9-43) эквивалентно неравенству $t_и \gg \tau_C$, где $t_и$ — продолжительность импульса. В самом деле, из анализа спектра импульсов прямоугольной формы (см. § 9-6, п. «а») вытекает, что ширина интервала частот, в пределах которого модуль спектральной плотности имеет еще заметные значения, обратно пропорциональна величине $t_и$. Поэтому вместо (9-43) можно написать $\frac{1}{t_и}Cr \ll 1$ или $t_и \gg \tau_C$. Аналогичные рассуждения справедливы и для импульсов других типов.

Дифференцирование электрических колебаний в принципе можно также осуществить при помощи цепи r, L. Действительно, если

выходное напряжение снимать с индуктивности (рис. 9-24, *б*), передаточная функция будет

$$K(j\omega) = \frac{j\omega L}{r + j\omega L} = \frac{j\omega L}{r} \cdot \frac{1}{1 + j\frac{\omega L}{r}}.$$

При $\frac{\omega L}{r} \ll 1$

$$K(j\omega) \approx j\omega \frac{L}{r} = j\omega\tau_L.$$

Следовательно, функция $K(j\omega)$ цепи r, L с малой постоянной времени на низких частотах приближенно удовлетворяет условию (9-42).

б) Интегрирующие цепи

В интегрирующей цепи выходное напряжение $u_2(t)$ должно быть пропорционально интегралу функции входного напряжения:

$$u_2(t) = K_2 \int u_1(t)\,dt;$$

K_2 — постоянный коэффициент с размерностью, обратной времени.

Аналогично предыдущему примеру представим $u_1(t)$ и $u_2(t)$ в виде интегралов Фурье

$$u_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega,$$

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)\, K(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega.$$

Так как теперь

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi} K_2 \int \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega\, dt = \frac{1}{2\pi} K_2 \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega,$$ [1]

передаточная функция интегрирующей цепи должна иметь вид

$$K(j\omega) = -\frac{1}{j\omega} K_2 = \frac{K_2}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}. \qquad (9\text{-}44)$$

В реальных условиях для интегрирования входного напряжения снова можно применить цепь r, C. Однако в отличие от режима дифференцирования выходное напряжение теперь необходимо снимать с емкости (рис. 9-25, *а*).

Передаточная функция такой цепи

$$K(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{1}{r + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{j\omega r C} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega r C}}.$$

---

[1] Постоянная интегрирования по t выбрана равной нулю.

Если $\omega rC \gg 1$, то

$$K(j\omega) \approx \frac{1}{j\omega rC}.$$

Таким образом, точность интегрирования будет тем выше, чем больше постоянная времени цепи и чем выше частоты гармонических составляющих спектра входного напряжения.

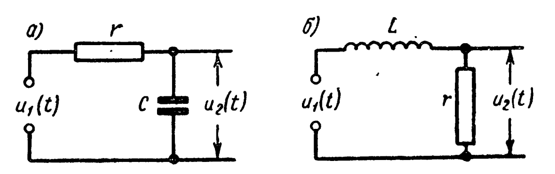


Рис. 9-25. Интегрирующие цепи.

Учитывая, что $rC = \frac{1}{\omega_{гр}}$, условию $\omega rC \gg 1$ можно придать иной вид: $\omega \gg \omega_{гр}$.

Так как выходное напряжение в интегрирующей цепи снимается с емкости, система пропускает колебания с частотами, меньшими чем $\omega_{гр}$, т. е. полоса пропускания интегрирующей цепи находится в интервале частот $0 - \omega_{гр}$ (см. табл. 3-1). Стало быть, условие $\omega \gg \omega_{гр}$ означает, что при интегрировании основная часть спектра входного напряжения должна быть за пределами полосы пропускания цепи. Другими словами, гармонические составляющие воздействия должны занимать ту область частот, в которой $K(\omega)$ изменяется почти обратно пропорционально ω, а $\varphi_K \approx \frac{\pi}{2}$.

Для импульсных воздействий неравенство $\omega rC \gg 1$, очевидно, эквивалентно условию $\tau_C \gg t_и$.

Простейшим примером процесса интегрирования может служить заряд конденсатора в цепи r, C с большой постоянной времени от источника постоянного напряжения. Интеграл постоянной величины по времени, как известно, представляет собой линейную функцию. В рассматриваемом случае напряжение на конденсаторе изменяется по экспоненте, однако начальный участок ее достаточно близок к линейной зависимости.

Интегрирование напряжения в принципе можно также осуществлять при помощи цепи r, L (рис. 9-25, *б*). Передаточная функция ее при условии, что выходное напряжение снимается с активного сопротивления, определяется выражением

$$K(j\omega) = \frac{r}{r + j\omega L} = \frac{r}{j\omega L} \cdot \frac{1}{1 - j\frac{r}{\omega L}}.$$

Если $\frac{r}{\omega L} \ll 1$, то $K(j\omega)$ приближается к (9-44), где следует положить $K_2 = \frac{r}{L}$.

9-9. Связь между частотными и временны́ми характеристиками линейной цепи

Выше было установлено, что для расчета отклика цепи по заданному воздействию необходимо знать либо частотную, либо временну́ю (т. е. переходную или импульсную) характеристики.

Покажем, что между частотными и временны́ми характеристиками системы существует однозначная связь.

Пусть к цепи приложено внешнее воздействие типа единичного скачка. Возникающий отклик, как известно, представляет собой переходную характеристику $a(t)$.

Для вычисления функции $a(t)$ применим интеграл Фурье, полагая, что частотная зависимость $K(j\omega)$ известна.

Из физических соображений ясно, что любая гармоническая составляющая воздействия $1(t)$ в результате прохождения по цепи на выходе будет иметь новую амплитуду и фазу колебаний. Если на входе элементарная гармоника согласно (9-38) была равна $\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega$, то на выходе она принимает вид

$$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin[\omega t-\varphi_K(\omega)]}{\omega}K(\omega)\,d\omega,$$

где $K(\omega)$ — амплитудно-частотная и $\varphi_K(\omega)$ — фазово-частотная характеристики системы.

Отсюда следует, что переходная характеристика цепи

$$a(t)=\frac{1}{2}K(0)+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{K(\omega)}{\omega}\sin[\omega t-\varphi_K(\omega)]\,d\omega \qquad (9\text{-}45)$$

или

$$a(t)=\frac{1}{2}K(0)+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{M(\omega)}{\omega}\sin\omega t\,d\omega-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{N(\omega)}{\omega}\cos\omega t\,d\omega. \qquad (9\text{-}46)$$

Здесь $M(\omega)=K(\omega)\cos\varphi_K$ и $N(\omega)=K(\omega)\sin\varphi_K$ — вещественная и мнимая составляющие $K(j\omega)$, а $K(0)$ — значение модуля функции $K(j\omega)$ при нулевой частоте.

Равенство (9-46) можно преобразовать, учитывая, что при любых $t<0$ переходная характеристика должна быть тождественно равна нулю. В соответствии с этим для $t=-t'$ (где $t'>0$) получим

$$\frac{1}{2}K(0)-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{M(\omega)}{\omega}\sin\omega t'\,d\omega-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{N(\omega)}{\omega}\cos\omega t'\,d\omega=0. \qquad (9\text{-}47)$$

Переменную t' в выражении (9-47) целесообразно обозначить буквой t. Тогда, складывая и вычитая почленно (9-46) и (9-47), будем иметь

$$\left.\begin{aligned} a(t) &= K(0) - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{N(\omega)}{\omega}\cos\omega t\,d\omega \\ \text{и}\qquad a(t) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{M(\omega)}{\omega}\sin\omega t\,d\omega. \end{aligned}\right\} \qquad (9\text{-}48)$$

Соотношения (9-48), таким образом, позволяют рассчитать по известной частотной характеристике цепи ее переходную характеристику. Для определения функции $a(t)$, оказывается, достаточно знать или только вещественную составляющую $K(j\omega)$, или же мнимую ее составляющую и значение $K(0)$.

Из соотношений (9-48) также вытекает, что

$$K(0) - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{N(\omega)}{\omega}\cos\omega t\,d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{M(\omega)}{\omega}\sin\omega t\,d\omega$$

или после дифференцирования равенства по t

$$\int_0^\infty N(\omega)\sin\omega t\,d\omega = \int_0^\infty M(\omega)\cos\omega t\,d\omega; \quad t > 0. \qquad (9\text{-}49)$$

Последнее равенство устанавливает связь между вещественной и мнимой частями функции $K(j\omega)$, т. е., в конечном счете, между частотной и фазовой характеристиками системы. На основании этого можно утверждать, что *в линейной электрической цепи амплитудно-частотные и фазово-частотные характеристики оказываются зависимыми друг от друга*. Значит, любая реально осуществимая (или, как говорят, физически осуществимая) электрическая цепь должна иметь передаточную функцию $K(j\omega)$, вещественная и мнимая составляющие которой удовлетворяют условию (9-49).

Предположим, что на вход цепи подается единичный импульс $\delta(t)$. Откликом цепи в этом случае является импульсная характеристика $h(t)$. Как видно из (9-34) и (9-40),

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} K(j\omega)\,e^{j\omega t}d\omega.$$

Чтобы по известной импульсной характеристике найти передаточную функцию или вообще частотную характеристику, необходимо воспользоваться прямым преобразованием Фурье. Применив (9-18), получим

$$K(j\omega) = \int_0^\infty h(t)\,e^{-j\omega t}dt.$$

Интегрирование здесь осуществляется только по промежутку $0 \leqslant t < \infty$, так как при $t < 0$ функция $h(t) \equiv 0$.

Учитывая далее соотношение (9-12), будем иметь

$$K(j\omega) = a(0) + \int\limits_0^\infty a_1'(t)\, e^{-j\omega t} dt, \tag{9-50}$$

где $a_1(t)$ — переходная характеристика цепи без начального скачка.

Выражение (9-50) дает возможность рассчитать частотную характеристику цепи по заданной переходной характеристике.

Пусть, например, $a(t) = e^{-\frac{t}{\tau_C}}$, где $\tau_C = rC$. В этом случае $a(0) = 1$ и $a_1'(t) = \frac{1}{\tau_C} e^{-\frac{t}{\tau_C}}$. Подставляя значения $a(0)$ и $a_1'(t)$ в (9-50), находим $K(j\omega) = j\omega\tau_C (1 + j\omega\tau_C)^{-1}$. Полученное выражение определяет передаточную функцию цепи, изображенной на рис. 9-24,*a*.

9-10. Преобразование Лапласа

Анализ нестационарных процессов в электрических цепях с помощью интеграла Фурье основан, как уже было показано, на применении спектральных представлений.

Спектральный подход к изучению переходных явлений дает возможность использовать при расчете отклика обычные частотные характеристики цепи, определенные в установившемся режиме. Благодаря этому весь расчет становится физически весьма наглядным.

К сожалению, метод Фурье не является универсальным. Ранее уже неоднократно отмечалось, что преобразование Фурье применимо лишь к функциям, удовлетворяющим условию

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < \infty. \tag{9-51}$$

Если же неравенство (9-51) не выполняется, для вычисления спектра приходится прибегать к искусственным приемам, как это, например, мы сделали при определении спектра функции $1(t)$.

Другой недостаток метода Фурье состоит в том, что его можно применить (по крайней мере, в своем обычном виде) для исследования переходных процессов только в случае нулевых начальных условий, т. е. когда исследуемая цепь не имеет начального запаса энергии. Функция внешнего воздействия при этом должна быть определена на всей оси времени от $-\infty$ до $+\infty$.

Чтобы обобщить преобразование Фурье на более широкий класс функций, поступим следующим образом.

Предположим, что функция $f(t)$, равная нулю при любых $t < 0$, не удовлетворяет условию (9-51). Умножим ее на показательную функцию $e^{-\sigma t}$, где σ — положительное число. Величину σ, очевидно,

всегда можно подобрать так, чтобы $f_1(t) = f(t)e^{-\sigma t}$ была абсолютно интегрируема.

Применим к $f_1(t)$ преобразование Фурье. Согласно (9-18) будем иметь

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\, e^{-j\omega t} dt = \int\limits_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = F(\sigma + j\omega).$$

На основании (9-19)

$$f_1(t) = f(t)\, e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma + j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega.$$

Отсюда видно, что

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma + j\omega)\, e^{(\sigma+j\omega)t} d\omega.$$

Введем подстановку:

$$p = \sigma + j\omega; \quad d\omega = \frac{dp}{j}.$$

Тогда

$$F(p) = \int\limits_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-pt} dt, \tag{9-52}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(p)\, e^{pt} dp. \tag{9-53}$$

Полученные интегралы представляют собой преобразование Лапласа функции $f(t)$. Выражение (9-52) носит название прямого преобразования; оно осуществляет переход от исходной функции $f(t)$ к новой функции $F(p)$, называемой изображением $f(t)$. Выражение (9-53) есть обратное преобразование, оно дает возможность по известному изображению найти соответствующий ему оригинал $f(t)$. Условно эти преобразования записываются в виде $f(t) \div F(p)$.

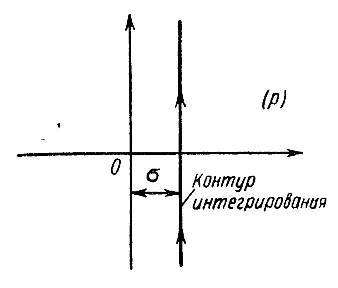


Рис. 9-26. Контур интегрирования в комплексной плоскости p.

Изложенные рассуждения позволяют утверждать, что преобразование Лапласа в отличие от интеграла Фурье применимо к функциям, не удовлетворяющим условию (9-51).

При вычислении $f(t)$ по заданному изображению $F(p)$ выражение (9-53) следует рассматривать как интеграл в плоскости комплексного переменного p, причем интегрирование происходит по прямой,

параллельной мнимой оси (рис. 9-26). Однако изображения многих типовых функций, встречающихся в теории электрических колебаний, давно уже рассчитаны. Поэтому для определения временны́х зависимостей в ряде случаев к интегрированию в плоскости комплексного переменного можно не прибегать, а использовать готовые результаты, данные в таблицах.

Приведем несколько примеров прямого преобразования Лапласа.

Пусть функция $f(t) = 1(t)$. Преобразование (9-54) в этом случае дает

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} dt = \frac{1}{p}.$$

Следовательно,

$$1(t) \div \frac{1}{p}. \tag{9-54}$$

Если $f(t) = e^{\alpha t} \cdot 1(t)$, то

$$F(p) = \int_0^\infty e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \left. \frac{e^{(\alpha-p)t}}{\alpha - p} \right|_0^\infty.$$

Так как $p = \sigma + j\omega$, где σ — произвольное положительное число, то подбирая σ, всегда можно удовлетворить неравенству $\sigma > \alpha$. При этом условии

$$F(p) = \frac{1}{p - \alpha}. \tag{9-55}$$

Для δ-функции

$$F(p) = \int_0^\infty \delta(t - t_0) e^{-pt} dt = e^{-pt_0}. \tag{9-56}$$

Изображения функций, наиболее употребительных в теории электрических цепей, даны в табл. 9-1.

Преобразования Лапласа лежат в основе так называемого о п е р а т о р н о г о м е т о д а решения линейных дифференциальных уравнений. В практику расчета переходных процессов этот метод был введен английским инженером Хевисайдом в конце прошлого века. Однако операторные соотношения, примененные Хевисайдом, не имели строгого математического обоснования, поэтому возможность их использования у многих исследователей вызывала сомнение. Строгое доказательство корректности операторного метода и его дальнейшее развитие было дано позднее в работах Д. Г. Карсона, Ван-дер-Поля, А. М. Данилевского и других ученых.

Таблица 9-1

Изображения некоторых типовых функций

$F(p)$ (изображение функции)	$f(t)$ (оригинал)	$F(p)$ (изображение функции)	$f(t)$ (оригинал)
$U\frac{1}{p}$	$U\cdot 1(t)$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega_н^2}$	$e^{-\alpha t}\cos\omega_н t\cdot 1(t)$
$U\frac{1}{p}e^{-t_0 p}$	$U\cdot 1(t-t_0)$	$\frac{p\sin\psi+\omega_н\cos\psi}{p^2+\omega_н^2}$	$\sin(\omega_н t+\psi)\cdot 1(t)$
$\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha t}\cdot 1(t)$	$\frac{p\cos\psi-\omega_н\sin\psi}{p^2+\omega_н^2}$	$\cos(\omega_н t+\psi)\cdot 1(t)$
$\frac{\omega}{p^2+\omega_н^2}$	$\sin\omega_н t\cdot 1(t)$	$\frac{1}{p^2}$	$t\cdot 1(t)$
$\frac{p}{p^2+\omega_н^2}$	$\cos\omega_н t\cdot 1(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	t^n (n — целое положительное число)
$\frac{\omega_н}{(p+\alpha)^2+\omega_н^2}$	$e^{-\alpha t}\sin\omega_н t\cdot 1(t)$		

Сущность операторного метода состоит в том, что исходные дифференциальные или интегро-дифференциальные уравнения заменяются соответствующими уравнениями относительно изображений искомых функций. Из решения последних находятся изображения, а затем при помощи обратного преобразования Лапласа — оригиналы.

9-11. Некоторые свойства преобразований Лапласа

Прежде чем перейти к решению дифференциальных уравнений линейных цепей операторным методом, рассмотрим некоторые свойства преобразования Лапласа.

Пусть $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t)$. Применив к этому равенству преобразование (9-52), будем иметь

$$f(t) \div F(p) = F_1(p) + F_2(p) + \dots + F_n(p), \qquad (9\text{-}57)$$

где

$$f_1(t) \div F_1(p); \quad f_2(t) \div F_2(p); \quad \dots f_n(t) \div F_n(p).$$

Если функция $f(t) = Af_1(t)$, A — постоянное число и изображение $f_1(t)$ равно $F_1(p)$, из (9-52) следует, что

$$f(t) \div F(p) = AF_1(p). \qquad (9\text{-}58)$$

Изображение производной. Найдем изображение функции $\varphi(t) = f'(t)$.

В рассматриваемом случае прямое преобразование Лапласа имеет вид

$$\varphi(t) \div \int_0^\infty f'(t)\, e^{-pt} dt.$$

Интегрируя последнее выражение по частям, получим

$$\int_0^\infty f'(t)\, e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-pt} df(t) = f(t)\, e^{-pt} \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} dt.$$

Так как $\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = F(p)$ представляет собой изображение функции $f(t)$, а $f(t)\, e^{-pt}\,|_{t \to \infty} = 0$, то

$$f'(t) \div pF(p) - f(0). \tag{9-59}$$

Аналогично выводится соотношение для второй производной функции $f(t)$

$$f''(t) \div p^2 F(p) - pf(0) - f'(0).$$

Для n-й производной

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0). \tag{9-60}$$

При нулевых начальных условиях, когда $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0)$, равенства (9-59) и (9-61) упрощаются:

$$\frac{df}{dt} = f'(t) \div pF(p); \tag{9-61}$$

$$\frac{d^n f}{dt^n} = f^{(n)}(t) \div p^n F(p). \tag{9-62}$$

В этом случае величину p можно рассматривать как оператор, умножение которого на изображение исходной функции дает изображение ее производной.

Изображение интеграла. Предположим, что $\varphi(t) = \int f(t)\, dt$, т. е. $\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(t)$.

Тогда

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} dt = \int_0^\infty \frac{d\varphi}{dt}\, e^{-pt}\, dt = \int_0^\infty e^{-pt} d\varphi.$$

Интегрируя по частям, получим

$$F(p) = e^{-pt} \varphi(t) \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty \varphi(t)\, e^{-pt} dt.$$

Так как $\lim_{t \to \infty} e^{-pt} \varphi(t) = 0$,

$$F(p) = -\varphi(0) + p \int_0^\infty \varphi(t)\, e^{-pt} dt.$$

Учитывая, что интеграл $\int\limits_0^\infty \varphi(t)e^{-pt}dt$ есть изображение функции $\varphi(t)$, окончательно будем иметь

$$\varphi(t) = \int f(t)\,dt \div \frac{F(p)}{p} + \frac{\varphi(0)}{p}. \qquad (9\text{-}63)$$

Если значение $\varphi(0)$ равно нулю, то

$$\varphi(t) \div \frac{F(p)}{p}. \qquad (9\text{-}64)$$

Здесь, как и в предыдущем случае [см. (9-61)], переменную p можно считать оператором, ибо интегрирование исходной функции $f(t)$ по времени соответствует делению ее изображения на p.

Указанные свойства p дают основание рассматриваемый ниже способ решения дифференциальных уравнений назвать операторным.

9-12. Теорема разложения

Для определения функции $f(t)$ по известному ее изображению в ряде случаев полезно применить так называемую теорему разложения, сформулированную Хевисайдом.

Пусть изображение $f(t)$ имеет вид рациональной дроби, т. е.

$$f(t) \div F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)},$$

где $F_1(p)$ и $F_2(p)$ — степенные полиномы, причем степень полинома $F_1(p)$ меньше степени $F_2(p)$.

Если уравнение $F_2(p) = 0$ имеет n различных корней p_1, p_2, p_3, ..., p_n, функцию $F(p)$ можно представить суммой:

$$F(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{p - p_i}, \qquad (9\text{-}65)$$

где B_i — постоянные коэффициенты.

Чтобы найти B_i, умножим обе части (9-65) на $p - p_k$:

$$(p - p_k)F(p) = (p - p_k)\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{p - p_i}.$$

При $p = p_k$ слагаемые в правой части этого равенства обращаются в нуль. Исключение составляет лишь член $(p - p_k)\dfrac{B_k}{p - p_k} = B_k$, который, очевидно, будет

$$B_k = \lim_{p \to p_k} (p - p_k)F(p) = \lim_{p \to p_k} (p - p_k)\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}.$$

Подставляя значение $B_k = B_i$ в (9-65), получим

$$F(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_1(p_i)}{F_2'(p_i)} \cdot \frac{1}{p - p_i}. \qquad (9\text{-}66)$$

Чтобы найти функцию $f(t)$ по изображению (9-66), необходимо сначала определить оригинал функции $(p - p_i)^{-1}$. Из формулы (9-55) видно, что изображению $(p - p_i)^{-1}$ соответствует экспонента $e^{p_i t}$. Следовательно,

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_1(p_i)}{F_2'(p_i)} e^{p_i t},$$

и окончательно

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_1(p_i)}{F_2'(p_i)} e^{p_i t} \div \sum_{i=1}^{n} \frac{F_1(p_i)}{F_2'(p_i)} \cdot \frac{1}{p - p_i}. \qquad (9\text{-}67)$$

Таким образом, теорема разложения (9-67) позволяет представить искомую функцию $f(t)$ в виде совокупности n экспоненциальных функций (на интервале $-\infty < t \leqslant 0$, разумеется, $f(t) \equiv 0$).

Если один из корней уравнения $F_2(p) = 0$ равен нулю, то формулу (9-67) можно преобразовать. Для этого обозначим $F_2(p) = p\Phi(p)$, где $\Phi(p)$ — полином, не имеющий нулевых корней. Выделим в разложении (9-66) слагаемое, соответствующее нулевому корню, учитывая что теперь $F_2'(p) = \Phi(p) + p\Phi'(p)$. Тогда

$$F(p) = \frac{F_1(0)}{\Phi(0)} \cdot \frac{1}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{F_1(p_i)}{p_i \Phi'(p_i)} \cdot \frac{1}{p - p_i}.$$

Принимая во внимание (9-54), получим

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{\Phi(0)} \cdot 1(t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{F_1(p_i)}{p_i \Phi'(p_i)} e^{p_i t}. \qquad (9\text{-}68)$$

Здесь p_i — корни уравнения $\Phi(p) = 0$, а n — число этих корней.

В том случае когда полином $F_2(p)$ имеет кратные корни, теорема разложения усложняется. Формула для $f(t)$ получается довольно громоздкой и здесь не приводится.

9-13. Расчет переходных процессов в цепях операторным методом

Применим операторный метод решения дифференциальных уравнений к расчету переходных процессов в линейных цепях. Рассмотрим, например, уравнение Кирхгофа для последовательного контура

$$L\frac{di}{dt} + ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = e(t). \qquad (9\text{-}69)$$

Чтобы перейти от этого уравнения к равенству, связывающему изображения функций $i(t)$ и $e(t)$, преобразуем обе части (9-69) по Лапласу. Пусть $i(t) \div I(p)$ и $e(t) \div E(p)$. Так как на основании соотношений, приведенных в предыдущем параграфе,

$$\frac{di}{dt} \div pI(p) - i(0) \quad \text{и} \quad Cu_C = \int i\,dt \div \frac{I(p)}{p} + \frac{Cu_C(0)}{p},$$

преобразование исходного уравнения дает

$$I(p)\left(r + pL + \frac{1}{pL}\right) = E(p) + Li(0) - \frac{u_C(0)}{p}. \qquad (9\text{-}70)$$

Полученное равенство является линейным алгебраическим уравнением с неизвестной функцией $I(p)$. Величины $i(0)$ и $u_C(0)$ в правой части его представляют собой начальные значения тока в цепи и напряжения на емкости.

Отсюда видно, что операторный метод расчета переходных процессов автоматически учитывает начальные условия, характеризующие исходное энергетическое состояние цепи. В этом проявляется одно из очевидных достоинств его по сравнению с методом Фурье.

Из выражения (9-70) следует, что

$$I(p) = \frac{E(p) + Li(0) - \dfrac{u_C(0)}{p}}{Z(p)}, \qquad (9\text{-}71)$$

где

$$Z(p) = r + pL + \frac{1}{pC}. \qquad (9\text{-}72)$$

Если начальный запас энергии в цепи равен нулю, то $i(0) = 0$, $u_C(0) = 0$, и

$$I(p) = \frac{E(p)}{Z(p)}. \qquad (9\text{-}73)$$

Равенство (9-73) по своему виду аналогично соотношению, определяющему комплексную амплитуду тока в контуре для установившегося режима. На основании этой аналогии величина $Z(p)$, имеющая размерность сопротивления, получила название о п е р а т о р н о г о с о п р о т и в л е н и я. Последнее, как видно из (9-72), имеет ту же структуру, что и комплексное сопротивление контура. Действительно, при замене в формуле (9-72) p на $j\omega$ она превращается в хорошо известное выражение

$$Z(j\omega) = r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}.$$

Значения $x_L(p) = pL$ и $x_C(p) = \frac{1}{pC}$, входящие в $Z(p)$, представляют собой о п е р а т о р н ы е с о п р о т и в л е н и я и н д у к т и в н о с т и и е м к о с т и.

Величина, обратная сопротивлению $Z(p)$, носит название о п е р а т о р н о й п р о в о д и м о с т и $Y(p)$.

Чтобы найти зависимость $i(t)$, необходимо задаться конкретным видом функции внешнего воздействия $e(t)$.

Пусть, например, $e(t) = U_0 \cdot 1(t)$.

Изображение этой функции согласно (9-54) есть $E(p) = \frac{U_0}{p}$. Следовательно, при $i(0) = 0$ и $u_C(0) = 0$

$$I(p) = \frac{U_0}{pZ(p)}.$$

Обозначим корни уравнения $pZ(p) = p^2L + pr + \frac{1}{C} = 0$, как обычно, символами p_1 и p_2. Тогда

$$pZ(p) = L\left(p^2 + \frac{r}{L}p + \frac{1}{LC}\right) = L(p - p_1)(p - p_2).$$

Разложим $I(p)$ по формуле (9-66):

$$I(p) = \frac{U_0}{L(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{U_0}{L} \cdot \frac{1}{\left(2p_1 + \frac{r}{L}\right)(p - p_1)} +$$

$$+ \frac{U_0}{L} \cdot \frac{1}{\left(2p_2 + \frac{r}{L}\right)(p - p_2)}$$

или с учетом (8-30)

$$I(p) = \frac{U_0}{2L} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\,(p - p_1)} - \frac{U_0}{2L} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\,(p - p_2)},$$

где $$\alpha = \frac{r}{2L}; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

В результате, используя теорему (9-67), будем иметь

$$i(t) = \frac{U_0}{2L\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}} e^{p_1 t} - \frac{U_0}{2L\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}} e^{p_2 t}.$$

Полученное выражение совпадает с (8-53).

Равенство (9-73) при нулевых начальных условиях справедливо не только для последовательного контура, но и для любого линейного двухполюсника с входным операторным сопротивлением $Z(p)$.

Если исследуемая цепь представляет собой четырехполюсник, операторный метод (при нулевых начальных условиях) дает

$$U_2(p) = U_1(p)\,K(p).$$

Здесь $U_1(p)$ — изображение воздействия;
$U_2(p)$ — изображение отклика;
$K(p)$ — операторная передаточная функция четырехполюсника.

Конкретные аналитические выражения функции $Z(p)$ или $K(p)$ легко получаются из выражений $Z_{вх}(j\omega)$ или $K(j\omega)$ путем замены переменной $j\omega$ на p.

9-14. Переходные процессы в цепях с распределенными параметрами

В цепи с распределенными параметрами при переходе к новому стационарному состоянию также возникают переходные процессы. Последние, несомненно, имеют более сложный характер, нежели процессы, рассмотренные выше.

Электрические явления в длинной линии описываются известными нам телеграфными уравнениями, вывод которых приводится в § 6-2. Чтобы найти решение их при произвольном воздействии, используем преобразование Лапласа. Для этого умножим правые и левые части равенств (6-2) на e^{-pt}, а затем проинтегрируем по t от 0 до ∞. В результате получим:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{dU}{dx} &= (r_1 + pL_1) I - L_1 i(x,\ 0), \\ -\frac{dI}{dx} &= (g_1 + pC_1) U - C_1 u(x,\ 0). \end{aligned}\right\} \qquad (9\text{-}74)$$

Здесь $U(x,\ p)$ — изображение функции напряжения $u(x,\ t)$;
$I(x,\ p)$ — изображение функции тока $i(x,\ t)$;
$i(x,\ 0)$ и $u(x,\ 0)$ — начальные значения тока и напряжения в различных точках линии.

Равенства (9-74) образуют систему линейных дифференциальных уравнений с неизвестными функциями $U(x,\ p)$ и $I(x,\ p)$. При нулевых начальных условиях они принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dU}{dx} &= -Z_1(p) I, \\ \frac{dI}{dx} &= -Y_1(p) U, \end{aligned}\right\} \qquad (9\text{-}75)$$

причем

$$\left.\begin{aligned} Z_1(p) &= r_1 + pL_1, \\ Y_1(p) &= g_1 + pC_1. \end{aligned}\right\} \qquad (9\text{-}76)$$

Уравнения (9-75) по форме аналогичны телеграфным уравнениям (6-10) однородной линии, определяющим комплексные амплитуды тока и напряжения в установившемся режиме. На основании этой аналогии можно написать [см. выражения (6-12) и (6-14)], что

$$U(x,\ p) = A(p) e^{-\gamma x} + B(p) e^{\gamma x},$$
$$I(x,\ p) = \frac{A(p)}{Z_0(p)} e^{-\gamma x} - \frac{B(p)}{Z_0(p)} e^{\gamma x},$$

где

$$\gamma(p) = \sqrt{Z_1(p) Y_1(p)} \qquad (9\text{-}77)$$

— операторная постоянная распространения;

$$Z_0(p) = \sqrt{\frac{Z_1(p)}{Y_1(p)}} \qquad (9\text{-}78)$$

— операторное волновое сопротивление; величины $A(p)$ и $B(p)$ зависят от граничных условий на концах линии. При замене переменной p на $j\omega$ все эти выражения переходят в знакомые соотношения, характеризующие установившийся режим.

Если затем использовать изображения тока $I_2(p)$ и напряжения $U_2(p)$ на нагрузке, то подобно (6-19) и (6-20) будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} U(x, p) &= \frac{U_2(p)+I_2(p)Z_0(p)}{2} e^{-\gamma(x-l)} + \\ &+ \frac{U_2(p)-I_2(p)Z_0(p)}{2} e^{\gamma(x-l)}, \\ I(x, p) &= \frac{U_2(p)+I_2(p)Z_0(p)}{2Z_0(p)} e^{-\gamma(x-l)} - \\ &- \frac{U_2(p)-I_2(p)Z_0(p)}{2Z_0(p)} e^{\gamma(x-l)}. \end{aligned}\right\} \quad (9\text{-}79)$$

В другой форме записи

$$\left.\begin{aligned} U &= U_2(p)\operatorname{ch}\gamma\xi + I_2(p)Z_0(p)\operatorname{sh}\gamma\xi, \\ I &= I_2(p)\operatorname{ch}\gamma\xi + \frac{U_2(p)}{Z_0(p)}\operatorname{sh}\gamma\xi, \end{aligned}\right\} \quad (9\text{-}80)$$

где $\xi = l - x$.

Рассмотрим особенности переходных процессов в линии при различных условиях на ее концах.

а) Линия согласована с нагрузкой

Предположим, что условие

$$Z_0 = \sqrt{\frac{r_1 + j\omega L_1}{g_1 + j\omega C_1}} = Z_2(j\omega)$$

выполняется при любой частоте колебаний, т. е. линия согласована с нагрузкой в бесконечной полосе частот. В операторной форме это равенство можно представить следующим образом:

$$Z_0(p) = \sqrt{\frac{r_1 + pL_1}{g_1 + pC_1}} = Z_2(p); \quad -\infty < p < \infty. \quad (9\text{-}81)$$

Учитывая (9-81), из (9-79) получим

$$\begin{aligned} U(p) &= U_2(p)e^{\gamma l}e^{-\gamma x} = U_1(p)e^{-\gamma x}; \\ I(p) &= \frac{U_2(p)}{Z_0(p)}e^{\gamma l}e^{-\gamma x} = \frac{U_1(p)}{Z_0(p)}e^{-\gamma x}. \end{aligned}$$

Здесь функция $U_1(p) = \int_0^\infty u_1(t)e^{-pt}\,dt$ есть изображение напряжения $u_1(t)$ в начале линии (в точке $x = 0$).

Используя обратное преобразование Лапласа, находим, что напряжение и ток в различных точках линии

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} U_1(p)\,e^{-\gamma x}e^{pt}\,dt, \tag{9-82}$$

$$i(x,\ t)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{U_1(p)}{Z_0(p)}e^{pt}\,dp. \tag{9-83}$$

Если линия потерь не имеет ($r_1 = 0$ и $g_1 = 0$), из (9-76) следует, что $Z_1(p) = pL_1$ и $Y_1(p) = pC_1$. Тогда

$$\gamma(p)=p\sqrt{L_1C_1}=\frac{p}{v},\quad Z_0(p)=\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$$

и

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} U_1(p)\,e^{p\left(t-\frac{x}{v}\right)}\,dp,$$

где

$$v=\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}.$$

Обозначив $t-\frac{x}{v}=t'$, будем иметь

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} U_1(p)\,e^{p\left(t-\frac{x}{v}\right)}\,dp=u_1(t')=u_1\left(t-\frac{x}{v}\right), \tag{9-84}$$

где $u_1(t)$ — напряжение в начале линии.

Точно так же можно найти выражение для тока

$$i(x,\ t)=i_1\left(t-\frac{x}{v}\right); \tag{9-85}$$

$i_1(t)$ — ток в начале линии.

Отсюда вытекает, что в линии без потерь, согласованной с нагрузкой в бесконечной полосе частот, при любой форме внешнего воздействия имеет место режим бегущих волн. Передача электрических колебаний по такой линии, как уже отмечалось, осуществляется без каких-либо искажений.

В линии с потерями процесс распространения электрических колебаний несколько усложняется. Наличие потерь приводит к тому, что, в отличие от рассмотренного примера, операторная постоянная распространения $\gamma(p)=\sqrt{(r_1+pL_1)(g_1+pC_1)}$ перестает быть линейной функцией переменной p, а операторное волновое сопротивление $Z_0(p)=\sqrt{\frac{r_1+pL_1}{g_1+pC_1}}$ становится зависимым от p.

В результате выражения (9-82) и (9-83) в принципе будут отличаться от волновых функций. А это означает, что вид напряже-

ния и тока при передаче электрических возмущений непрерывно изменяется, причем эти изменения проявляются не только в уменьшении интенсивности колебаний вследствие расхода энергии, но и в искажениях формы колебаний. Последние могут быть весьма заметными, если цепь с распределенными параметрами имеет большую протяженность.

В линии с малыми потерями при передаче колебаний на небольшое расстояние искажениями формы напряжения и тока можно пренебречь.

б) Линия с произвольной нагрузкой

Предположим, что линия без потерь длиной l нагружена на сопротивление $Z_2(p) \neq Z_0$ (рис. 9-27).

Если на входе цепи в момент $t=0$ включается источник внешнего воздействия, в линии возникает прямая (падающая) волна. Изображение ее есть функция $U_{\text{пад}}(x, p) = U_1(p)e^{-\gamma x}$, причем

$$U_1(p) = \frac{E(p)}{Z_i(p) + Z_0(p)} Z_0(p).$$

В момент $t_1 = \frac{l}{v}$ эта волна достигает нагрузки в точке $x = l$, где происходит полное или частичное ее отражение.

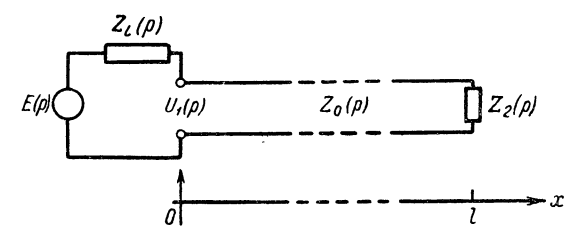


Рис. 9-27. К расчету переходных процессов в линии с произвольной нагрузкой.

Определим изображение $U_{\text{отр}}(x, p)$ отраженной волны. Из выражения (9-79) видно, что при $x = l$

$$U_{\text{пад}}(l, p) = \frac{U_2 + I_2 Z_0}{2} = I_2 \frac{Z_2(p) + Z_0}{2},$$

$$U_{\text{отр}}(l, p) = \frac{U_2 - I_2 Z_0}{2} = I_2 \frac{Z_2(p) - Z_0}{2}.$$

Отношение $U_{\text{отр}}(l, p)/U_{\text{пад}}(l, p)$ назовем переходным или операторным коэффициентом отражения $n(p)$. Принимая во внимание, что

$$n(p) = \frac{Z_2(p) - Z_0}{Z_2(p) + Z_0}, \tag{9-86}$$

будем иметь

$$U_{\text{отр}}(x, p) = n(p)\, U_{\text{пад}}(l) e^{\gamma(x-l)} = nU_1(p)\, e^{-2\gamma l} e^{\gamma x}.$$

Рассматриваемая отраженная волна, двигаясь к источнику, в момент $t_2 = \frac{2l}{v}$ достигает начала линии. Здесь вследствие того, что внутреннее сопротивление источника $Z_i(p)$ в общем случае не равно волновому сопротивлению, снова происходит отражение.

Чтобы рассчитать изображение новой волны, отраженной теперь уже от начала линии, введем по аналогии с (9-86) коэффициент

$$n_1(p) = \frac{Z_i(p) - Z_0}{Z_i(p) + Z_0} \tag{9-87}$$

и назовем его операторным коэффициентом отражения, на входе линии. Тогда, очевидно, изображение напряжения этой волны есть функция

$$n_1(p)\, U_{\text{отр}}(0,\ p)\, e^{-\gamma x} = nn_1 U_1(p)\, e^{-2\gamma l} e^{-\gamma x}.$$

Учитывая последние равенства и проводя и далее аналогичные рассуждения, получим следующие выражения для результирующего изображения $U(x,\ p)$:

при $0 \leqslant t < \frac{l}{v}$

$$U_{\text{I}}(x,\ p) = U_1(p)\, e^{-\gamma x}; \tag{9-88}$$

при $\frac{l}{v} < t < \frac{2l}{v}$

$$U_{\text{II}}(x,\ p) = U_1(p)\, [e^{-\gamma x} + ne^{-\gamma(2l-x)}];$$

при $\frac{2l}{v} < t < \frac{3l}{v}$

$$U_{\text{III}}(x,\ p) = U_1(p)\, [e^{-\gamma x} + ne^{-\gamma(2l-x)} + nn_1 e^{-\gamma(2l+x)}];$$

при $\frac{3l}{v} < t < \frac{4l}{v}$

$$U_{\text{IV}}(x,\ p) = U_1(p)\, [e^{-\gamma x} + ne^{-\gamma(2l-x)} + nn_1 e^{-\gamma(2l+x)} + n^2 n_1 e^{-\gamma(4l-x)}]$$

и т. д.

Используя выражения для падающей и отраженной волн тока, можно показать, что изображения $I(x,\ p)$ в соответствующие промежутки времени имеют такой вид:

$$I_{\text{I}}(x,\ p) = \frac{U_1(p)}{Z_0(p)}\, e^{-\gamma x} = I_1(p)\, e^{-\gamma x};$$

$$I_{\text{II}}(x,\ p) = I_1(p)\, [e^{-\gamma x} - ne^{-\gamma(2l-x)}];$$

$$I_{\text{III}}(x,\ p) = I_1(p)\, [e^{-\gamma x} - ne^{-\gamma(2l-x)} + nn_1 e^{-\gamma(2l+x)}];$$

$$I_{\text{IV}}(x,\ p) = I_1(p)\, [e^{-\gamma x} - ne^{-\gamma(2l-x)} + nn_1 e^{-\gamma(2l-x)} - n^2 n_1 e^{-\gamma(4l-x)}]$$

и т. д.

Здесь $i(t) \div I_1(p)$.

Из изложенных рассуждений следует, что переходный процесс в такой линии есть результат сложения волн, многократно отраженных от ее концов.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пусть линия, разомкнутая на конце, в момент $t = 0$ подключается к источнику постоянного напряжения (рис. 9-28), т. е. $u_1(t) = U_0 \cdot 1(t)$.

Будем полагать, что внутреннее (операторное) сопротивление источника $Z_i(p) = 0$. В этом случае операторный коэффициент отражения на входе линии, как следует из (9-87), $n_1(p) = -1$, а коэффициент отражения на разомкнутом конце $n(p) = 1$.

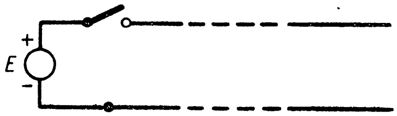


Рис. 9-28. Включение линии, разомкнутой на конце, на постоянное напряжение.

Подставляя эти значения в выражение (9-88) и учитывая, что $u_1(t) \div U_1(p) = \frac{U_0}{p}$, получим:

при $0 \leqslant t < \frac{l}{v}$

$$U_{\text{I}}(x, p) = e^{-\gamma x} = \frac{U_0}{p} e^{-p\frac{x}{v}};$$

при $\frac{l}{v} < t < \frac{2l}{v}$

$$U_{\text{II}}(x, p) = \frac{U_0}{p}\left[e^{-\gamma x} + e^{-\gamma(2l+x)}\right];$$

при $\frac{2l}{v} < t < \frac{3l}{v}$

$$U_{\text{III}}(x, p) = \frac{U_0}{p}\left[e^{-\gamma x} + e^{-\gamma(2l-x)} - e^{-\gamma(2l+x)}\right];$$

при $\frac{3l}{v} < t < \frac{4l}{v}$

$$U_{\text{IV}}(x, p) = \frac{U_0}{p}\left[e^{-\gamma x} + e^{-\gamma(2l-x)} - e^{-\gamma(2l+x)} - e^{-\gamma(4l-x)}\right]$$

и т. д.

Чтобы определить по найденным изображениям функцию $u(x, t)$, можно использовать формулу, аналогичную (9-84). В результате для различных интервалов времени будем иметь:

$$u_{\text{I}}(x, t) = u_1\left(t - \frac{x}{v}\right) = U_0 \cdot 1\left(t - \frac{x}{v}\right);$$

$$u_{\text{II}}(x, t) = U_0\left[1\left(t - \frac{x}{v}\right) + 1\left(t + \frac{x-2l}{v}\right)\right];$$

$$u_{\text{III}}(x, t) = U_0\left[1\left(t - \frac{x}{v}\right) + 1\left(t + \frac{x-2l}{v}\right) - 1\left(t - \frac{x+2l}{v}\right)\right];$$

$$u_{\text{IV}}(x, t) = U_0\left[1\left(t - \frac{x}{v}\right) + 1\left(t + \frac{x-2l}{v}\right) - 1\left(t - \frac{x+2l}{v}\right) - 1\left(t + \frac{x-4l}{v}\right)\right]$$

и т. д.

На рис. 9-29 приведены графики распределения напряжения вдоль линии в различные моменты (x_0 — произвольная точка наблюдения).

Из аналитических выражений и рис. 9-29 видно, что при $t < \frac{l}{v}$ в линии имеется только падающая волна (рис. 9-29, *а*).

Далее, на промежутке времени $\frac{l}{v} < t < \frac{2l}{v}$ существуют как падающая, так и отраженная (обратная) волны, причем напряжения их одинаковы по знаку ($n = 1$). Стало быть, теперь в цепи будет возникать напряжение, равное двойному напряжению источника (рис. 9-29, *б*).

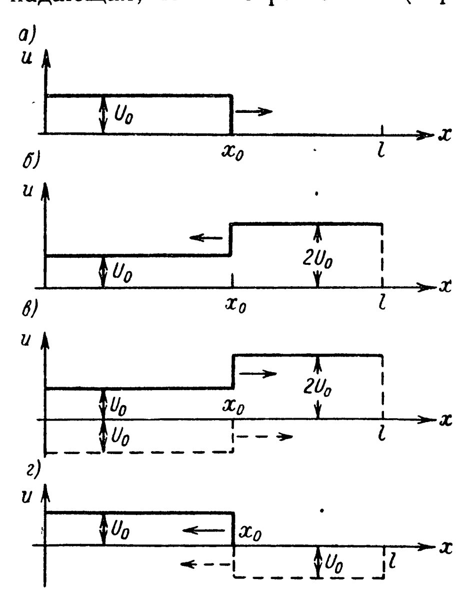


Рис. 9-29. Распределение напряжения в линии, разомкнутой на конце, при включении постоянного напряжения: *а* — при $t = \frac{x_0}{v}$; *б* — при $t = \frac{2l - x_0}{v}$; *в* — при $t = \frac{2l + x_0}{v}$; *г* — при $t = \frac{4l - x_0}{v}$.

После того как обратная волна достигнет генератора, появляется новая отраженная волна, движущаяся уже справа налево. Напряжение последней волны отрицательно ($n_1 = -1$), поэтому распространение ее сопровождается уменьшением результирующего напряжения до величины U_0 (рис. 9-29, *в*).

Дойдя до конца линии, рассматриваемая отраженная волна снова отражается. Так как здесь $n = 1$, напряжение второй обратной волны остается отрицательным, а суммарное напряжение в линии обращается в нуль (рис. 9-29, *г*).

При $t = \frac{4l}{v}$ по линии вновь будет распространяться падающая волна, и вся картина повторяется сначала.

Таким образом, переходный процесс в рассматриваемом случае имеет чисто периодический характер. На рис. 9-30 изображен график изменения напряжения в точке $x = l$. Как видно из графика, напряжение имеет форму прямоугольных импульсов величиной $2U_0$ с периодом следования $t = \frac{4l}{v}$ и продолжительностью $2l/v$.

В реальной линии с потерями интенсивность волн, многократно отражаемых от концов, по мере их распространения уменьшается;

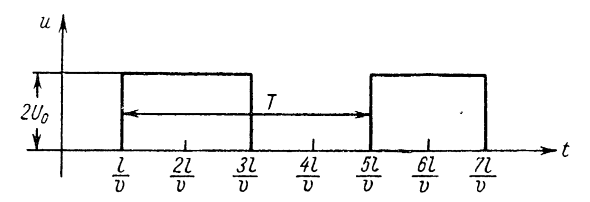


Рис. 9-30. Изменение напряжения на конце линии при включении постоянного напряжения (режим холостого хода).

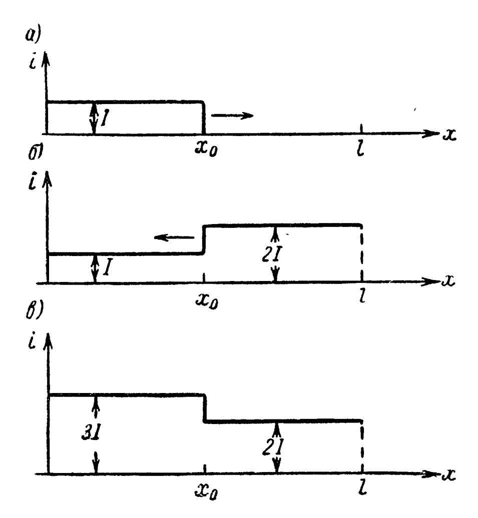


Рис. 9-31. Распределение тока в линии, коротко замкнутой на конце, при включении постоянного напряжения: *а* — при $t = \frac{x_0}{v}$; *б* — при $t = \frac{2l - x_0}{v}$; *в* — при $t = \frac{2l + x_0}{v}$.

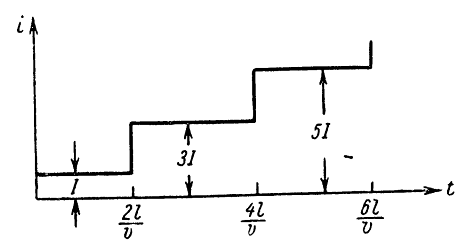


Рис. 9-32. Изменение тока на входе линии при выключении постоянного напряжения (режим короткого замыкания).

в конце концов, при $t \to \infty$, отраженные волны исчезают. Напряжение в каждой точке линии при этом будет приближаться к величине U_0, а ток стремится к нулю.

Переходные явления в линии без потерь, коротко замкнутой на конце, можно исследовать аналогичным образом. Следует только иметь в виду, что в режиме короткого замыкания согласно (9-86) коэффициент отражения $n(p) = -1$.

Опуская промежуточные преобразования, приведем окончательные выражения для тока при включении источника постоянного напряжения:

$$i_{\text{I}} = I \cdot 1\left(t - \frac{x}{v}\right); \qquad 0 \leqslant t < \frac{l}{v};$$

$$i_{\text{II}} = I\left[1\left(t - \frac{x}{v}\right) + 1\left(t + \frac{x-2l}{v}\right)\right]; \quad \frac{l}{v} < t < \frac{2l}{v};$$

$$i_{\text{III}} = I\left[1\left(t - \frac{x}{v}\right) + 1\left(t + \frac{x-2l}{v}\right) + 1\left(t - \frac{x+2l}{v}\right)\right]; \quad \frac{2l}{v} < t < \frac{3l}{v};$$

$$i_{\text{IV}} = I\left[1\left(t - \frac{x}{v}\right) + 1\left(t + \frac{x-2l}{v}\right) + 1\left(t - \frac{x+2l}{v}\right) + 1\left(t + \frac{x-4l}{v}\right)\right];$$

$$\frac{3l}{v} < t < \frac{4l}{v}$$

и т. д.

На рис. 9-31 показано распределение тока по линии в различные моменты. Токи отраженных волн, как видно из графика, складываются. Вследствие этого величина результирующего тока с течением времени возрастает, стремясь к бесконечности.

Кривая $i(t)$ для точки $x = 0$ (начало линии) показана на рис. 9-32.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

10-1. Основные свойства, характеристики и параметры нелинейных элементов

Свойства элементов электрической цепи (сопротивления, индуктивности, емкости) описываются их статическими характеристиками.

Статической характеристикой активного сопротивления является зависимость между током i, проходящим через элемент и падением напряжения на нем u. Эту зависимость называют вольт-амперной характеристикой.

Для индуктивности статической характеристикой является зависимость между током i и полным магнитным потоком Φ. Кривую, выражающую эту зависимость, называют вебер-амперной характеристикой.

Статическая характеристика емкости представляет собой зависимость между зарядом q и напряжением u_C. Она называется кулон-вольтной характеристикой.[1]

Статическая характеристика элемента цепи выражается некоторой функциональной зависимостью

$$y = f(x). \qquad (10\text{-}1)$$

Функцию y можно условно рассматривать, как отклик на воздействие x.

Статическим параметром элемента цепи называется отношение

$$p = \frac{y}{x}. \qquad (10\text{-}2)$$

Дифференциальный параметр равен производной

$$p_d = \frac{dy}{dx} = f'(x). \qquad (10\text{-}3)$$

---

[1] Под i, u, q, u_C, Φ понимаются мгновенные значения величин в установившемся режиме, т. е. при постоянном воздействии или в режиме периодических колебаний. В связи с этим рассматриваемые характеристики правильнее было бы называть не статическими, как это общепринято, а стационарными.

Дифференциальный параметр часто называют крутизной (S), потому что p_d есть не что иное, как крутизна статической характеристики в данной точке.

Зависимость

$$S = p_d = \frac{dy}{dx} = F(x)$$

представляет собой дифференциальную характеристику (характеристику крутизны) элемента цепи.

Так как $y = px$, статический и дифференциальный параметры связаны между собой зависимостью

$$p_d = x\frac{dp}{dx} + p. \quad (10\text{-}4)$$

Предыдущие главы книги были посвящены изучению теории линейных цепей. Параметры элементов этих цепей не зависят от режима их работы, т. е. от величины воздействия x. Поэтому статическая характеристика линейного (пассивного) элемента представляет собой прямую, проходящую через начало координат (рис. 10-1,*а*), а дифференциальная характеристика — прямую, параллельную оси абсцисс (рис. 10-1, *б*). Значения статического и дифференциального параметров линейного элемента совпадают, т. е.

$$p = p_d = \operatorname{tg}\alpha\frac{m_y}{m_x},$$

где α — угол, составляемый характеристикой с осью абсцисс; m_y и m_x — масштабы, в которых отложены по координатным осям величины y и x соответственно.

Если численно $m_y = m_x$,

$$p = p_d = \operatorname{tg}\alpha.$$

Для нелинейного элемента электрической цепи характерно то, что его параметры зависят от режима работы элемента, т. е. от величины воздействия x. Характеристики нелинейного элемента имеют тот или иной вид в зависимости от физической природы и устройства элемента.

В табл. 10-1 приведены величины x и y, а также параметры p и p_d для элементов цепей: сопротивления, емкости и индуктивности; здесь же даны их условные обозначения.

На рис. 10-1, *в* в качестве примера приведена статическая характеристика некоторого нелинейного элемента.

В какой-либо произвольной точке характеристики m статический параметр определяется углом α наклона секущей, проведенной из начала координат в данную точку. Если $m_y = m_x$,

$$p = \operatorname{tg}\alpha. \quad (10\text{-}5)$$

Таблица 10-1

Параметры нелинейных элементов

Схемы	x	y	$p = \frac{y}{x}$	$P_d = \frac{dy}{dx}$	$S_{ср} = \frac{y_{1m}}{x_m}$	$S_e = \frac{y_д}{x_д}$
i; u	u	i	Статическая проводимость $g = \frac{i}{u} = \frac{1}{r}$	Дифференциальная проводимость (крутизна) $g_d = S = \frac{di}{du} = \frac{1}{r_d}$	Средняя крутизна $g_{ср} = S_{ср} = \frac{I_1}{U}$	Эффективная крутизна $g_e = S_e = \frac{I_д}{U_д}$
q; u_c	u_c	q	Статическая емкость $C = \frac{q}{u_C}$	Дифференциальная емкость $C_d = \frac{dq}{du_C}$	Средняя емкость $C_{ср} = \frac{q_{1m}}{U_C}$	Эффективная емкость $C_e = \frac{q_д}{U_{C_д}}$
i; $Ф$	i	$Ф$	Статическая индуктивность $L \triangleq \frac{Ф}{i}$	Дифференциальная индуктивность $L_d = \frac{dФ}{di}$	Средняя индуктивность $L_{ср} = \frac{Ф_{1m}}{I}$	Эффективная индуктивность $L_e = \frac{Ф_д}{I_д}$

Дифференциальный параметр (крутизна) в той же точке пропорционален тангенсу угла β между касательной к кривой в данной точке и осью абсцисс. При условии, что $m_y = m_x$ крутизна

$$S = p_d = \operatorname{tg} \beta. \tag{10-5a}$$

На рис. 10-1, *г* изображена дифференциальная характеристика $p_d(x)$. Здесь же нанесена кривая зависимости статического параметра от величины воздействия $p(x)$.

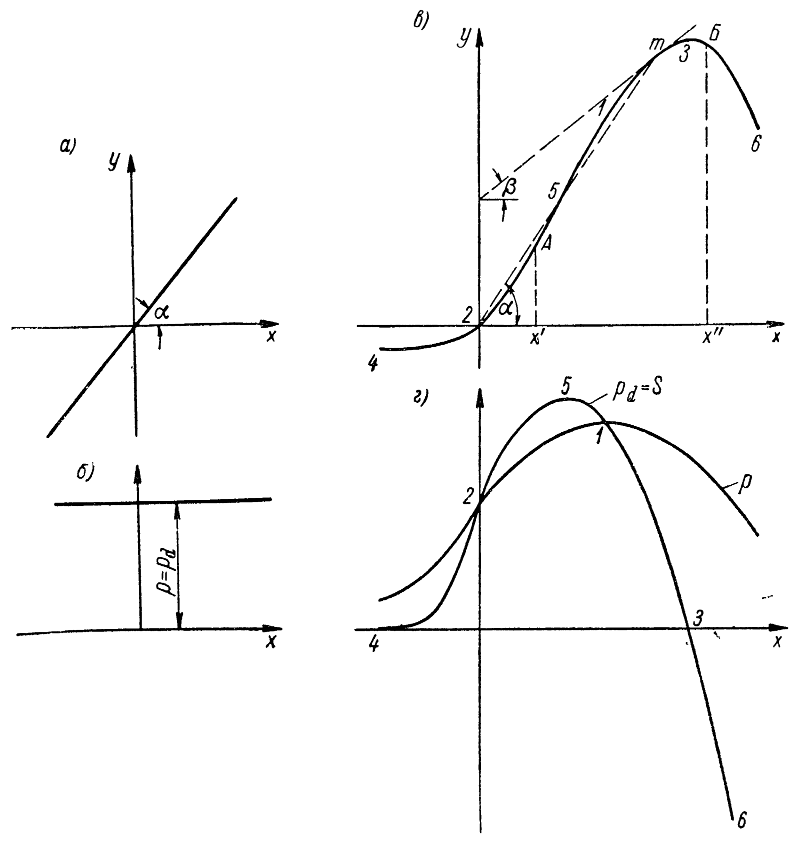


Рис. 10-1. Характеристики линейного и нелинейного элементов.

Для нелинейного элемента характерно не только то, что оба его параметра являются функциями воздействия, но также и то, что эти функции отличны друг от друга. Правда, могут иметься отдельные точки (*1* и *2*), где $p = p_d$, но, вообще говоря, эти величины различны. Так, в точках *3* и *4* дифференциальный параметр $S = p_d = 0$, в то время как в этих же точках статический параметр $p > 0$. Имеются такие участки характеристики (между точками *1* и *2*), где $p_d > p$, в то время как в других участках $p > p_d$.

Часть *4-5* характеристики может быть названа участком с нарастающей крутизной, а область *5-6* — участком с убывающей крутизной.

Для точек характеристики, лежащих правее точки *3*, даже знаки параметров различны: дифференциальный параметр отрицателен, а статический параметр положителен.

Функция $y = f(x)$ обычно задается графиком, построенным на основании экспериментально полученных данных. Между тем для расчета цепи, содержащей данный элемент, надо располагать хотя бы приближенным аналитическим выражением его характеристики. Подбор вида функции $f(x)$, называемый аппроксимацией характеристики, должен производиться так, чтобы, с одной стороны, уравнение достаточно точно отражало данные эксперимента и, с другой стороны, чтобы расчеты, основанные на выбранной аппроксимации, не были чрезмерно громоздкими и не требовали затраты большого времени и труда.

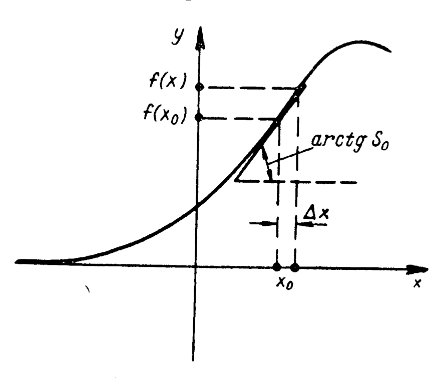


Рис. 10-2. К аппроксимации характеристики нелинейного элемента.

В некоторых случаях, воздействие на элемент не выходит за определенные пределы (например, $x' - x''$ на рис. 10-1, *в*). Тогда и аппроксимирующая характеристику функция может быть выбрана так, что она достаточно точно воспроизведет только так называемый рабочий участок характеристики, т. е. тот участок, в пределах которого может перемещаться рабочая точка (*АБ* на рис. 10-1, *в*). Естественно, что чем меньше рабочий участок кривой, тем более простой может быть выбрана функция, аппроксимирующая этот участок характеристики.

Известно много различных методов аппроксимации характеристик нелинейных элементов. Остановимся на важнейших из них.

Пусть к нелинейному элементу приложено постоянное воздействие x_0 (рис. 10-2), которое будем называть «смещением». При этом $y_0 = f(x_0)$ — значение функции в исходной точке.

Если x_0 изменить на некоторую величину Δx, то, представляя новое значение y в виде ряда Тэйлора, получим

$$y = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x + \frac{1}{2} f''(x_0)\,\Delta x^2 + \ldots, \qquad (10\text{-}6)$$

где $f'(x_0)$; $f''(x_0), \ldots$ — значения производных функции $f(x)$ в точке $x = x_0$.

Производная $f'(x_0)$ есть не что иное как крутизна (дифференциальный параметр) в исходной точке, т. е.

$$f'(x_0) = S_0.$$

Так как $\Delta x = x - x_0$, вместо (10-6) можно написать

$$y = f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots \quad (10\text{-}7)$$

В том частном случае, когда смещение $x_0 = 0$, будем иметь

$$y = f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \ldots \quad (10\text{-}8)$$

Уравнения (10-7) и (10-8) являются аналитическими выражениями характеристики элемента; первое из них — разложение в ряд функции $f(x)$ в окрестности точки $x = x_0$; второе — разложение в ряд относительно начала координат.

Как видно, полученные формулы представляют собой степенные ряды. Чем большее число членов ряда будем учитывать, тем точнее будет выражаться действительная характеристика. Если же ограничиться некоторым числом n слагаемых, то полученный многочлен n-й степени явится приближенным выражением характеристики.

Итак, аппроксимация характеристик степенными полиномами приводит к следующим уравнениям:

если $x_0 \neq 0$, то

$$y = f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n$$

или

$$y = f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k; \quad (10\text{-}9)$$

если $x_0 = 0$, то

$$y = f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$$

или

$$y = f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_kx^k. \quad (10\text{-}10)$$

Следует иметь в виду, что коэффициенты a_0; a_1;... (или b_0; b_1;...) необязательно должны быть равны коэффициентам рядов Тэйлора (10-7) и (10-8), пропорциональным производным в исходной точке. Коэффициенты надо подбирать так, чтобы аппроксимирующие уравнения наилучшим образом выражали рабочий участок характеристики. Если последний примыкает к началу координат, удобнее пользоваться формой уравнения (10-10); если же рабочий участок примыкает к точке характеристики $x = x_0$, то целесообразнее пользоваться уравнением (10-9).

Всегда стремятся ограничиться возможно меньшим числом слагаемых полинома, чтобы чрезмерно не усложнять расчетов.

Наряду с аппроксимацией характеристик степенным полиномом в практике радиотехнических расчетов широко пользуются методом кусочно-линейной аппроксимации, разработанным академиком А. И. Бергом. Этот метод основан на том, что характеристика разбивается на ряд участков, принимаемых за прямые линии. В простейшем случае таких участков может быть два или три (рис. 10-3). Прямолинейные отрезки проводятся так, чтобы

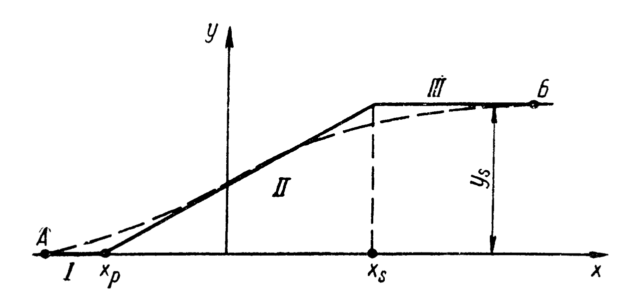


Рис. 10-3. Кусочно-линейная аппроксимация характеристики нелинейного элемента.

они удовлетворительно совпадали с действительной кривой, проведенной на рис. 10-3 пунктиром.

Уравнение участка *II*, очевидно, имеет вид

$$y = S(x - x_р). \qquad (10\text{-}11)$$

Здесь S — крутизна участка *II*, которая может быть найдена как

$$S = \frac{y_s}{x_s - x_р}. \qquad (10\text{-}12)$$

Смысл величин $x_р$; x_s и y_s очевиден из рассмотрения рис. 10-3.

Таким образом, вся кусочно-линейная характеристика в рассматриваемом примере описывается уравнениями:

при $x < x_р$ (область *I*) $y = 0$;

при $x_р \leqslant x \leqslant x_s$ (область *II*) $y = S(x - x_р)$;

при $x > x_s$ (область *III*) $y = y_s$.

Использование метода кусочно-линейной аппроксимации целесообразно, когда рабочий участок захватывает значительную часть характеристики (например, *АБ* на рис. 10-3). В этом случае применение метода степенного полинома затруднительно, так как для получения достаточно точных результатов пришлось бы аппроксимировать характеристику полиномом с большим числом слагаемых.

На рис. 10-4 изображены статические характеристики двух нелинейных элементов. Один из них имеет характеристику, крутизна которой возрастает с увеличением x — условно ее можно назвать

характеристикой с нарастающей крутизной (рис. 10-4, *а*), а другой — характеристику с убывающей крутизной (рис. 10-4, *б*).

На тех же графиках нанесены прямые $y = S_0 x$, наклон которых равен крутизне в исходной точке (в начале координат). Они являлись бы характеристиками элементов, если бы последние не обладали нелинейными свойствами.

Разность

$$\nu = f(x) - S_0 x, \tag{10-13}$$

обязанная своим наличием нелинейным свойствам элементов, может быть названа **продуктом нелинейности**.

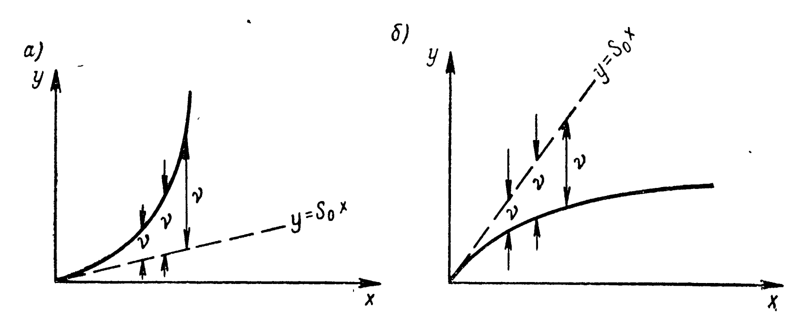


Рис. 10-4. Продукты нелинейности.

Для элемента с нарастающей крутизной продукт нелинейности положителен ($\nu > 0$), а для элемента с убывающей крутизной он отрицателен ($\nu < 0$). В обоих случаях ν является некоторой функцией воздействия x.

Положим теперь, что воздействие изменяется во времени по некоторому закону $x = x(t)$. Тогда отклик нелинейного элемента, имеющего характеристику $y = f(x)$, будет изменяться во времени по иному закону, а именно

$$y(t) = f[x(t)]. \tag{10-14}$$

Мы говорим, что в системе имеет место **нелинейное преобразование формы** колебаний.

Пусть, например, воздействие (входная функция) представляет собой линейно нарастающую во времени величину (рис. 10-5):

$$x = kt. \tag{10-15}$$

Тогда, выражая характеристику элемента согласно (10-13) как

$$f(x) = S_0 x + \nu(x),$$

получим, что выходная функция (отклик)

$$y(t) = f(kt) = S_0 kt + \nu(kt). \tag{10-16}$$

Согласно (10-16) отклик можно представить в виде суммы двух функций времени: одна из них (S_0kt) имеет такой же вид, как и функция воздействия; другая же — $\nu(kt)$ — является продуктом нелинейности. В результате выходная функция $y(t)$ по своей форме существенно отличается от функции воздействия (рис. 10-5). Отштрихованные отрезки представляют мгновенные значения продукта нелинейности $\nu(kt)$.

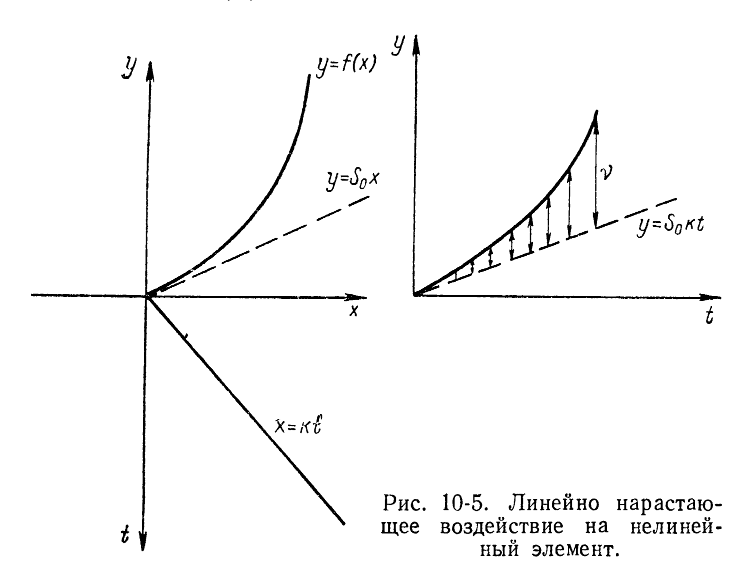


Рис. 10-5. Линейно нарастающее воздействие на нелинейный элемент.

Из всего сказанного следует, что в том случае когда нелинейная цепь содержит только активные сопротивления, только индуктивности или только емкости (элементарная нелинейная цепь), задача нахождения отклика по заданному воздействию сводится к решению нелинейного алгебраического уравнения вида (10-9) или (10-10).

10-2. Преобразование частоты в нелинейных цепях. Средняя и эффективная крутизна

Особый интерес представляет тот случай, когда воздействие на нелинейный элемент изменяется во времени по гармоническому закону, т. е.

$$x = x_m \cos \omega t.$$

На рис. 10-6 произведено построение формы выходной функции $y(t)$ для двух элементов. Вследствие нелинейности их характеристик функция $y(t)$ отлична от косинусоиды. В случае характеристики с нарастающей крутизной (рис. 10-6, *а*) кривая $y(t)$ имеет заостренную форму, а в случае элемента с убывающей крутизной «верхушки» кривой $y(t)$ почти горизонтальны (рис. 10-6, *б*).

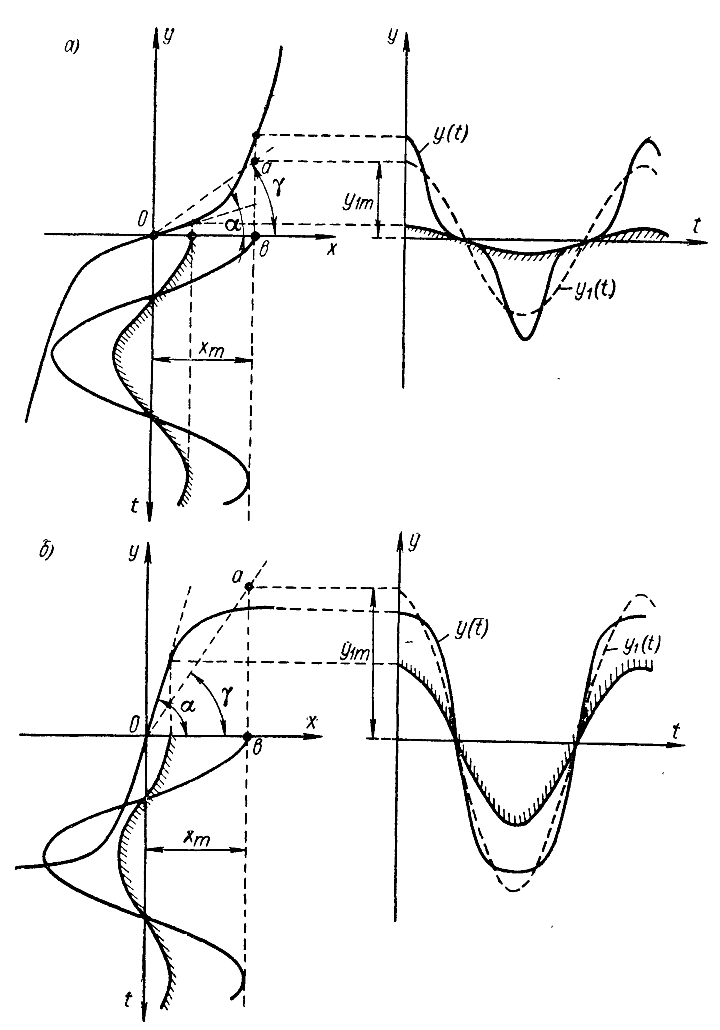


Рис. 10-6. Гармоническое воздействие на нелинейные элементы.
$\gamma = \text{arctg}\, S_{\text{ср}}$; $\alpha = \text{arctg}\, S_0$.

Так как $y(t)$ — периодическая функция времени, она может быть представлена в виде ряда Фурье:

$$y = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} y_{km} \cos(k\omega t - \psi_k), \qquad (10\text{-}17)$$

где y_{km} — амплитуда k-й гармоники;

ψ_k — начальная фаза k-й гармоники;

y_0 — постоянная слагающая.

Если бы характеристика элемента была линейна, функция $y(t)$ содержала бы только одну гармоническую составляющую частоты ω. Все остальные слагающие — постоянная и высшие гармоники — появились как следствие криволинейности характеристики и составляют продукт нелинейности

$$\nu(t) = y_0 + \sum_{k=2}^{\infty} y_{km} \cos(k\omega t - \psi_k). \qquad (10\text{-}18)$$

Форма функции $\nu(t)$, а значит, и величины амплитуд высших гармоник определяются видом характеристики элемента и, разумеется, различны в случаях рис. 10-6, *а* и *б*.

Итак, нелинейные элементы обладают замечательным свойством органического преобразования частоты, заключающегося в том, что в нелинейных системах спектральная функция отклика содержит новые частоты, которых нет в составе функции воздействия. Этим нелинейные цепи принципиально отличаются от линейных цепей с постоянными параметрами, в которых все напряжения, токи, поля имеют при гармоническом воздействии также синусоидальную форму и в которых возникновение высших гармоник невозможно.

Нелинейные преобразования играют чрезвычайно большую роль в современной радиоэлектронике. Используя их, удается решать многие важные технические задачи, в том числе генерирование колебаний сложной формы и умножение частоты, о чем подробно говорится в главах четырнадцатой, пятнадцатой и шестнадцатой.

В ряде случаев изменение формы колебаний нежелательно. Тогда говорят о нелинейных искажениях, возникающих при прохождении гармонического колебания через цепь. Количественной мерой этих искажений может служить коэффициент нелинейных искажений, определяемый как отношение действующего значения всех высших гармоник отклика на гармоническое воздействие к действующему значению основной (первой) гармоники. Так как согласно (7-36) действующее значение сложного колебания равно корню квадратному из суммы квадратов действующих значений отдельных гармонических слагающих, коэффициент нелинейных искажений

$$k_f = \frac{\sqrt{y_{2\text{д}}^2 + y_{3\text{д}}^2 + \cdots}}{y_{1\text{д}}}, \qquad (10\text{-}19)$$

где $y_{1д}$; $y_{2д}$;... — действующие значения первой, второй и т. д. гармоник отклика на гармоническое воздействие.

При сильно искаженной форме колебаний коэффициент нелинейных искажений достигает величины $k_f \approx 10 \div 30\%$ и более.

Действующее значение отклика $y(t)$

$$y_д = \sqrt{y_{1д}^2 + y_{2д}^2 + y_{3д}^2 + \ldots}.$$

Поэтому коэффициент нелинейных искажений можно выразить так:

$$k_f = \sqrt{\frac{y_д^2}{y_{1д}^2} - 1}. \qquad (10\text{-}20)$$

Из числа гармонических составляющих выходной функции $y(t)$ наибольшую величину зачастую имеет первая (основная) гармоника $y_1(t)$. Именно первая гармоника во многих случаях играет основную роль при осуществлении различных устройств, например таких, как генераторы гармонических колебаний.

Поэтому возникает необходимость связать величину амплитуды первой гармоники отклика y_{1m} с амплитудой гармонического воздействия x_m.

С этой целью введем еще один параметр нелинейного элемента, называемый средней крутизной и равный отношению амплитуды первой гармоники отклика к амплитуде гармонического воздействия:

$$S_{ср} = \frac{y_{1m}}{x_m}. \qquad (10\text{-}21)$$

Чтобы лучше уяснить понятие средней крутизны, вернемся к рис. 10-6. Пунктирные косинусоиды изображают здесь мгновенные значения первой гармоники $y_1(t)$ выходной функции $y(t)$, полученные в результате разложения функции $y(t)$ в ряд Фурье.

Средняя крутизна $S_{ср}$ представляет собой тангенс угла γ треугольника oab, катетами которого являются амплитуды: воздействия x_m и первой гармоники отклика y_{1m}. Иными словами, $S_{ср}$ есть крутизна воображаемой прямолинейной характеристики (oa на рис. 10-6), которую должен был бы иметь элемент, чтобы выходная функция содержала только одну синусоидальную составляющую с амплитудой y_{1m}.

Средняя крутизна отличается от крутизны S_0 в исходной точке, величина которой определяется углом наклона α касательной к характеристике в начальной точке. В случае элемента с нарастающей крутизной, как это видно из рис. 10-6, *а*,

$$S_{ср} > S_0, \text{ т. е. } \gamma > \alpha,$$

а в случае элемента с убывающей крутизной (рис. 10-6, *б*), наоборот,

$$S_{ср} < S_0, \text{ т. е. } \gamma < \alpha.$$

Если в случае рис. 10-6, *а* будем уменьшать амплитуду x_m, устремляя ее к нулю, рабочий участок характеристики обратится в бесконечно малый прямолинейный отрезок с крутизной S_0. Отклик будет иметь чисто синусоидальную форму, и средняя крутизна станет равной крутизне в исходной точке. Таким образом, в случае рис. 10-6, *а* с уменьшением амплитуды x_m средняя крутизна уменьшается, стремясь к величине S_0.

Повторяя эти рассуждения для случая элемента, имеющего характеристику вида рис. 10-6, *б*, придем к выводу, что с уменьшением амплитуды x_m средняя крутизна, наоборот, возрастает, также стремясь к S_0.

Режим работы при весьма малой амплитуде колебаний иллюстрируется на рис. 10-6 отштрихованными кривыми.

Итак, вообще средняя крутизна $S_{ср}$ сама является некоторой функцией амплитуды воздействия,

$$S_{ср} = S_{ср}(x_m) \qquad (10\text{-}22)$$

и при $x_m \to 0$ стремится к S_0, т. е.

$$\lim [S_{ср}]_{x_m \to 0} = S_0. \qquad (10\text{-}23)$$

Из всего сказанного следует, что нелинейность характеристики проявляется не только в возникновении новых гармонических составляющих в выходной функции, но и в том, что амплитуда колебания основной частоты

$$y_{1m} = S_{ср} x_m = S_{ср}(x_m)\, x_m$$

изменяется непропорционально амплитуде воздействия, поскольку $S_{ср}$ является некоторой функцией x_m.

Экспериментальное определение средней крутизны может оказаться затруднительным, так как оно требует измерения амплитуды первой гармоники сложного колебания, что не всегда возможно. Удобнее измерять д е й с т в у ю щ е е (эффективное) значение сложного колебания $y_д$.

В связи с этим иногда пользуются параметром

$$S_e = \frac{y_д}{x_д}, \qquad (10\text{-}24)$$

который равен отношению действующих значений отклика и воздействия и называется э ф ф е к т и в н о й к р у т и з н о й.

Эффективная крутизна, так же как и средняя крутизна, зависит от амплитуды функции воздействия: $S_e = S_e(x_m)$.

Из (10-20) следует, что

$$\frac{y_д}{y_{1д}} = \sqrt{1 + k_f^2}. \qquad (10\text{-}25)$$

Подставляя (10-25) в (10-24), найдем

$$S_e = \frac{y_{1д}}{x_д} \sqrt{1 + k_f^2}.$$

Так как $\frac{y_{1д}}{x_д} = \frac{y_{1m}}{x_m} = S_{ср}$, эффективная и средняя крутизна связаны между собой следующим соотношением:

$$S_e = S_{ср}\sqrt{1 + k_f^2}. \qquad (10\text{-}26)$$

Отсюда следует, что в ряде случаев эффективная и средняя крутизна мало отличаются друг от друга. Так, если даже $k_f = 0{,}5$, то $S_e = 1{,}12 S_{ср}$.

Формулы, определяющие средние и эффективные параметры нелинейных элементов цепей, приведены в табл. 10-1.

Метод исследования нелинейных цепей, при котором все расчеты производятся для первых гармоник токов и напряжений, носит название к в а з и л и н е й н о г о м е т о д а. Применяя его, учитываем нелинейность системы зависимостью ее параметров, в частности средней крутизны, от амплитуды тока или напряжения, но не принимаем во внимание высшие гармонические, имеющиеся в спектре колебаний.

10-3. Неприменимость принципа наложения к нелинейным элементам. Комбинационные колебания

Пусть к нелинейному элементу приложено воздействие x, равное сумме двух величин x_1 и x_2, т. е. $x = x_1 + x_2$.

Рассмотрим графически результат такого сложного воздействия на каждый из двух нелинейных элементов: с нарастающей (рис. 10-7, *а*) и убывающей крутизной (рис. 10-7, *б*).

Если бы на элемент воздействовал только источник x_1, отклик был бы равен $f(x_1)$.

Если бы элемент подвергался воздействию x_2, отклик был бы равен $f(x_2)$.

Из рис. 10-7 видно, что при совместном действии x_1 и x_2 выходная функция

$$f(x_1 + x_2) \neq f(x_1) + f(x_2).$$

Отклик на суммарное воздействие двух источников не равен сумме откликов на каждое из воздействий. Иными словами, *принцип наложения к нелинейным системам не применим*. Этим они принципиально отличаются от линейных систем.

Из графического построения, выполненного на рис. 10-7, ясно, что

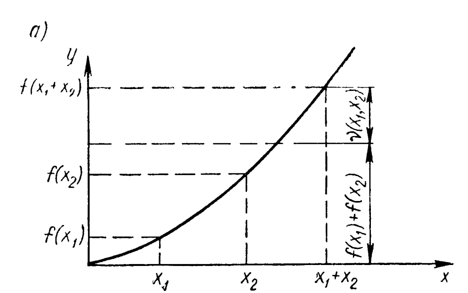
$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) + \nu(x_1, x_2). \qquad (10\text{-}27)$$

Если бы система была линейной, величина $\nu(x_1, x_2)$ отсутствовала бы; она определяется видом характеристики нелинейного элемента и может иметь различную величину.

Так, в случае рис. 10-7, *а* $\nu(x_1, x_2) > 0$, а в случае рис. 10-7, *б* $\nu(x_1, x_2) < 0$. Нетрудно видеть, что ν является функцией обеих составляющих воздействия x_1 и x_2, их комбинации. Достаточно при прочих равных условиях изменить одну из них, как это вызовет

изменение величины ν. Поэтому $\nu(x_1, x_2)$ можно назвать **комбинационным продуктом нелинейности.**

Если характеристика элемента задана аналитически, может быть найдена зависимость комбинационного продукта нелинейности от составляющих воздействия x_1 и x_2.



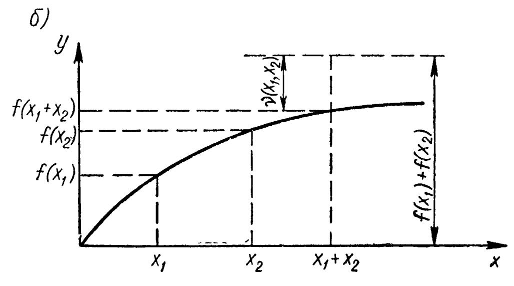


Рис. 10-7. Сложное воздействие на нелинейные элементы.

Допустим, что уравнение статической характеристики элемента имеет вид одночленной степенной зависимости

$$y = ax^k, \quad (10\text{-}28)$$

где $k = 2$.

Тогда, считая по-прежнему, что $x = x_1 + x_2$, получим, что

$$f(x_1) = ax_1^2,$$
$$f(x_2) = ax_2^2,$$

а выходная функция

$$f(x_1 + x_2) = ax_1^2 + ax_2^2 + 2ax_1x_2 = f(x_1) + f(x_2) + 2ax_1x_2. \quad (10\text{-}29)$$

Отсюда видно, что в рассматриваемом простейшем случае комбинационный продукт нелинейности

$$\nu(x_1, x_2) = 2ax_1x_2 \quad (10\text{-}30)$$

пропорционален произведению величин x_1 и x_2, составляющих сложное воздействие.

Если x_1 и x_2 изменяются во времени по гармоническому закону с частотами соответственно ω_1 и ω_2, т. е. если

$$x_1 = x_{1m}\cos\omega_1 t$$
$$\text{и } x_2 = x_{2m}\cos\omega_2 t,$$

то

$$f(x_1) = ax_{1m}^2\cos^2\omega_1 t = \frac{a}{2}x_{1m}^2 + \frac{a}{2}x_{1m}^2\cos 2\omega_1 t, \quad (10\text{-}31)$$

$$f(x_2) = ax_{2m}^2\cos^2\omega_2 t = \frac{a}{2}x_{2m}^2 + \frac{a}{2}x_{2m}^2\cos 2\omega_2 t, \quad (10\text{-}32)$$

а комбинационный продукт нелинейности

$$\nu(x_1, x_2) = 2ax_{1m}x_{2m}\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t =$$
$$= ax_{1m}x_{2m}\cos(\omega_1 - \omega_2)t + ax_{1m}x_{2m}\cos(\omega_1 + \omega_2)t. \quad (10\text{-}33)$$

Слагаемые выходной функции $f(x_1)$ и $f(x_2)$, определяемые формулами (10-31) и (10-32), представляют собой отклики на независимое действие каждого из двух источников. В соответствии с тем, о чем говорилось в § 10-2, они содержат частоты, отсутствующие в функции воздействия: постоянные слагающие $\omega = 0$ и кратные (удвоенные) частоты $2\omega_1$ и $2\omega_2$. Интересно отметить, что при заданном типе нелинейности ($k = 2$) основные частоты ω_1 и ω_2 в составе откликов вообще отсутствуют.

Кроме $f(x_1)$ и $f(x_2)$, в состав выходной функции входит комбинационный продукт нелинейности. Согласно (10-33) он содержит колебания разностной $(\omega_1 - \omega_2)$ и суммарной $(\omega_1 + \omega_2)$ частот, которые обычно называют **комбинационными частотами**.

В рассмотренном простейшем случае было сделано предположение, что характеристика элемента выражается простейшей (квадратичной) зависимостью, а воздействие состоит только из двух гармонических слагающих.

Нетрудно понять, что если уравнение характеристики содержит большое число слагаемых, а воздействие состоит из множества гармонических составляющих разных частот, количество комбинационных колебаний может быть чрезвычайно велико (в общем случае — бесконечно велико).

Значения возникающих в общем случае комбинационных частот можно найти из формулы

$$\omega_k = m\omega_1 \pm n\omega_2 \pm p\omega_3 \pm \ldots \qquad (10\text{-}34)$$

Здесь ω_1, ω_2, ω_3, ... — частоты гармонических составляющих воздействия;

m, n, p, ... — целые числа (0, 1, 2, 3, ...).

Для определения каждой из комбинационных частот ω_k в формулу (10-34) должны подставляться различные комбинации чисел m, n, p, ..., количество и характер этих комбинаций определяется видом уравнения характеристики элемента (количеством членов полинома).

То обстоятельство, что при воздействии на нелинейный элемент сложного периодического колебания спектр отклика содержит, кроме кратных (высших) гармоник, еще и множество комбинационных частот, иногда является нежелательным, и тогда приходится принимать специальные меры для их подавления.

Однако в других случаях комбинационные колебания используются для решения различных задач, связанных с необходимостью некратного преобразования частоты колебаний. С этим встречаемся, например, в радиоприемниках, во многих измерительных установках и т. д.

Неприменимость принципа суперпозиции к нелинейным системам приводит к тому, что все методы расчета цепей, основанные на этом принципе и рассмотренные в предыдущих главах, не могут быть использованы при расчетах нелинейных цепей. Это, разумеется,

сильно затрудняет расчеты электрических цепей, содержащих нелинейные элементы; некоторые приближенные методы расчета будут изложены ниже.

10-4. Нелинейные активные сопротивления

Когда говорят о нелинейном активном сопротивлении, условно изображенном на рис. 10-8, то часто под воздействием понимают напряжение, приложенное к сопротивлению ($x \equiv u$), а под откликом — ток, проходящий через него ($y \equiv i$). Таким образом, статической характеристикой сопротивления служит зависимость $i = i(u)$, называемая, как известно, вольт-амперной характеристикой.

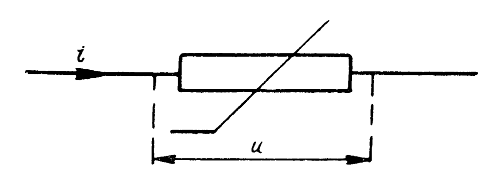


Рис. 10-8. Нелинейное активное сопротивление.

Статическим параметром элемента в соответствии с (10-2) является статическая проводимость

$$g = \frac{i}{u} = \frac{1}{r} = g(u), \quad (10\text{-}35)$$

где $r = \frac{u}{i}$ — статическое сопротивление. Дифференциальный параметр, или крутизна, нелинейного сопротивления согласно (10-3)

$$S = \frac{di}{du} = \frac{1}{r_d} = S(u), \quad (10\text{-}36)$$

где $r_d = \frac{du}{di}$ — дифференциальное сопротивление.

Крутизна может быть также названа дифференциальной проводимостью; обычно она измеряется в *ма/в*.

Как статическая, так и дифференциальная проводимости являются некоторыми функциями приложенного напряжения (или тока).

В тех случаях, когда сопротивление питается определенным током, оказывается более удобным пользоваться характеристикой $u = u(i)$, т. е. полагать воздействием ток, а откликом — падение напряжения, им создаваемое.

В радиоэлектронике широко применяются многие виды нелинейных активных сопротивлений, основанные на разных физических принципах и по-разному конструктивно оформленные. Их можно классифицировать по различным признакам.

По виду характеристик сопротивления разделяют на симметричные и несимметричные.

Симметричными называются такие сопротивления, для которых $i(u) = -i(-u)$; ветви их вольт-амперных характеристик при положительных и отрицательных напряжениях отличаются

только знаком. Характеристика симметричного сопротивления выражается нечетной функцией; параметры его зависят только от величины (и не зависят от знака) приложенного напряжения.

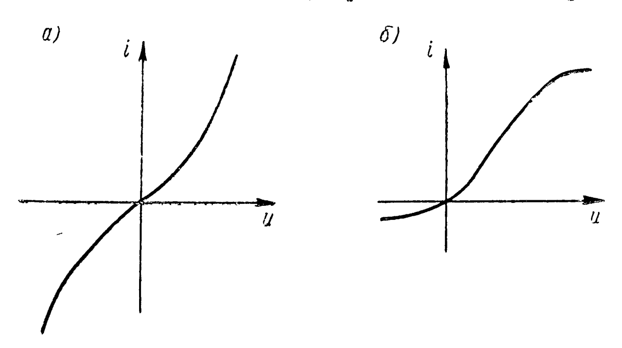


Рис. 10-9. Характеристики нелинейных сопротивлений.

Примером симметричного нелинейного сопротивления может служить варистор (нелинейное полупроводниковое сопротивление — НПС), имеющий характеристику вида рис. 10-9, *а*. Варисторы изготовляются из керамических полупроводников на основе карбида кремния SiC.

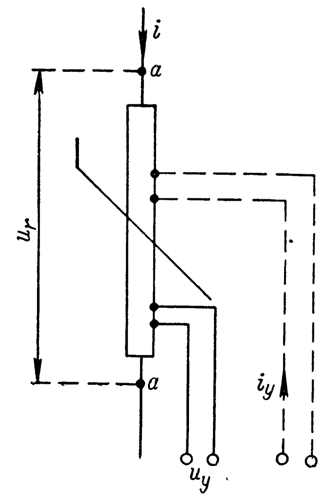


Рис. 10-10. Управляемое нелинейное сопротивление.

В несимметричном сопротивлении $i(u) \neq -i(-u)$.

Примером несимметричных сопротивлений являются электронные и полупроводниковые диоды. Ветви их характеристик (рис. 10-9, *б*) резко различны при разной полярности приложенного напряжения: при одном («прямом») знаке напряжения проводимость значительно больше, чем при другом («обратном») знаке. Характеристика диода в «прямом» направлении имеет при малых напряжениях нарастающую крутизну, а при больших (при наличии насыщения) — убывающую крутизну.

Электрически управляемыми называют такие нелинейные сопротивления, ток через которые является функцией нескольких напряжений (или токов), называемых управляющими, т. е.

$$i = f(u_r;\ u_y, \ldots,\ i_y, \ldots),$$

где u_r — напряжение, приложенное к входным зажимам *а-а* сопротивления (рис. 10-10);

$u_y, \ldots, i_y, \ldots$ — управляющие напряжения и токи,

Электронные лампы (триоды, тетроды и т. п.) и транзисторы могут рассматриваться как управляемые нелинейные сопротивления. Так, анодный ток триода зависит не только от напряжения на аноде $u_r = u_a$, но и от напряжения на сетке (управляющего напряжения) $u_y = u_g$:

$$i_a = f(u_g, u_a).$$

Управляемые сопротивления должны описываться семейством характеристик. В связи с этим приходится пользоваться и семейством параметров, при определении которых в качестве независимой переменной (воздействия) принимают то или иное управляющее напряжение (ток).

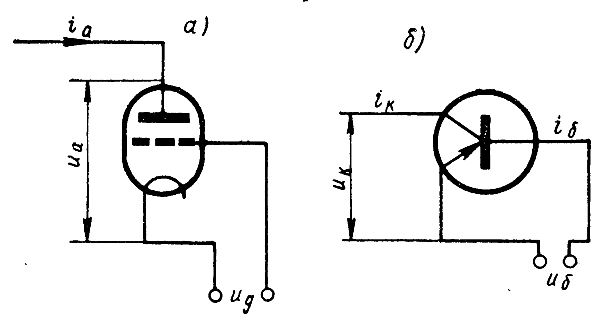


Рис. 10-11. Схемы лампового триода (*а*) и транзистора (*б*).

Так, электровакуумный триод (рис. 10-11, *а*) характеризуют следующими параметрами, определяющими поведение анодного тока (ток сетки предполагается пренебрежимо малым):

1) крутизна (дифференциальная проводимость анодного тока по сеточному напряжению)

$$S = \frac{di_a}{du_g} \qquad \text{при } u_a = \text{const};$$

2) внутреннее сопротивление (величина, обратная дифференциальной проводимости анодного тока по анодному напряжению):

$$R_i = \frac{du_a}{di_a} \qquad \text{при } u_g = \text{const}.$$

Для транзистора, включенного по схеме с общим эмиттером (рис. 10-11, *б*) и характеризуемого системой *g*-параметров, пользуются дифференциальными проводимостями:

$$g_{11} = \frac{di_б}{du_б} \qquad \text{при } u_к = \text{const};$$

$$g_{12} = \frac{di_б}{du_к} \qquad \text{при } u_б = \text{const};$$

$$g_{21} = \frac{di_к}{du_б} \qquad \text{при } u_к = \text{const};$$

$$g_{22} = \frac{di_к}{du_к} \qquad \text{при } u_б = \text{const}.$$

Они представляют собой выражения крутизны тока базы $i_б$ и коллекторного тока $i_к$ либо по напряжению базы $u_б$, либо по коллекторному напряжению $u_к$.

Если вольт-амперная характеристика элемента имеет участок с отрицательной крутизной (*ab* на рис. 10-12), то говорят, что элемент обладает отрицательным сопротивлением. Двухполюсники, обладающие характеристиками, подобными рис. 10-12, можно получить различными способами, применяя электронные и ионные приборы, транзисторы и т. п.

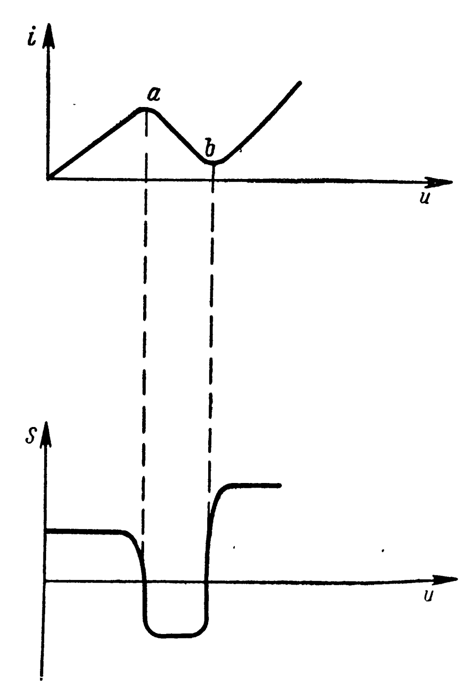


Рис. 10-12. Характеристики элемента, обладающего отрицательным сопротивлением.

Устройство используемых в радиоэлектронике генераторов колебаний различной частоты и формы основано на применении отрицательных сопротивлений того или иного вида. Поэтому вопросы получения и практического использования отрицательных сопротивлений подробно рассматриваются ниже, в главе пятнадцатой.

Большинство нелинейных сопротивлений (в частности те, о которых шла речь выше) можно считать практически безынерционными. Как бы быстро мы не изменяли напряжение, приложенное к элементу, ток успевает следовать за этими изменениями. Иначе говоря, характеристика остается одной и той же как при медленном изменении воздействия (в частности при постоянном токе), так и при быстром изменении его.

В инерционных активных сопротивлениях, например, термосопротивлениях, называемых иначе термисторами, дело обстоит иначе. При прохождении тока через термистор последний нагревается, с изменением тока меняется температура элемента, а значит, и величина его сопротивления, результатом чего и является нелинейность вольт-амперной характеристики. Ясно, что при быстром изменении тока, например, при питании элемента переменным напряжением сколько-нибудь значительной частоты (даже $f = 50$ *гц*), температура элемента вследствие тепло-

вой инерции не успевает следовать за изменениями тока; она устанавливается равной величине, определяемой действующим значением тока $I_д$. Поэтому в пределах одного периода параметры элемента можно полагать неизменными и, стало быть, сам элемент — линейным. Если же изменить действующее значение напряжения $U_д$ (при гармоническом напряжении — его амплитуду), то температура, а вместе с ней и параметры сопротивления, изменятся.

Таким образом, для инерционных сопротивлений характерны: линейная зависимость между мгновенными значениями тока и напряжения и вместе с тем нелинейная зависимость между их действующими значениями.

Известны два основных вида термосопротивлений: полупроводниковые и металлические.

Для изготовления полупроводниковых термосопротивлений (ПТС) применяются смеси различных окислов металлов, таких, как окись кобальта Co_2O_3, двуокись титана TiO_2, окись магния MgO и др. Смеси подвергаются специальной технологической обработке, в результате чего образуется тестообразная полупроводниковая паста. Из нее формуются рабочие тела ПТС в виде цилиндров, трубок или нитей, которые затем подвергаются отжигу в электропечах.

Эффективное сопротивление ПТС

$$R_e = \frac{U_д}{I_д} = \frac{1}{S_e}$$

с увеличением температуры резко уменьшается (рис. 10-13, *а*).

Температурная характеристика ПТС приближенно описывается выражением

$$R_{eT} = R_{e\infty} e^{\frac{B}{T}}, \qquad (10\text{-}37)$$

где R_{eT} — сопротивление ПТС при данной температуре;
T — температура, °К.
$R_{e\infty}$ и B — постоянные для данного ПТС коэффициенты.

Постоянная B для промышленных образцов ПТС лежит в пределах 1000÷6000° К.

Величина $R_{e\infty}$ представляет собой, как это следует из (10-37), предельное значение сопротивления при $T \to \infty$.

Если известны величины сопротивлений R_{e1} и R_{e2}, соответствующие температурам T_1 и T_2, постоянные B и $R_{e\infty}$ могут быть рассчитаны по формулам:

$$B = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} \ln \frac{R_{e1}}{R_{e2}},$$

$$R_{e\infty} = R_{e1} e^{-\frac{B}{T_1}}.$$

Обращенная вольт-амперная кривая ПТС

$$U_д = f(I_д)$$

имеет характерную форму, изображенную на рис. 10-13, *б*.

При малых токах тепловое действие их пренебрежимо мало, температура элемента остается практически неизменной, и зависимость между напряжением и током близка к прямой линии. Однако с увеличением тока начинает

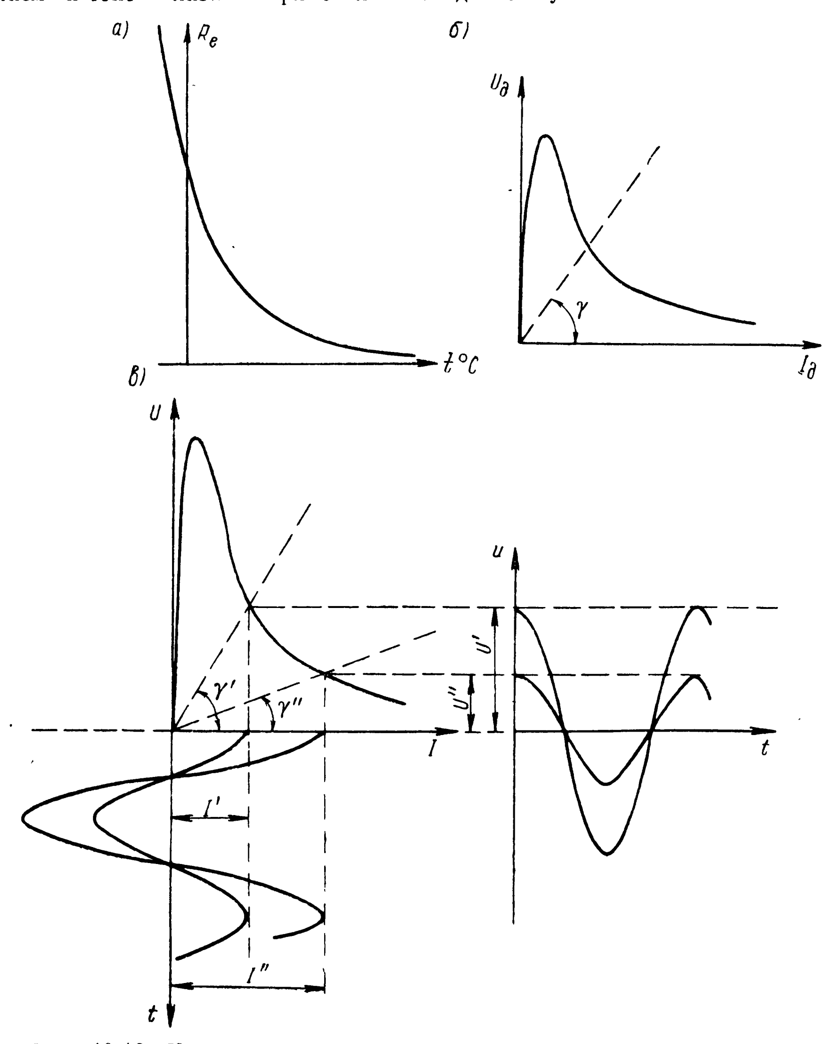


Рис. 10 13. Характеристики полупроводниковых термосопротивлений.

сказываться производимый им нагрев элемента, температура последнего повышается и сопротивление уменьшается. В результате напряжение на ПТС

$$U_д = I_д R_e$$

при некотором значении тока может достигать максимального значения, после чего с увеличением $I_д$ падение напряжения уменьшается, так как преобладающую роль начинает играть уменьшение сопротивления, вызванное повышением температуры.

Величина эффективного сопротивления является функцией тока

$$R_e = R_e(I_д).$$

Для каждого значения тока $I_д$ сопротивление R_e пропорционально тангенсу угла γ между секущей, проведенной из начала координат в данную точку характеристики, и осью абсцисс.

Если через ПТС проходит ток гармонической формы, например, с амплитудой I_1, то, поскольку для мгновенных значений тока сопротивление можно считать линейным, напряжение на нем имеет также гармоническую форму. Так как действующие значения гармонических величин пропорциональны их амплитудам, амплитуда напряжения

$$U_1 = R_e(I_1)\, I_1 = \frac{I_1}{S_e(I_1)}.$$

Характеристика, связывающая амплитудные значения напряжения $U = \sqrt{2}\, U_д$ и тока $I = \sqrt{2}\, I_д$ на рис. 10-13, *в*. Она отличается от кривой рис. 10-13, *б* только масштабом координатных осей.

На рис. 10-13, *в* построены также кривые мгновенных значений токов и напряжений. Мгновенные значения напряжения, которое можно считать гармоническим, находятся из прямой, проведенной из начала координат в данную точку характеристики (соответствующую заданному значению I' амплитуды тока).

Тангенс угла $\gamma = \gamma'$ наклона секущей пропорционален эффективному сопротивлению $R_e(I)$.

При иной амплитуде тока, например I'', эффективное сопротивление имеет соответственно другую величину, и секущая проходит под иным углом γ''.

Так как напряжение гармоническое, коэффициент нелинейных искажений $k_f = 0$ и согласно (10-26) эффективная крутизна равна средней крутизне: $S_e = S_{ср}$ и, значит, $R_e = R_{ср}$.

Итак, для инерционных нелинейных элементов сопротивление в течение одного периода («мгновенное сопротивление») остается неизменным. Однако оно является функцией амплитуды тока и по величине своей совпадает с эффективным (оно же среднее) сопротивлением.

В отличие от полупроводниковых термосопротивлений **металлические термисторы** обладают тем свойством, что величина их сопротивления с увеличением температуры не уменьшается, а возрастает. Примером металлического термосопротивления может служить **барретор**, представляющий собой железную нить, помещенную в водороде. Зависимость $i(u)$ для барретора имеет вид кривой с убывающей крутизной (см. рис. 10-21, *б*).

Инерционные нелинейные элементы иногда называют **квазилинейными**, подчеркивая тем самым их линейность для мгновенных значений тока. Для расчета цепей, содержащих инерционные элементы, может быть применен квазилинейный метод.

10-5. Нелинейные цепи постоянного тока

Рассмотрим стационарный режим цепи (рис. 10-14), состоящей из источника постоянной э. д. с. и двух последовательно соединенных нелинейных сопротивлений. Заметим, что одно из них можно рассматривать как внутреннее сопротивление генератора.

Напряжения и токи обозначаются здесь малыми буквами, так как изложенное в этом параграфе справедливо не только для постоянного тока, но и для мгновенных значений переменного тока (если реактивными элементами цепи можно пренебречь).

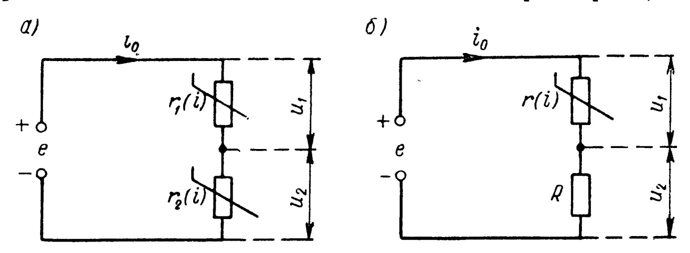


Рис. 10-14. Цепь последовательно соединенных нелинейных сопротивлений (*а*) и последовательно соединенных нелинейного и линейного сопротивлений (*б*).

Элементы схемы r_1 и r_2 имеют, вообще говоря, разные вольт-амперные характеристики

$$i = f_1(u) \tag{10-38}$$

и

$$i = f_2(u), \tag{10-39}$$

примерный вид которых показан на рис. 10-15, *а* и 10-15, *б*.

Уравнение второго закона Кирхгофа для цепи можно записать в виде

$$e = u_1 + u_2. \tag{10-40}$$

В соответствии с определением статических параметров цепи

$$u_1 = r_1(i_0)\, i_0,$$
$$u_2 = r_2(i_0)\, i_0,$$

где $r_1(i_0)$ и $r_2(i_0)$ — статические сопротивления элементов, являющиеся некоторыми функциями проходящего в цепи тока i_0.

Из (10-40) следует, что ток

$$i_0 = \frac{e}{r_1(i_0) + r_2(i_0)}. \tag{10-41}$$

Хотя принципиально ток может быть найден по формуле (10-41), представляющей собой не что иное как выражение закона Ома, однако это связано с существенными трудностями, поскольку сами сопротивления $r_1(i_0)$ и $r_2(i_0)$ являются функциями тока и задача сводится к решению нелинейного алгебраического уравнения. Главное же заключается в том, что обычно точные выражения для функций $r_1(i)$ и $r_2(i)$ неизвестны и эти функции могут быть только аппроксимированы с той или иной точностью.

Если вольт-амперные характеристики заданы своими графиками (рис. 10-15, *а* и *б*), то для расчета цепи может быть применен следующий графический прием.

Обе характеристики строим (рис. 10-15, *в*) в одной координатной системе (i, u). Для одной из характеристик — $i = f_1(u)$ — началом координат является точка O и напряжения откладываются вправо от этой точки. Для другой характеристики — $i = f_2(u)$ — началом координат служит точка O' оси абсцисс, где $u = e$, и значения напряжений откладываются влево от этой точки. Кривые пересекаются в точке m, которая и определяет режим цепи.

Действительно, определяемый этой точкой ток i_0, общий для обоих сопротивлений, удовлетворяет уравнениям характеристик (10-38) и (10-39). Вместе с тем определяемые точкой m напряжения

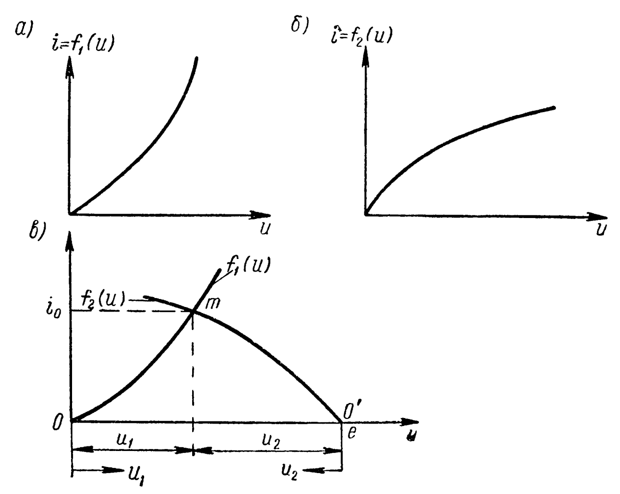


Рис. 10-15. Графический расчет цепи последовательно соединенных нелинейных сопротивлений.

u_1 и u_2 удовлетворяют уравнению закона Кирхгофа (10-40). Таким путем находятся все величины — i_0; u_1; u_2, — характеризующие режим цепи.

В том частном случае, когда одно из сопротивлений (например, $r_2 = R$ — см. рис. 10-14, *б*) линейно, графическое построение принимает вид рис. 10-16. Здесь показано пересечение нелинейной характеристики $i = f_1(u)$ и прямой, проведенной из точки O' под углом $\varphi = \operatorname{arcctg} R$. Предполагается, что масштабы, в которых отложены по координатным осям токи и напряжения, равны между собой ($m_i = m_u$). Вообще же $\varphi = \operatorname{arcctg}\left(\frac{m_i}{m_u} R\right)$.

Чем меньше сопротивление R, тем больше угол φ и тем больше при прочих равных условиях ток в цепи (см. пунктирную прямую на рис. 10-16).

Существенный интерес может представлять зависимость тока в цепи последовательно соединенных нелинейного и линейного со-

противлений (см. рис. 10-14, *б*) от напряжения на входе (э. д. с.) $i = i(e)$. Эту зависимость называют **рабочей** (или динамической) **характеристикой**.

Для графического построения рабочей характеристики (рис. 10-17) наносят в координатной системе i, u характеристику нелинейного элемента $i = f_1(u)$ и из точек оси абсцисс e_1; e_2; e_3; ... проводят параллельные прямые под углом $\varphi = \operatorname{arctg} R$, так же, как это делалось на рис. 10-16. Точки пересечения прямых с кривой

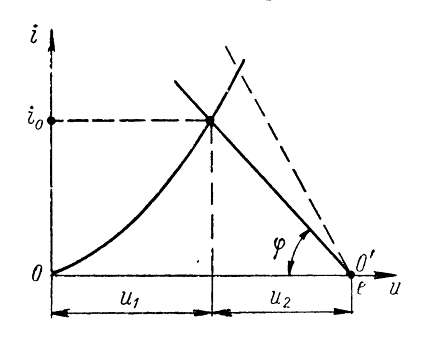


Рис. 10-16. Графический расчет цепи последовательно соединенных линейного и нелинейного сопротивлений.

Рис. 10-17. Графический расчет рабочей характеристики.

дают значения токов i_1, i_2, i_3, ..., соответствующие разным значениям э. д. с., после чего легко определяются точки *1*, *2*, *3*, ... искомой рабочей характеристики.

Из (10-40) следует, что

$$de = du_1 + du_2.$$

В соответствии с определением дифференциальных параметров цепи бесконечно малое приращение напряжения на нелинейном элементе

$$du_1 = r_d\, di = \frac{1}{S}\, di.$$

Что касается изменения напряжения на линейном сопротивлении, то оно будет

$$du_2 = R\, di.$$

Поэтому

$$de = (r_d + R)\, di = \left(\frac{1}{S} + R\right) di. \qquad (10\text{-}42)$$

Отсюда получим, что крутизна рабочей характеристики

$$S_{\text{раб}} = \frac{1}{\frac{1}{S} + R} = \frac{S}{1 + SR}. \qquad (10\text{-}43)$$

Формула (10-43) дает соотношение между рабочей крутизной $S_{раб}$ и крутизной статической характеристики элемента S. В частности, при $R = 0$ рабочая характеристика сливается со статической и $S_{раб} = S$.

Подобно изложенному выше может быть решена и задача расчета цепи в случае параллельного соединения нелинейных сопротивлений (рис. 10-18, *а*).

Согласно первому закону Кирхгофа $i_0 = i_1 + i_2$.

Если заданным является ток питания i_0, а требуется определить токи i_1 и i_2 и общее для обоих элементов напряжение u_0, можно поступить следующим

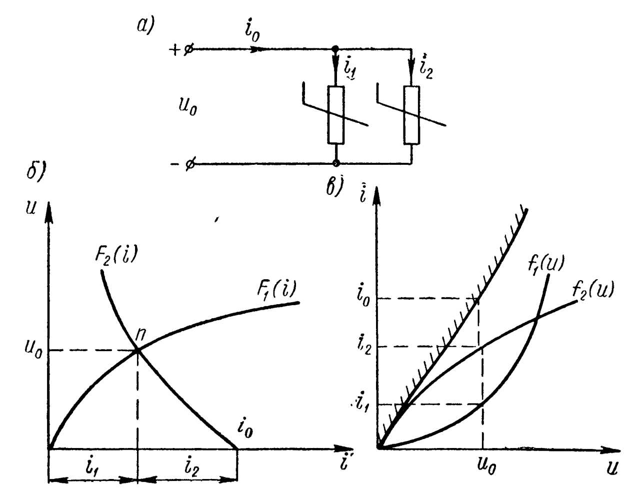


Рис. 10-18. Цепь параллельно соединенных нелинейных сопротивлений.

образом. На одном графике строятся обращенные вольт-амперные характеристики элементов:

$$u = F_1(i) \text{ и } u = F_2(i),$$

причем для одной из характеристик началом координат служит точка $i = i_0$ (рис. 10-18, *б*). Точка их пересечения n определяет величины u_0, i_1 и i_2.

Если же задано входное напряжение u_0, целесообразно построить кривые вольт-амперных характеристик (рис. 10-18, *в*)

$$i = f_1(u) \text{ и } i = f_2(u).$$

Ординаты характеристик для заданного u_0 дают значения токов i_1 и i_2, а сумма этих ординат — величину питающего тока i_0.

На рис. 10-18, *в* отштрихованная кривая представляет найденную таким путем рабочую характеристику $i_0 = f(u_0)$. Если одно из сопротивлений линейно, рабочая характеристика оказывается по форме своей близкой к прямой линии и тем в большей степени, чем меньше линейное сопротивление.

10-6. Стабилизаторы напряжения

В силу ряда причин напряжение на зажимах реальных генераторов не остается в эксплуатации неизменным, а колеблется в тех или иных пределах около своего номинального значения. Задача

стабилизации напряжения заключается в том, чтобы, несмотря на эти колебания, напряжение на зажимах нагрузки оставалось по возможности неизменным. С этой целью между источником питания $Г$ и сопротивлением нагрузки $R_н$ включается четырехполюсник C, выполняющий роль стабилизатора напряжения, т. е. автоматически поддерживающий неизменным напряжение $u_{вых}$ (рис. 10-19).

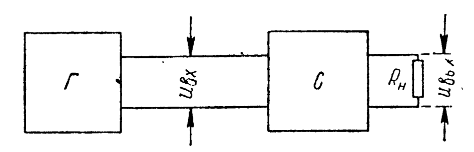


Рис. 10-19. Блок-схема системы стабилизации напряжения.

Степень стабилизации напряжения характеризуется величиной коэффициента стабилизации σ, равного отношению относительного изменения входного напряжения $\Delta u_{вх}/u_{вх}$ к относительному изменению напряжения на выходе $\Delta u_{вых}/u_{вых}$, т. е.

$$\sigma = \frac{\dfrac{\Delta u_{вх}}{u_{вх}}}{\dfrac{\Delta u_{вых}}{u_{вых}}} = \frac{\Delta u_{вх}}{\Delta u_{вых}} \cdot \frac{u_{вых}}{u_{вх}}. \qquad (10\text{-}44)$$

Чем больше коэффициент σ, тем совершеннее стабилизатор напряжения.

Если четырехполюсник C составлен из линейных элементов, то в силу применимости к ним принципа суперпозиции эффект стабилизации напряжения принципиально не может быть достигнут, т. е. $\sigma = 1$.

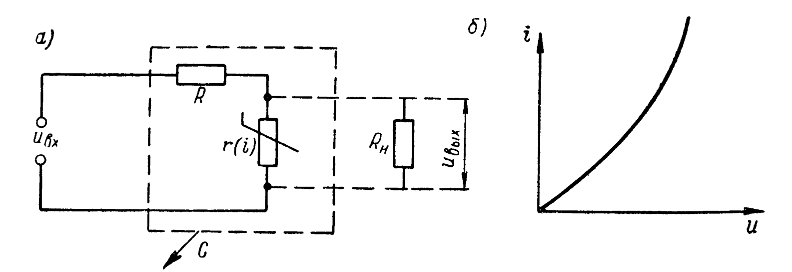


Рис. 10-20. Стабилизатор напряжения на нелинейном элементе с нарастающей крутизной.

Рассмотрим некоторые простейшие схемы стабилизаторов, основанных на использовании нелинейных активных сопротивлений.

Пусть к источнику $u_{вх}$ (рис. 10-20, *а*) подключена цепь последовательно соединенных линейного сопротивления R, которое назовем балластным, и нелинейного сопротивления $r(i)$, имеющего характеристику с нарастающей крутизной (рис. 10-20, *б*), — например, варистор, полупроводниковое термосопротивление или газонапол-

ненная лампа. Разность потенциалов на зажимах сопротивления $r(i)$ является выходным напряжением $u_{вых}$. Имеем

$$\frac{u_{вх}}{u_{вых}} = \frac{r+R}{r}, \tag{10-45}$$

где r — статическое сопротивление нелинейного элемента.

В соответствии с (10-42)

$$\frac{\Delta u_{вх}}{\Delta u_{вых}} \approx \frac{r_d + R}{r_d}. \tag{10-46}$$

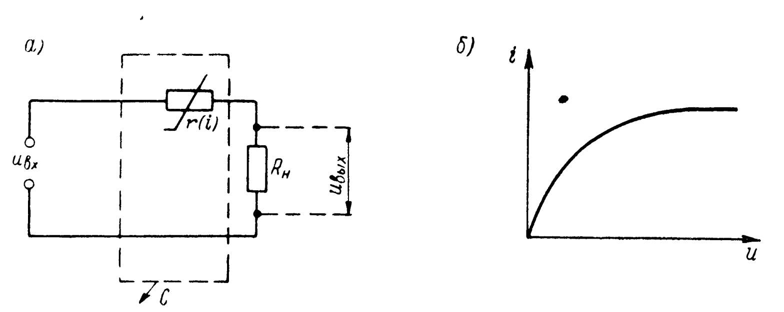


Рис. 10-21. Стабилизатор напряжения на нелинейном элементе с убывающей крутизной.

Поделив (10-46) на (10-45), найдем коэффициент стабилизации для рассматриваемой схемы

$$\sigma = \frac{r_d + R}{r + R} \cdot \frac{r}{r_d} = \frac{1 + \dfrac{R}{r_d}}{1 + \dfrac{R}{r}}. \tag{10-47}$$

Отсюда следует, что для получения большого σ необходимо, во-первых, применение такого нелинейного элемента, у которого $r_d \ll r$ (этому требованию удовлетворяет характеристика вида рис. 10-20, *б*), и, во-вторых, достаточно большое балластное сопротивление: $R \gg r$.

Если $R \to 0$, то $u_{вых} \approx u_{вх}$, и стабилизация, естественно, отсутствует, т. е. $\sigma = 1$. Необходимость большого балластного сопротивления является недостатком данной схемы, так как на этом сопротивлении теряется значительная часть напряжения источника питания и бесполезно расходуется мощность.

Формула (10-47) справедлива, если сопротивление нагрузки отсутствует ($R_н = \infty$). Наличие сопротивления $R_н$ (рис. 10-20, *а*) маскирует нелинейные свойства цепи и тем в большей степени, чем меньше сопротивление нагрузки $R_н$. Поэтому для получения достаточно высокого коэффициента стабилизации необходимо, чтобы сопротивление нагрузки было возможно бóльшим ($R_н \gg r$).

Иной вариант схемы стабилизации напряжения основан на использовании нелинейного сопротивления с убывающей крутиз-

ной (рис. 10-21). Здесь полезное сопротивление нагрузки $R_н$ включается последовательно с нелинейным элементом $r(i)$.

Для определения коэффициента стабилизации этой схемы имеем:

$$\frac{u_{вх}}{u_{вых}} = \frac{r + R_н}{R_н}, \tag{10-48}$$

$$\frac{\Delta u_{вх}}{\Delta u_{вых}} \approx \frac{r_d + R_н}{R_н}, \tag{10-49}$$

откуда, поделив (10-49) на (10-48), получим

$$\sigma = \frac{r_d + R_н}{r + R_н} = \frac{1 + \frac{r_d}{R_н}}{1 + \frac{r}{R_н}}. \tag{10-50}$$

Высокий коэффициент стабилизации будет обеспечен в том случае, если в схеме, во-первых, применен нелинейный элемент, у которого $r_d \gg r$ (этому требованию отвечает характеристика вида рис. 10-21, *б*) и, во-вторых, сопротивление нагрузки достаточно мало: $R_н \ll r$.

В схемах стабилизаторов тока часто используется барретор. Его вольт-амперная характеристика для действующих значений тока и напряжения имеет вид рис. 10-21, *б*.

10-7. Нелинейное активное сопротивление при гармоническом воздействии

Нелинейные активные сопротивления, как и всякие нелинейные элементы, обладают свойством органического преобразования частоты.

Если к нелинейному сопротивлению подведено гармоническое напряжение частоты ω последовательно с постоянным напряжением смещения U_0 (рис. 10-22), то ток в цепи имеет форму, отличную от синусоиды, и может быть представлен в виде ряда Фурье:

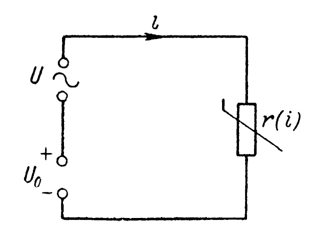


Рис. 10-22. Нелинейное сопротивление при гармоническом воздействии.

$$i = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos(k\omega t - \psi_k), \tag{10-51}$$

где I_0 — постоянная составляющая тока;

$I_1;\ I_2;\ I_3;\ \ldots;\ I_k$ — амплитуды первой, второй, третьей и т. д. гармоник;

$\psi_1;\ \psi_2;\ \psi_3;\ \ldots;\ \psi_k$ — начальные фазы гармонических составляющих.

Исследование цепи сводится к расчету всех составляющих тока при заданных величинах амплитуды переменного напряжения U

и постоянного напряжения смещения U_0. Эти расчеты могут быть произведены различными методами. Рассмотрим два из них: метод степенного полинома и метод А. И. Берга (кусочно-линейной аппроксимации).

а) Метод степенного полинома

Вольт-амперная характеристика нелинейного сопротивления может быть аппроксимирована степенным полиномом вида (10-9) или (10-10). В нашем случае $y \equiv i$; $x \equiv u$; $x_0 \equiv u_0$.

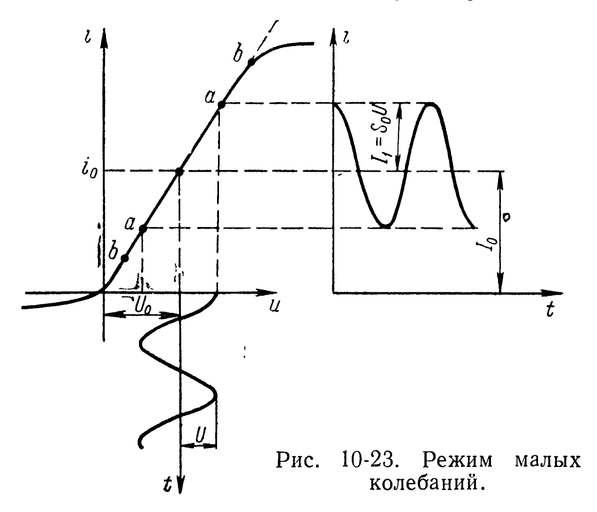


Рис. 10-23. Режим малых колебаний.

Применив разложение вида (10-9) в окрестности напряжения, равного напряжению смещения $u_0 = U_0$, получим приближенное уравнение вольт-амперной характеристики

$$i = a_0 + a_1(u - u_0) + a_2(u - u_0)^2 + a_3(u - u_0)^3 + \ldots$$
$$+ a_n(u - u_0)^n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k(u - u_0)^k. \tag{10-52}$$

В этом выражении $a_0 = i_0$ — так называемый «ток покоя», т. е. ток, проходящий через элемент, когда на него воздействует только постоянное напряжение u_0 (рис. 10-23);

$$i_0 = \frac{u_0}{r(u_0)},$$

где $r(u_0)$ — статическое сопротивление в исходной точке (при $u = u_0$).

Коэффициент

$$a_1 = S_0 = \frac{1}{r_d(u_0)}$$

равен крутизне в исходной точке или обратной величине дифференциального сопротивления $r_d(u_0)$.

Так как в нашем случае $u = U\cos\omega t + U_0$, и разложение в ряд произведено относительно напряжения, равного смещению ($u_0 = U_0$), то мгновенное значение тока

$$i = i_0 + S_0 U\cos\omega t + a_2U^2\cos^2\omega t + a_3U^3\cos^3\omega t + \ldots$$
$$+ a_nU^n\cos^n\omega t = i_0 + \sum_{k=1}^{n} a_kU^k\cos^k\omega t. \qquad (10\text{-}53)$$

Рассмотрим сначала случай так называемых малых колебаний, когда переменное напряжение настолько мало, что рабочий участок характеристики может быть принят за отрезок прямой линии (*a-a* на рис. 10-23), и членами полинома второй и более высоких степеней можно пренебречь. Тогда

$$i \approx i_0 + S_0U\cos\omega t. \qquad (10\text{-}54)$$

Отсюда, а также из графического построения, выполненного на рис. 10-23, видно, что в случае малых колебаний ток содержит только два слагаемых: постоянную составляющую и гармоническое колебание основной частоты ω.

Постоянная слагающая, обозначенная в (10-51) как I_0, равна току покоя $I_0 = i_0$, т. е. как в статическом (в отсутствии переменного напряжения), так и в динамическом режимах через сопротивление проходит один и тот же постоянный ток.

Так как $i_0 = \frac{u_0}{r(u_0)}$, то

$$I_0 = \frac{U_0}{r(U_0)}. \qquad (10\text{-}55)$$

Поэтому иногда статическое сопротивление называют с о п р о т и в л е н и е м п о с т о я н н о м у т о к у.

Амплитуда тока основной частоты, которая обозначена в (10-51) через I_1,

$$I_1 = S_0U = \frac{U}{r_d(U_0)}. \qquad (10\text{-}56)$$

Поэтому дифференциальное сопротивление часто называют с о п р о т и в л е н и е м п е р е м е н н о м у т о к у.

При прочих равных условиях ($U = \text{const}$) изменение напряжения смещения U_0 влияет не только на величину постоянной слагающей тока, но и на амплитуду переменной слагающей I_1. Однако, если изменение U_0 таково, что рабочий участок остается в пределах линейной части характеристики (*b-b* на рис. 10-23), то в этих условиях $S_0 = \text{const}$ и величина I_1 от смещения не зависит.

Итак, в режиме малых колебаний

$$i \approx I_0 + I_1 \cos \omega t \text{ и } I_0 \approx i_0.$$

Иная картина наблюдается в режиме больших колебаний, когда амплитуда переменного напряжения настолько велика, что пренебрегать членами высших степеней ряда (10-53) недопустимо; рабочий участок характеристики в этом случае выходит за пределы той части, которую можно полагать линейной (рис. 10-24), и форма тока отличается от косинусоиды. Продукты нелинейности количественно определяются членами полинома (10-53) вида $a_k U^k \cos^k \omega t$, где $k \geqslant 2$.

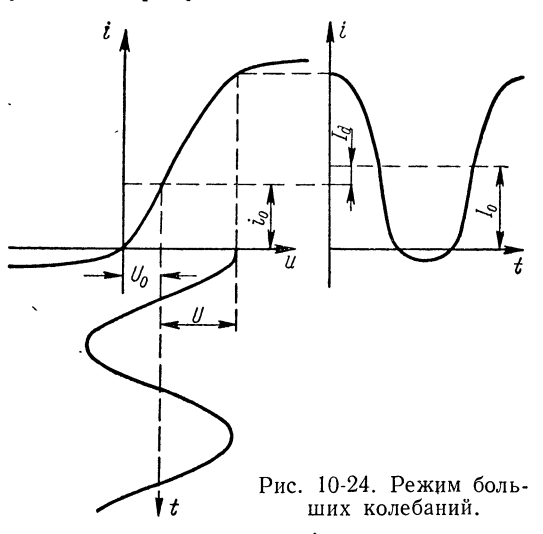


Рис. 10-24. Режим больших колебаний.

Для определения амплитуд гармонических составляющих тока воспользуемся известными из тригонометрии формулами кратных дуг и сведем в табл. 10-2 выражения слагаемых ряда (10-53) для разных значений $k \geqslant 2$.

Из таблицы следует, что члены четных степеней ряда ($k = 2m$) дают слагающие всех четных гармоник вплоть до $2m$-й, а также дополнительные постоянные слагающие; члены же нечетных степеней ($k = 2m + 1$) приводят к появлению составляющих всех нечетных гармоник вплоть до $(2m + 1)$-й, а также дополнительных слагаемых основной частоты (первой гармоники). Если приведенные в табл. 10-2 выражения подставить в ряд (10-53), нетрудно получить значения результирующих амплитуд составляющих ряда Фурье I_0, I_1, I_2, ... и свести их в табл. 10-3.

Из этой таблицы можно сделать важные выводы.

1. В отличие от малых колебаний, в режиме больших колебаний постоянная слагающая I_0 не равна току покоя i_0. В зависимости от знака и величины коэффициентов a_2, a_4, ..., a_{2m}, ... ток I_0 может быть больше или меньше, чем i_0.

На рис. 10-24 показан случай, когда $I_0 > i_0$. Разность

$$I_d = I_0 - i_0 \tag{10-57}$$

называется **током детекторного эффекта**. Этот термин происходит от английского глагола to detect — обнаруживать.

Различие в величинах постоянного тока в динамическом I_0 и статическом i_0 режимах зависит при прочих равных условиях

от амплитуды переменного напряжения U. Поэтому разность $I_0 - i_0$ дает возможность обнаружить переменное напряжение, действующее в цепи, и судить о его величине.

Таблица 10-2

Слагаемые тока через нелинейное сопротивление

k	$a_k U^k \cos^k \omega t$	Частоты
0	$a_0 = i_0$	0
1	$a_1 U \cos \omega t = S_0 U \cos \omega t$	ω
2	$a_2 U^2 \cos^2 \omega t = \frac{a_2}{2} U^2 + \frac{a_2}{2} U^2 \cos 2\omega t$	0; 2ω
3	$a_3 U^3 \cos^3 \omega t = \frac{3}{4} a_3 U^3 \cos \omega t + \frac{1}{4} a_3 U^3 \cos 3\omega t$	ω; 3ω
4	$a_4 U^4 \cos^4 \omega t = \frac{3}{8} a_4 U^4 + \frac{a_4}{2} U^4 \cos 2\omega t + \frac{a_4}{8} U^4 \cos 4\omega t$	0; 2ω; 4ω
5	$a_5 U^5 \cos^5 \omega t = \frac{5}{8} a_5 U^5 \cos \omega t + \frac{5}{16} a_5 U^5 \cos 3\omega t + \frac{1}{16} a_5 U^5 \cos 5\omega t$	ω; 3ω; 5ω

2. Нелинейность цепи сказывается не только в том, что в составе тока имеются высшие гармонические, но также и в том, что между амплитудой первой гармоники и амплитудой приложенного напряжения нет линейной зависимости, т. е. средняя крутизна

$$S_{ср} = \frac{I_1}{U}$$

сама зависит от амплитуды переменного напряжения U.

Из табл. 10-3 следует, что

$$S_{ср} = S_0 + \frac{3}{4} a_3 U^2 + \frac{5}{8} a_5 U^4 + \ldots + \frac{(2m+1)!}{2^{2m} m! (m+1)!} a_{2m+1} U^{2m} + \ldots \qquad (10\text{-}58)$$

В некоторых случаях можно ограничиться первыми двумя членами этого ряда, т. е. считать

$$S_{ср} = S_0 + \frac{3}{4} a_3 U^2. \qquad (10\text{-}59)$$

Таблица 10-3

Амплитуды слагаемых тока через нелинейное сопротивление

Номера гармоник	Амплитуды составляющих ряда Фурье
0	$I_0 = i_0 + \frac{1}{2} a_2 U^2 + \frac{3}{8} a_4 U^4 + \frac{5}{16} a_6 U^6 + \ldots + \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} a_{2m} U^{2m} + \ldots$
1	$I_1 = S_0 U + \frac{3}{4} a_3 U^3 + \frac{5}{8} a_5 U^5 + \ldots + \frac{(2m+1)!}{2^{2m} m!\,(m+1)!} a_{2m+1} U^{2m+1} + \ldots$
2	$I_2 = \frac{1}{2} a_2 U^2 + \frac{1}{2} a_4 U^4 + \frac{15}{32} a_6 U^6 + \ldots + \frac{(2m+2)!}{2^{2m+1} m!\,(m+2)!} a_{2m+2} U^{2m+2} + \ldots$
3	$I_3 = \frac{1}{4} a_3 U^3 + \frac{5}{16} a_5 U^5 + \frac{21}{64} a_7 U^7 + \ldots + \frac{(2m+3)!}{2^{2m+2} m!\,(m+3)!} a_{2m+3} U^{2m+3} + \ldots$
4	$I_4 = \frac{1}{8} a_4 U^4 + \frac{3}{16} a_6 U^6 + \frac{7}{32} a_8 U^8 + \ldots + \frac{(2m+4)!}{2^{2m+3} m!\,(m+4)!} a_{2m+4} U^{2m+4} + \ldots$
5	$I_5 = \frac{1}{16} a_5 U^5 + \frac{7}{64} a_7 U^7 + \frac{9}{64} a_9 U^9 + \ldots + \frac{(2m+5)!}{2^{2m+4} m!\,(m+5)!} a_{2m+5} U^{2m+5} + \ldots$
...	. . . .
k	$I_k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+k)!}{2^{2m+k-1} m!\,(m+k)!} a_{2m+k} U^{2m+k} \ldots$
...	. . . .

В § 10-2 отмечалось, что средняя крутизна в зависимости от вида характеристики может быть либо больше, либо меньше, чем крутизна в исходной точке. Из (10-59) видно, что если $a_3 > 0$ (характеристика с нарастающей крутизной), то $S_{ср} > S_0$, а если $a_3 < 0$ (характеристика с убывающей крутизной), $S_{ср} < S_0$. Во всех случаях при $U \to 0$ (т. е. при переходе к режиму малых колебаний) средняя крутизна стремится к крутизне в исходной точке ($S_{ср} \to S_0$).

3. Амплитуда тока k-й гармоники зависит от членов полинома k-й и более высоких степеней и не зависит от членов разложения, имеющих порядок меньший, чем k.

Произведенный анализ показывает, что при заданном воздействии характер и величина продуктов нелинейности определяются коэффициентами разложения a_1, a_2, ..., a_k, ... Последние в свою очередь зависят от исходного напряжения смещения $U_0 = u_0$, относительно которого выполнено разложение в ряд. В частности, при $U_0 = 0$, т. е. при использовании полинома вида (10-10) вместо коэффициентов a_1, a_2, ..., a_k, ... в расчетах слагающих тока должны участвовать коэффициенты b_1, b_2, ..., b_k, ... [см. (10-10)].

Таким образом, изменение напряжения смещения приводит к изменению характера и величины продуктов нелинейности, хотя сам нелинейный элемент, входящий в состав цепи, остается неизменным.

Метод степенного полинома позволяет рассчитать величины всех составляющих тока, если известны уравнение статической характеристики и питающие цепь напряжения. Этим методом целесообразно пользоваться в тех случаях, когда рабочий участок характеристики не слишком велик, ибо в противном случае уравнение, аппроксимирующее с той же точностью вольт-амперную характеристику, должно содержать большое число членов, и расчеты получаются чрезмерно громоздкими.

б) Метод кусочно-линейной аппроксимации (метод А. И. Берга)

Этот метод удобно применять, когда вольт-амперная характеристика может быть удовлетворительно аппроксимирована двумя прямолинейными отрезками (рис. 10-25).

На рисунке построена кривая мгновенных значений тока через сопротивление, когда к последнему подведено напряжение смещения U_0 и косинусоидальное напряжение с амплитудой U. При выбранных величинах U и U_0 ток имеет форму отдельных импульсов, представляющих собой «отсеченные» отрезки косинусоиды, отделенные друг от друга паузами. Длительность импульсов будем выражать в электрических градусах. Назовем *углом отсечки* половину выраженной в градусах длительности импульса тока. Угол отсечки может изменяться в пределах от $\theta = 0$, когда ток вообще отсутствует, до $\theta = \pi$, когда ток проходит непрерывно и пауз нет.

Для того чтобы найти аналитическое выражение временной диаграммы тока $i = i(\omega t)$, запишем уравнение участка характеристики II, воспользовавшись формулой (10-11). В нашем случае $x \equiv u$; $y \equiv i$; $x_р \equiv u_р$. Поэтому

$$i = S(u - u_р). \qquad (10\text{-}60)$$

Мгновенное значение напряжения

$$u = U \cos \omega t + U_0.$$

Подставив его в (10-60), найдем

$$i = S(U\cos\omega t + U_0 - u_p). \qquad (10\text{-}61)$$

Из определения угла отсечки следует, что при $\omega t = \theta$ ток $i = 0$; значит,

$$0 = S(U\cos\theta + U_0 - u_p). \qquad (10\text{-}62)$$

Отсюда

$$\cos\theta = -\frac{U_0 - u_p}{U}, \qquad (10\text{-}63)$$

т. е. угол отсечки однозначно определяется, если известны напряжения питания U_0 и U и параметр характеристики u_p («раствор» ха-

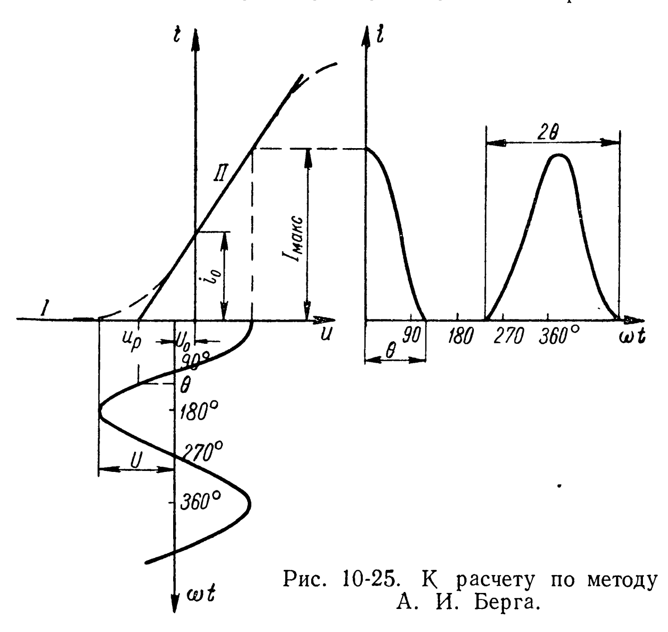


Рис. 10-25. К расчету по методу А. И. Берга.

рактеристики). Последняя величина может быть отрицательной, положительной или равной нулю в зависимости от принципа действия и конструкции нелинейного элемента. Величины U_0 и u_p входят в формулу (10-63) со свойственными им знаками.

Вычитая (10-62) из (10-61), получим еще одно выражение мгновенного значения тока

$$i = SU(\cos\omega t - \cos\theta). \qquad (10\text{-}64)$$

Если положим здесь $\omega t = 0$, найдем максимальное значение тока

$$I_{макс} = SU(1 - \cos\theta). \qquad (10\text{-}65)$$

Наконец, поделив (10-64) на (10-65), получим нормированное (относительно $I_{\text{макс}}$) значение тока

$$\frac{i}{I_{\text{макс}}} = \frac{\cos \omega t - \cos \theta}{1 - \cos \theta}. \tag{10-66}$$

Таким образом, для определения мгновенного значения нормированного тока достаточно знать только угол отсечки.

Теперь, используя (10-66), нетрудно рассчитать постоянную составляющую и амплитуды всех гармоник тока.

Нормированная постоянная составляющая тока

$$\alpha_0 = \frac{I_0}{I_{\text{макс}}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{i}{I_{\text{макс}}} d\omega t. \tag{10-67}$$

Приняв во внимание, что ток имеет отличные от нуля значения только в пределах углов $0 \leqslant \omega t \leqslant \theta$, и подставив (10-66) в (10-67), найдем, что

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\cos \omega t - \cos \theta}{1 - \cos \theta} d\omega t = \frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{\pi (1 - \cos \theta)}. \tag{10-68}$$

Величину α_0 обычно называют **коэффициентом постоянной составляющей**.

Аналогично определяется нормированная амплитуда первой гармоники, иначе — **коэффициент первой гармоники**

$$\alpha_1 = \frac{I_1}{I_{\text{макс}}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{i}{I_{\text{макс}}} \cos \omega t \, d\omega t = \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{\pi (1 - \cos \theta)}, \tag{10-69}$$

а также коэффициенты всех последующих гармоник.

Для коэффициента k-й гармоники ($k > 1$) нетрудно получить общее выражение

$$\alpha_k = \frac{I_k}{I_{\text{макс}}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin k\theta \cos \theta - k \cos k\theta \sin \theta}{k (k^2 - 1)(1 - \cos \theta)}. \tag{10-70}$$

Важно подчеркнуть, что все коэффициенты разложения зависят только от угла отсечки. Значения коэффициентов α_0; α_1; α_2; ... в функции угла отсечки θ рассчитаны, табулированы и могут быть представлены в виде графиков рис. 10-26.

Обычно возможные режимы цепи принято классифицировать по величине угла отсечки θ, т. е. в зависимости от формы тока. Режи-

Таблица 10-4

Режимы работы нелинейного элемента

Класс	θ	Форма тока	α_0	α_1	Примечания
A	$\theta = \pi$		0,5	0,5	$\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \ldots = 0$
AB	$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$		$0{,}318 < \alpha_0 < 0{,}5$	$0{,}5 < \alpha_1 < 0{,}52$	
B	$\theta = \frac{\pi}{2}$		0,318	0,5	$\alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_7 = \ldots = 0$
C	$\theta < \frac{\pi}{2}$		$< 0{,}318$	$< 0{,}5$	

мом класса А называют такой режим, при котором $\theta = \pi$. При этом ток содержит только постоянную слагающую и колебание основной частоты — аналогично рассмотренному выше случаю малых колебаний. Если угол θ лежит в пределах между π и $\pi/2$, режим обозначается буквами АВ. Колебаниями класса В назы-

вают режим, соответствующий углу $\theta = \frac{\pi}{2}$. Наконец, если $\theta < \frac{\pi}{2}$, режим называется колебаниями класса С.

Классификация режимов цепи иллюстрируется табл. 10-4, в которой кроме временных диаграмм приведены числовые значения

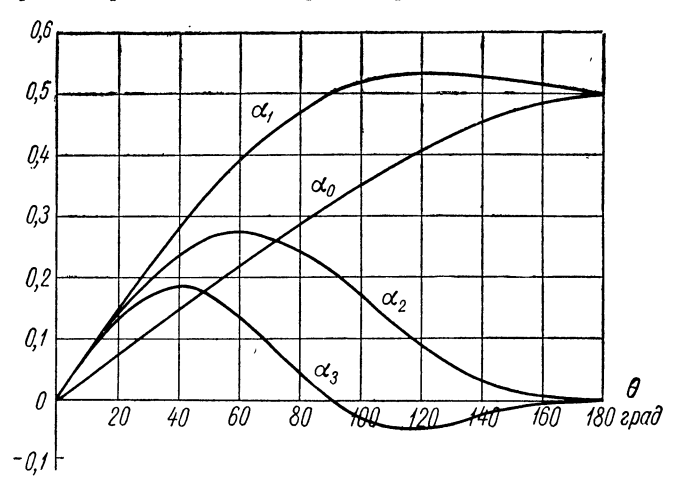


Рис. 10-26. Графики коэффициентов А. И. Берга.

некоторых коэффициентов разложения, характерные для разных режимов.

Рассчитаем теперь среднюю крутизну $S_{ср}$. Имеем

$$S_{ср} = \frac{I_1}{U} = \frac{\alpha_1 I_{макс}}{U}.$$

Подставив сюда вместо α_1 и $I_{макс}$ их значения из (10-69) и (10-65), получим

$$S_{ср} = S\,\frac{\theta - \sin\theta\cos\theta}{\pi} = \alpha_S S.$$

Здесь коэффициент

$$\alpha_S = \frac{S_{ср}}{S} = \frac{\theta - \sin\theta\cos\theta}{\pi} \qquad (10\text{-}71)$$

определяет соотношение средней крутизны и крутизны характеристики S. Он зависит только от угла отсечки. Зависимость $\alpha_S = f(\theta)$ изображена на графике рис. 10-27.

При $\theta = \pi$ (т. е. в режиме класса А), как и следовало ожидать, средняя крутизна равна крутизне S. Однако чем больше искажена форма тока (чем меньше угол отсечки), тем относительно меньшую величину имеет первая гармоника тока и тем меньше средняя крутизна $S_{ср} = \frac{I_1}{U}$. В пределе, при $\theta \to 0$, ток (и его первая гармоника) стремится к нулю и $S_{ср} \to 0$.

Итак, метод А. И. Берга позволяет выразить все величины, характеризующие режим цепи, через одну величину — угол отсечки θ, определяющий характер образующихся в системе продуктов нелинейности. Из (10-63) следует, что величина угла отсечки (при заданной амплитуде переменного напряжения U) определяется смещением U_0. Таким образом, вариация угла θ есть не что иное, как описанное в предыдущем пункте изменение вида нелинейности цепи путем выбора того или иного напряжения смещения на нелинейном элементе.

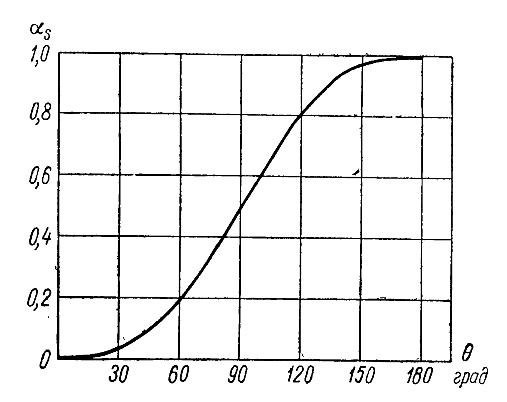


Рис. 10-27. График зависимости α_S (θ).

Расчеты по методу А. И. Берга существенно облегчаются благодаря наличию табулированных значений всех необходимых расчетных коэффициентов.

10-8. Нелинейное сопротивление при сложном воздействии

Как было показано в § 10-3, негармоническое воздействие на нелинейный элемент вызывает сложное преобразование частоты, а именно появление в составе отклика колебаний не только кратных, но и комбинационных частот. Рассмотрим этот вопрос несколько подробнее применительно к цепи нелинейного активного сопротивления.

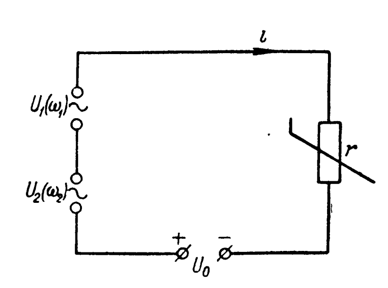


Рис. 10-28. Сложное воздействие на нелинейное сопротивление.

Пусть к нелинейному сопротивлению приложены два гармонических напряжения разных частот ω_1 и ω_2 с амплитудами U_1 и U_2 и — в общем случае — напряжение смещения U_0 (рис. 10-28).

Представляя уравнение вольт-амперной характеристики в виде степенного полинома (10-52) и полагая, что разложение в ряд произведено в окрестности $u_0 = U_0$, получим

$$i = i_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (U_1 \cos \omega_1 t + U_2 \cos \omega_2 t)^k. \qquad (10\text{-}72)$$

Для того чтобы найти спектральный состав тока, надо для каждого значения $k = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ n$ составить развернутое выражение члена

$$a_k (U_1 \cos \omega_1 t + U_2 \cos \omega_2 t)^k,$$

выразив слагаемые этого выражения через гармонические функции.

Такой расчет для $k = 2$ был уже произведен в § 10-3. Было установлено [см. (10-31 — 10-33)], что член второй степени дает гармонические составляющие частот $\omega = 0;\ 2\omega_1;\ 2\omega_2;\ \omega_1 + \omega_2;\ \omega_1 - \omega_2$.

Аналогичные расчеты, выполненные для других слагаемых ряда, показывают, что члены высших степеней приводят к появлению колебаний кратных частот вида $M\omega_1$ и $N\omega_2$ и комбинационных частот вида

$$m\omega_1 \pm n\omega_2,$$

где M, N, m и n — целые числа, значения которых определяются видом нелинейности элемента.

Результаты таких расчетов сведены в табл. 10-5.

Из данных этой таблицы следует, что чем выше степень члена ряда, тем большее количество гармонических составляющих им определяется. Так, например, с членом четвертой степени связаны 5 кратных и 8 комбинационных частот; аналогичный расчет для члена шестой степени дает 7 кратных и 18 комбинационных частот. Поэтому в цепи, содержащей сопротивление с ярко выраженной нелинейностью, для которого уравнение характеристики представляет собой полином с большим числом членов, количество комбинационных и кратных частот может быть чрезвычайно велико.

Амплитуды составляющих тока, как видно из таблицы, зависят от коэффициентов ряда (a_1, a_2, a_3, ..., a_k, ...) и от амплитуд обоих воздействующих напряжений (U_1 и U_2).

Полезно еще раз напомнить, что коэффициенты a_1, a_2, ..., a_k, ... зависят от положения исходной точки, т. е. от напряжения смещения $u_0 = U_0$. Изменение последнего приводит (при тех же значениях U_1 и U_2) к изменению коэффициентов ряда, а значит и величины продуктов нелинейности.

Режим работы нелинейного элемента, когда на него воздействует одно гармоническое напряжение U в присутствии постоянного напряжения смещения U_0 (см. § 10-7), можно трактовать как результат сложного (комбинационного) воздействия двух напряжений с частотами $\omega_1 = \omega$ и $\omega_2 = 0$.

Так как при такой трактовке смещение рассматривается как одно из воздействующих на элемент напряжений, то аппроксимацию характеристики целесообразно производить в окрестности начала координат, т. е. на основе формулы (10-10):

$$i = b_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k u^k.$$

Таблица 10-5

Частоты и амплитуды колебаний при сложном воздействии на нелинейный элемент

k	Колебания кратных частот		Колебания комбинационных частот	
	Частоты	Амплитуды	Частоты	Амплитуды
0	$\omega = 0$	a_0	—	—
1	ω_1 ω_2	a_1U_1 a_1U_2	—	—
2	$\omega = 0$ $2\omega_1$ $2\omega_2$	$a_2\left[\frac{U_1^2}{2} + \frac{U_2^2}{2}\right]$ $a_2\frac{U_1^2}{2}$ $a_2\frac{U_2^2}{2}$	$\omega_1 \pm \omega_2$	$a_2U_1U_2$
3	ω_1 ω_2 $3\omega_1$ $3\omega_2$	$\frac{3}{4}a_3U_1^3 + \frac{3}{2}a_3U_1U_2^2$ $\frac{3}{4}a_3U_2^3 + \frac{3}{2}a_3U_1^2U_2$ $\frac{1}{4}a_3U_1^3$ $\frac{1}{4}a_3U_2^3$	$2\omega_1 \pm \omega_2$ $2\omega_2 \pm \omega_1$	$\frac{3}{4}a_3U_1^2U_2$ $\frac{3}{4}a_3U_1U_2^2$
4	$\omega = 0$ $2\omega_1$ $2\omega_2$ $4\omega_1$ $4\omega_2$	$\frac{3}{2}a_4\left[U_1^2U_2^2 + \frac{1}{4}U_1^4 + \frac{1}{4}U_2^4\right]$ $\frac{1}{2}a_4U_1^2[U_1^2 + 3U_2^2]$ $\frac{1}{2}a_4U_2^2[U_2^2 + 3U_1^2]$ $\frac{1}{8}a_4U_1^4$ $\frac{1}{8}a_4U_2^4$	$\omega_1 \pm \omega_2$ $2(\omega_1 \pm \omega_2)$ $3\omega_1 \pm \omega_2$ $3\omega_2 \pm \omega_1$	$\frac{3}{2}a_4[U_1^3U_2 + U_1U_2^3]$ $\frac{3}{4}a_4U_1^2U_2^2$ $\frac{1}{2}a_4U_1^3U_2$ $\frac{1}{2}a_4U_1U_2^3$

Подставляя сюда $u = \dot{U}\cos\omega t + U_0$, получим

$$i = b_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k (U\cos\omega t + U_0)^k. \tag{10-73}$$

Амплитуды составляющих ряда могут быть найдены, если все слагаемые выражения (10-73) представить в развернутом виде. Однако, располагая табл. 10-5, можно поступить иначе: применив данные этой таблицы к частному случаю $\omega_1 = \omega$; $\omega_2 = 0$, можно непосредственно найти значения амплитуд соответствующих гармонических слагающих.

Результаты таких расчетов сведены в табл. 10-6.

Таблица 10-6

Амплитуды гармонических составляющих при наличии постоянного смещения

k	Частоты	Амплитуды	k	Частоты	Амплитуды
0	$\omega = 0$	b_0	3	$\omega = 0$	$b_3\left[\frac{3}{2}U^2U_0 + U_0^3\right]$
				ω	$b_3\left[3UU_0^2 + \frac{3}{4}U^3\right]$
1	$\omega = 0$	b_1U_0		2ω	$\frac{3}{2}b_3U^2U_0$
	ω	b_1U		3ω	$\frac{1}{4}b_3U^3$
2	$\omega = 0$	$\frac{1}{2}b_2U^2 + b_2U_0^2$	4	$\omega = 0$	$b_4\left[3U^2U_0 + \frac{3}{8}U^4 + U_0^4\right]$
				ω	$b_4[3U^3U_0 + 4UU_0^3]$
	ω	$2b_2UU_0$		2ω	$b_4\left[3U^2U_0 + \frac{U^4}{2}\right]$
	2ω	$\frac{1}{2}b_2U^2$		3ω	$b_4U^3U_0$
				4ω	$\frac{b_4}{8}U^4$

Можно заметить, что, как и следовало ожидать, характер и величина гармонических составляющих при прочих равных условиях существенно зависят от смещения U_0. Так, например, в отсутствие смещения члены четных степеней связаны со слагающими только четных гармоник. Однако при наличии постоянного смещения какой-либо член ряда степени k приводит к появлению всех кратных гармоник вплоть до k-й включительно.

10-9. Нелинейные энергоемкие элементы

Наряду с нелинейными активными сопротивлениями, в которых энергия не может запасаться, а только необратимо расходуется, в радиоэлектронике широко используются энергоемкие нелинейные элементы: индуктивности и емкости.

а) Нелинейная индуктивность

При заданной геометрической конфигурации элемента цепи, в частности катушки, индуктивность его определяется главным образом свойствами окружающей среды.

Магнитные свойства материала, как известно, характеризуются кривой намагничивания, т. е. зависимостью индукции от действующей в среде напряженности магнитного поля $B = f(H)$. Для многих материалов эта зависимость представляет собой прямую линию (рис. 10-29, *а*).

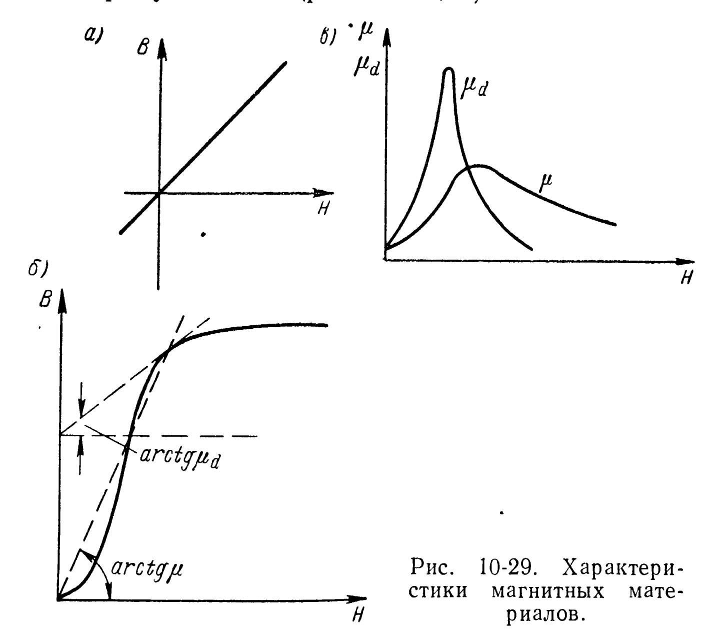


Рис. 10-29. Характеристики магнитных материалов.

Для ферромагнитных материалов зависимость $B = f(H)$ нелинейна, и это их свойство лежит в основе осуществления нелинейных индуктивностей.

Если образец ферромагнитного материала был первоначально размагничен, то с увеличением H от нуля до H_m индукция изменяется по так называемой кривой первоначального намагничивания (рис. 10-29, *б*). Рассматривая эту кривую как функцию, связывающую воздействие $x \equiv H$ и отклик $y \equiv B$, найдем в соответствии с (10-2), что статический параметр среды, характеризующий ее магнитные свойства,

$$\mu = \frac{B}{H}. \qquad (10\text{-}74)$$

Этот параметр называется статической магнитной проницаемостью.

Крутизна характеристики

$$\mu_d = \frac{dB}{dH} \qquad (10\text{-}75)$$

называется дифференциальной магнитной проницаемостью.

Зависимость μ и μ_d от напряженности магнитного поля H имеет вид рис. 10-29, *в*. Для линейных (немагнитных) материалов магнитная проницаемость $\mu = \mu_d$ является постоянной величиной, не за-

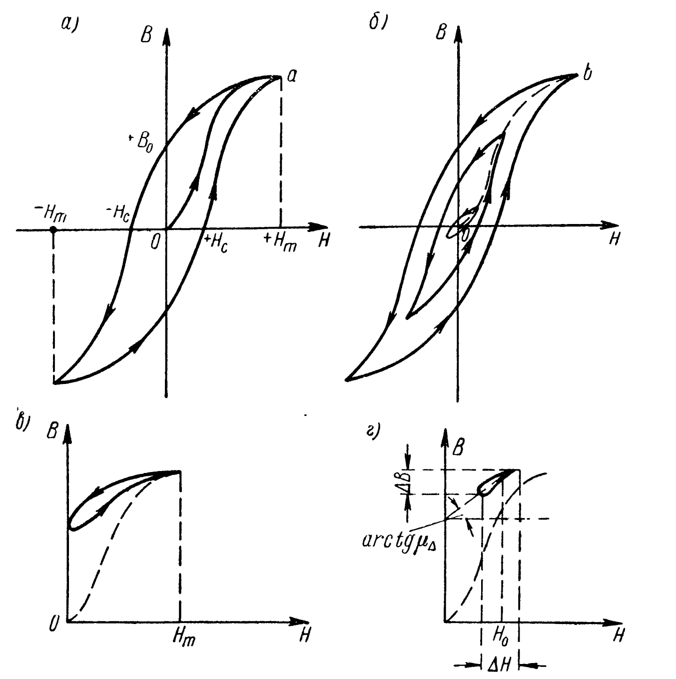


Рис. 10-30. Характеристики ферромагнетиков.

висящей от H. Ферромагнетики характерны тем, что их магнитная проницаемость во много раз превосходит магнитную проницаемость воздуха (вакуума).

При повторном циклическом изменении напряженности поля в некоторых пределах $H_{мин}$ — $H_{макс}$ изменение индукции в железе B происходит в стационарном режиме по характерной замкнутой кривой, называемой петлей гистерезиса. При знакопеременном, симметричном изменении H, т. е. когда

$$H_{мин} = -H_m \text{ и } H_{макс} = +H_m,$$

петля гистерезиса имеет вид симметричного цикла (рис. 10-30, *а*). При увеличении H индукция растет по нижней

ветви петли, а при уменьшении — уменьшается по ее верхней ветви. Индукция B_0 называется остаточной индукцией, а напряженность поля H_c — коэрцитивной силой. На рис. 10-30, *а* нанесена также кривая первоначального намагничивания *оа*.

Для разных значений максимальной намагничивающей силы H_m, характеристики принимают вид петель, «вложенных» одна в другую (рис. 10-30, *б*). Кривая *ob*, соединяющая вершины петель, называется основной кривой намагничивания.

Если циклическое воздействие униполярно:

$$H_{мин} = 0, \quad H_{макс} = + H_m,$$

гистерезисная петля в установившемся режиме имеет вид несимметричного (частного) цикла (рис. 10-30, *в*). Наконец, если имеется постоянное подмагничивание (смещение) H_0, относительно которого H изменяется в ту и другую сторону на небольшую величину, частный цикл приобретает по истечении переходного процесса вид рис. 10-30, *г*.

Неоднозначность гистерезисной петли приводит к тому, что параметры μ и μ_d получаются различными в зависимости от того, для какой из ветвей характеристики они определяются. Чтобы исключить эту неопределенность, параметры обычно рассчитывают, исходя из первоначальной (основной) кривой намагничивания, а для частного цикла вида рис. 10-30, *г* пользуются еще одним параметром

$$\mu_\Delta = \frac{\Delta B}{\Delta H}, \tag{10-76}$$

называемым проницаемостью на частном цикле.

Перейдем к рассмотрению катушки (тороида), витки которой навиты на ферромагнитном сердечнике. Если число витков равно n, а площадь сечения сердечника S, то полный магнитный поток

$$\Phi = n\ \Phi' = nBS; \tag{10-77}$$

с другой стороны, согласно (1-6)

$$i = \frac{Hl}{n}, \tag{10-78}$$

где l — средняя длина магнитной силовой линии.

Для данной катушки магнитный поток пропорционален индукции в сердечнике, а ток пропорционален напряженности поля H. Следовательно, кривая намагничивания $B = f(H)$ при соответственно измененных масштабах координатных осей представляет в то же время вебер-амперную характеристику катушки индуктивности $\Phi = f(i)$.

Для катушки индуктивности воздействие $x \equiv i$ и отклик $y \equiv \Phi$. Значит, статическая индуктивность

$$L = \frac{\Phi}{i}. \tag{10-79}$$

Она пропорциональна статической магнитной проницаемости μ.

Дифференциальная индуктивность

$$L_d = \frac{d\Phi}{di} \tag{10-80}$$

пропорциональна дифференциальной магнитной проницаемости.

Стало быть, если при определении параметров катушки исходить из характеристики $\Phi = f(i)$, соответствующей первоначальной кривой намагничивания (рис. 10-31), т. е. не учитывать гистерезисной петли, то кривые $L(i)$ и $L_d(i)$ будут иметь такой же вид, как и зависимости $\mu(H)$ и $\mu_d(H)$, показанные на рис. 10-29, *в*.

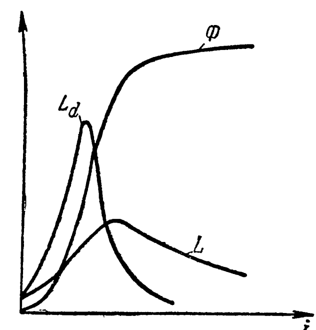


Рис. 10-31. Характеристики нелинейной индуктивности.

Если же учесть явление гистерезиса, то окажется, что параметры катушки зависят не только от самого тока i, но и от процессов, предшествовавших наступлению рассматриваемого режима, т. е. от «предыстории» катушки.

Вебер-амперная характеристика катушки с ферромагнитным сердечником не может быть выражена точно аналитически. Уравнение этой характеристики обычно аппроксимируют с той или иной степенью точности. Так, если использовать аппроксимацию степенным полиномом, то при условии пренебрежения явлением гистерезиса характеристика удовлетворительно описывается укороченным полиномом

$$\Phi = a_1 i - a_3 i^3. \tag{10-81}$$

Отсюда статическая индуктивность

$$L = \frac{\Phi}{i} = a_1 - a_3 i^2; \tag{10-82}$$

дифференциальная индуктивность

$$L_d = \frac{d\Phi}{di} = a_1 - 3a_3 i^2. \tag{10-83}$$

Надо иметь в виду, что уравнение (10-81) не учитывает нижнего изгиба характеристики. Согласно этому уравнению характеристика имеет монотонно убывающую крутизну, в то время как в действительности кривая намагничивания имеет в своей нижней части нарастающую, а затем убывающую крутизну.

Большой интерес представляет энергетика нелинейной индуктивности.

Напряжение, приложенное к индуктивности,

$$u_L = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{di} \cdot \frac{di}{dt};$$

учитывая (10-80), можем записать

$$u_L = L_d \frac{di}{dt}. \tag{10-84}$$

Элементарная энергия, накапливаемая за время dt в магнитном поле катушки,

$$dw_L = u_L i\, dt.$$

Приняв во внимание (10-84), получим

$$dw_L = L_d i\, di \qquad (10\text{-}85)$$

или, иначе,

$$dw_L = i d\Phi. \qquad (10\text{-}86)$$

Если ток возрастает от нуля до $i = I$, в магнитном поле запасается энергия

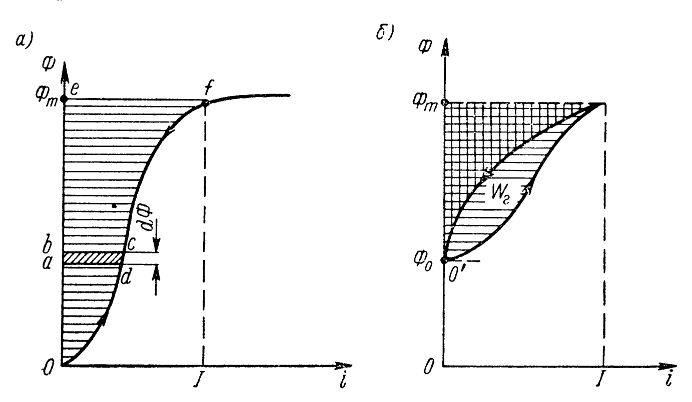


Рис. 10-32. Энергетика нелинейной индуктивности.

$$W_L = \int_0^I L_d i\, di = \int_0^{\Phi_m} i\, d\Phi. \qquad (10\text{-}87)$$

В случае линейной индуктивности, когда $L_d = L = \mathrm{const}$, приходим к известному выражению

$$W_L = \frac{LI^2}{2}.$$

Для нелинейной индуктивности интеграл (10-87) может быть приближенно рассчитан или аналитически, если известен вид зависимости $L_d(i)$, или графически, если задан график характеристики $\Phi(i)$.

Пренебрегая гистерезисом и рассматривая вебер-амперную характеристику нелинейной индуктивности (рис. 10-32, *а*), видим, что элементарная энергия dw_L выражается площадью *abcd*, а вся энергия W_L, запасаемая в поле при увеличении тока от нуля до I, равна площади *oef*. При уменьшении тока от I до нуля рабочая

точка скользит по той же кривой, что и при его возрастании. Поэтому энергия, возвращаемая полем источнику, равна запасенной энергии (площадь *oef*), и в системе нет необратимо расходуемой энергии.

Иная картина наблюдается при наличии петли гистерезиса. Циклическому изменению тока в пределах от нуля до I соответствует в установившемся режиме характеристика вида рис. 10-32, *б*. При нарастании мгновенного значения тока запасаемая энергия пропорциональна горизонтально заштрихованной площади, а при уменьшении тока энергия, возвращаемая источнику, выражается площадью, заштрихованной вертикально. Разность между этими площадями, обозначенная $W_г$, равна энергии, расходуемой на перемагничивание материала сердечника.

Таким образом, даже при отсутствии потерь в проводнике катушки энергия в системе при изменяющемся токе не только периодически запасается в магнитном поле, но и частично расходуется на перемагничивание сердечника, превращаясь в тепло. Эти потери энергии обычно называют **потерями на гистерезис**. Естественно, что с увеличением частоты мощность потерь на гистерезис растет. Как показывает опыт, эта мощность может быть рассчитана по формуле

$$P_г = k_г f B_m^n V, \qquad (10\text{-}88)$$

где $k_г$ — коэффициент, зависящий от свойств материала сердечника;

f — частота;

B_m — наибольшее значение индукции;

n — коэффициент, величина которого в зависимости от B_m имеет значение $\sim$ 1,6—2;

V — объем сердечника.

При переменных полях, кроме потерь на гистерезис, в сердечнике наблюдаются также **потери на вихревые токи**.

Они вызваны тем, что переменное поле индуктирует в толще сердечника токи, прохождение которых связано с потерями энергии.

Мощность потерь на вихревые токи

$$P_в = k_в f^2 B_m^2 V, \qquad (10\text{-}89)$$

где $k_в$ — коэффициент, зависящий от материала сердечника и его конструкции.

Если учесть потери на гистерезис и вихревые токи, эквивалентную схему катушки можно представить в виде рис. 10-33. Здесь $r_к$ — активное сопротивление провода катушки;

$$r_г = \frac{P_г}{I_д^2} = k_г f V \left(\frac{B_m}{I_д}\right)^n I_д^{n-2} \qquad (10\text{-}90)$$

— сопротивление, эквивалентное потерям на гистерезис;

$$r_в = \frac{P_в}{I_д^2} = k_в f^2 V \left(\frac{B_m}{I_д}\right)^2 \qquad (10\text{-}91)$$

— сопротивление, эквивалентное потерям на вихревые токи;

$I_д$ — действующее значение тока, проходящего через катушку.

Сопротивления $r_г$ и $r_в$ существенно зависят от частоты, возрастая с ее увеличением. Кроме того, эти сопротивления нелинейны; величина их зависит от тока.

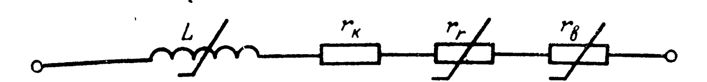


Рис. 10-33. Эквивалентная схема катушки с ферромагнитным сердечником.

Из всего сказанного видно, что основные параметры нелинейных катушек индуктивности L, L_d, $r_г$, $r_в$ действительно зависят главным образом от материала и конструкции сердечника.

Для уменьшения потерь на вихревые токи сердечник выполняется в виде тонких изолированных друг от друга листов, плоскость сечения которых перпендикулярна направлению магнитных силовых линий (рис. 10-34). Благодаря этому увеличивается сопротивление для вихревых токов, так как возрастает длина пути, по которому они замыкаются (пунктир на рис. 10-34). Стальные листы выпускаются различной толщиной: $\delta = 0{,}35 \div 0{,}5$ *мм* для использования на частоте $f = 50$ *гц*; $\delta = 0{,}02 \div 0{,}05$ *мм* для применения на частотах до нескольких тысяч герц и несколько микрон для частот вплоть до нескольких сотен килогерц.

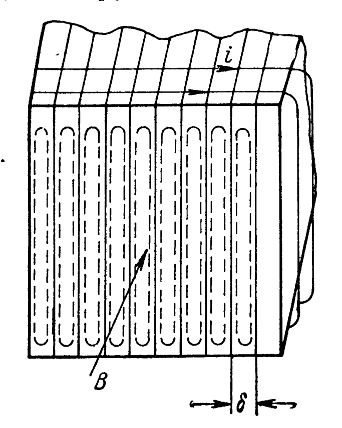


Рис. 10-34. Конструкция сердечника катушки из листовой стали.

Другим направлением развития ферромагнетиков, применяемых на радиочастотах, является создание магнитных материалов, называемых магнитодиэлектриками, в которых частицы ферромагнитного порошка, имеющие размеры порядка нескольких микрон, связаны между собой диэлектриком. Для их изготовления используют магнетит, карбонильное железо, альсифер и др.

В последнее время широкое применение находят магнитные материалы, обладающие очень высоким удельным сопротивлением и поэтому малыми потерями. Это — прежде всего ферриты,

в основе которых лежит химическое соединение окислов металлов, определяемое формулой $MO \cdot Fe_2O_3$, где М — символ двухвалентного металла.

Одной из наиболее распространенных групп ферритов является никельцинковая группа, в которой в качестве компонентов используются соединения $NiOFe_2O_3$ и $ZnOFe_2O_3$.

Ферриты имеют очень большое удельное сопротивление $\sim 10^2$—10^8 *ом · см*, т. е. относятся к классу полупроводников. Относительная магнитная проницаемость ферритов $\mu_r \approx 10 - 6000$. Они могут с успехом применяться в качестве сердечников катушек на частотах до нескольких десятков мегагерц.

б) Расчет нелинейной магнитной цепи

Остановимся на некоторых количественных соотношениях, которые могут облегчить расчет катушек с ферромагнитным сердечником.

Пренебрегая потоком рассеяния, получим, что магнитный поток, пронизывающий каждый из витков тонкой тороидальной катушки (рис. 10-35),

$$\Phi' = \mu HS;$$

подставив сюда из (10-78)

$$H = \frac{in}{l}, \qquad (10\text{-}92)$$

найдем

$$\Phi' = \frac{in}{\frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{S}}. \qquad (10\text{-}93)$$

Это выражение формально аналогично закону Ома для электрической цепи. Поэтому величину

$$R_m = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{S} \qquad (10\text{-}94)$$

назовем магнитным сопротивлением.

Магнитное сопротивление ферромагнетика нелинейно, так как магнитная проницаемость зависит от напряженности магнитного поля.

Произведение $in = AW$ (ампер-витки катушки) называют намагничивающей силой (н. с.)

$$F = AW. \qquad (10\text{-}95)$$

Тогда вместо (10-93) можно написать выражение закона Ома для магнитной цепи

$$\Phi' = \frac{F}{R_m} = \frac{AW}{R_m}. \qquad (10\text{-}96)$$

По аналогии с электрической цепью магнитный поток равен намагничивающей силе, поделенной на магнитное сопротивление цепи.

Так как статическая индуктивность

$$L = \frac{n\Phi'}{i},$$

то, подставив сюда вместо Φ' его значение [см. (10-96)], получим

$$L = \frac{n^2}{R_m}. \tag{10-97}$$

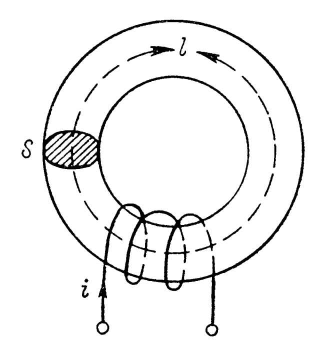


Рис. 10-35. Магнитная цепь.

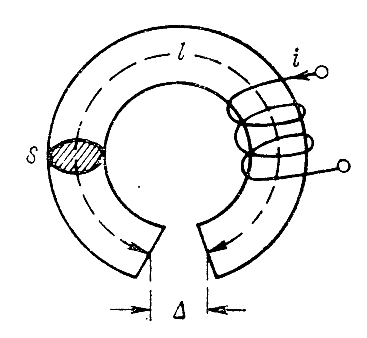


Рис. 10-36. Магнитная цепь с воздушным зазором.

При прочих равных условиях индуктивность катушки тем больше, чем меньше магнитное сопротивление сердечника.

Приняв во внимание (10-94), найдем, что

$$L = \frac{n^2 \mu S}{l}. \tag{10-98}$$

Используем полученные соотношения для расчета катушки, сердечник которой имеет воздушный зазор Δ (рис. 10-36).

Магнитная цепь этой катушки состоит из двух последовательно соединенных сопротивлений; участок из ферромагнетика длиной l имеет магнитнсе сопротивление

$$R_l = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{S};$$

полагая сечение воздушного промежутка равным сечению сердечника, получим, что магнитное сопротивление воздушного зазора

$$R_\Delta = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\Delta}{S},$$

где μ_0 — магнитная проницаемость воздуха.

Общее магнитное сопротивление цепи

$$R_m = R_l + R_\Delta = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{S} + \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\Delta}{S}.$$

Согласно (10-96) магнитный поток

$$\Phi' = \frac{AW}{\frac{1}{\mu}\cdot\frac{l}{S}+\frac{1}{\mu_0}\cdot\frac{\Delta}{S}}; \qquad (10\text{-}99)$$

статическая индуктивность

$$L = \frac{n^2}{\frac{1}{\mu}\cdot\frac{l}{S}+\frac{1}{\mu_0}\cdot\frac{\Delta}{S}}. \qquad (10\text{-}100)$$

Индуктивность является функцией геометрической конфигурации катушки, в частности величины зазора Δ, а также зависит от тока, проходящего через обмотку, потому что магнитная проницаемость μ изменяется с изменением тока (напряженности магнитного поля). Для того чтобы рассчитать эти зависимости, можно воспользоваться последовательностью расчетов, сведенных в табл. 10-7.

Таблица 10-7

Расчет катушки с ферромагнитным сердечником, имеющим воздушный зазор

B	Φ'	H	μ	R_l	R_m	AW	i	L
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Задаемся индукцией в железе B, значит, и величиной магнитного потока $\Phi' = BS$. Из кривой намагничивания для материала сердечника $B = f(H)$ находим напряженность поля H, а значит, и $\mu = \frac{B}{H}$. После этого рассчитываем сопротивление $R_l = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{l}{S}$. Далее определяем полное сопротивление $R_m = R_l + R_\Delta$ имея в виду, что сопротивление воздушного промежутка R_Δ от индукции не зависит.

По формуле (10-99) рассчитывается н. с. AW, а затем и ток $i = \frac{AW}{n}$. Наконец, по формуле (10-100) определяется индуктивность L.

Таким путем находится зависимость $L(i)$.

Повторив этот расчет (начиная с графы 6) для других зазоров Δ, получим семейство кривых, приведенных на рис. 10-37. При неизменном токе изменение воздушного зазора влечет за собой изменение индуктивности. Это обстоятельство используется практически для регулирования индуктивности путем вариации величины Δ.

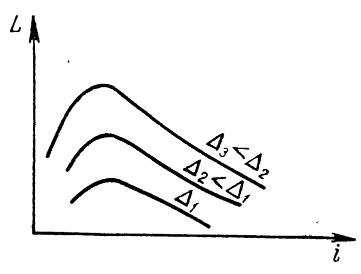


Рис. 10-37. Характеристики индуктивности катушки на сердечнике с воздушным зазором.

Так как магнитное сопротивление сердечника обычно многим меньше, чем сопротивление воздушного промежутка ($\mu \gg \mu_0$), можно полагать

$$R_m \approx R_\Delta,$$

и индуктивность катушки

$$L \approx \frac{n^2}{R_\Delta} = \frac{n^2\mu_0 S}{\Delta}, \qquad (10\text{-}101)$$

т. е. обратно пропорциональна Δ.

в) Нелинейная емкость

Одним из основных методов осуществления нелинейных емкостей является создание конденсаторов с диэлектриком, обладающим нелинейными свойствами.

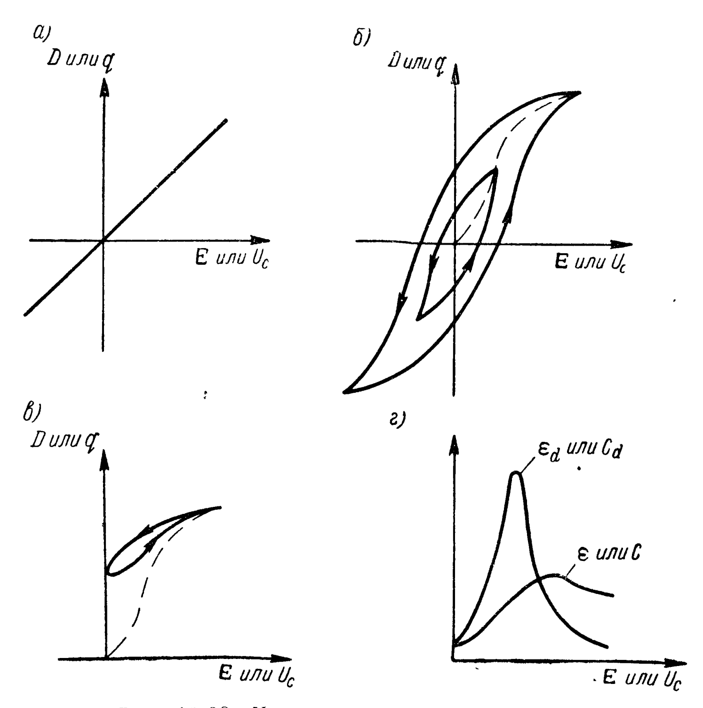


Рис. 10-38. Характеристики диэлектриков.

Свойства диэлектрика, как известно, можно характеризовать зависимостью между смещением D и напряженностью электрического поля E:

$$D = f(\mathrm{E}).$$

Для большинства диэлектриков, в том числе для воздуха, эта характеристика выражается прямой линией (рис. 10-38, *а*); диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon = \frac{D}{\mathrm{E}}$$

постоянна и не зависит от силы электрического поля.

Для нелинейных диэлектриков зависимость D (E) отличается от прямой, и поэтому, считая напряженность поля воздействием $x \equiv \mathrm{E}$, а смещение — откликом $y \equiv D$, мы пользуемся двумя основ-

ными параметрами нелинейного диэлектрика: статической диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon = \frac{D}{E} \qquad (10\text{-}102)$$

и дифференциальной диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon_d = \frac{dD}{dE}. \qquad (10\text{-}103)$$

Впервые нелинейность характеристики была обнаружена у сегнетовой соли. Однако, сегнетова соль не нашла практического применения, так как ее нелинейные свойства сохраняются лишь в узком интервале температур (от 15 до 22,5° С); кроме того, сегнетова соль отличается малой прочностью: незначительные механические воздействия резко влияют на ее нелинейные свойства. Позже были открыты и усовершенствованы новые материалы — титанат бария, титанат свинца и др. Они обладают характеристиками, аналогичными сегнетовой соли, но свободны в значительной мере от ее недостатков. Все эти материалы получили наименование сегнетоэлектриков.

Поведение сегнетоэлектриков в электрических полях аналогично поведению ферромагнетиков в полях магнитных. Так, при циклическом, знакопеременном изменении напряженности электрического поля характеристики D (E) имеют вид гистерезисных петель (рис. 10-38, *б*). Кривая, соединяющая их вершины, представляет собой основную кривую поляризации, практически совпадающую с кривой первоначальной поляризации.

Если циклическое воздействие имеет характер униполярного изменения E, характеристика в стационарном режиме приобретает вид рис. 10-38, *в*.

Неудивительно, что зависимости параметров ε и ε_d у сегнетоэлектриков (рис. 10-38, *г*) имеют такой же характер, как кривые μ (H) и μ_d (H) на рис. 10-29.

Сходство характеристик ферромагнетиков и сегнетоэлектриков явилось причиной того, что в иностранной литературе нелинейные диэлектрики обычно называют ферроэлектриками, хотя в их состав железо, разумеется, не входит.

Если пространство между обкладками конденсатора заполнить сегнетоэлектриком, кулон-вольтная характеристика такого конденсатора q (u_C) будет иметь тот же вид, что зависимость D (E) сегнетоэлектрика.

Действительно, как показано в главе первой [формула (1-45)], электрический поток через диэлектрик плоского конденсатора

$$\Phi_E = \varepsilon ES = DS = q, \qquad (10\text{-}104)$$

где S — площадь пластин конденсатора.

Напряжение на зажимах конденсатора

$$u_C = Ed, \tag{10-105}$$

где d — расстояние между обкладками.

Отсюда видно, что для данного конденсатора заряд q пропорционален смещению D, а напряжение u_C — электрической силе E.

На координатных осях рис. 10-38 наряду с величинами D и E нанесены также значения q и u_C.

Для конденсатора воздействие $x \equiv u_C$, а отклик $y \equiv q$. Значит, статическая емкость

$$C = \frac{q}{u_C} \tag{10-106}$$

пропорциональна статической диэлектрической проницаемости ε.

Дифференциальная емкость

$$C_d = \frac{dq}{du_C} \tag{10-107}$$

пропорциональна дифференциальной диэлектрической проницаемости ε_d.

Кривые $C(u_C)$ и $C_d(u_C)$ имеют такой же вид, что и ε (E) и ε_d (E); это отмечено на рис. 10-38, *г*.

Нелинейные конденсаторы с сегнетоэлектриком называют обычно **сегнетоконденсаторами**, или **варикондами**.

Кулон-вольтная характеристика сегнетоконденсатора не может быть точно выражена аналитически. Основную (первоначальную) кулон-вольтную кривую можно аппроксимировать укороченным полиномом, аналогичным (10-81),

$$q \doteq b_1 u_C - b_3 u_C^3, \tag{10-108}$$

который, однако, не учитывает нижнего изгиба характеристики.

Из (10-108) следует, что

$$C = b_1 - b_3 u_C^2 \tag{10-109}$$

и

$$C_d = b_1 - 3b_3 u_C^2. \tag{10-110}$$

Рассмотрим теперь **энергетику нелинейной емкости**. Ток через емкость

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{du_C} \cdot \frac{du_C}{dt};$$

учитывая (10-107), получим, что

$$i = C_d \frac{du_C}{dt}. \tag{10-111}$$

Энергия, накапливаемая за время dt в электрическом поле конденсатора,

$$dw_C = u_C i \, dt.$$

Подставляя сюда (10-111), найдем

$$dw_C = C_d u_C du_C \tag{10-112}$$

или иначе,

$$dw_C = u_C \, dq. \tag{10-113}$$

Если за время заряда конденсатора напряжение u_C нарастает от нуля до U_C, в его электрическом поле запасается энергия

$$W_C = \int\limits_0^{U_C} C_d u_C \, du_C = \int\limits_0^{q_m} u_C dq. \tag{10-114}$$

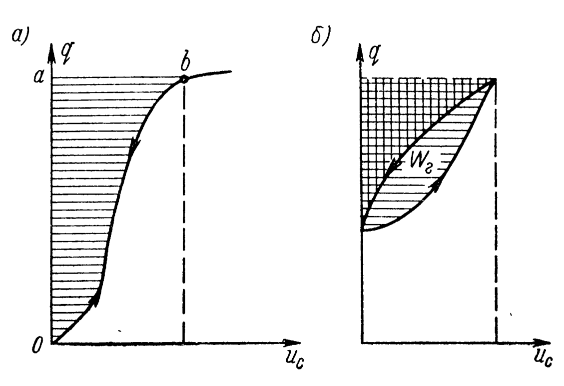


Рис. 10-39. Энергетика сегнетоконденсатора.

В случае линейной емкости

$$C_d = C = \text{const}$$

и расчет по (10-114) дает известное выражение

$$W_C = \frac{CU_C^2}{2}.$$

Для определения энергии, запасаемой нелинейной емкостью, надо вычислить интеграл (10-114), что может быть выполнено либо аналитически, если известен вид зависимости $C_d\,(u_C)$, либо графически, если задан график кулон-вольтной характеристики $q\,(u_C)$. Если в этой характеристике пренебречь гистерезисом (рис. 10-39, *а*), то запасаемая в электрическом поле энергия выражается заштрихованной площадью *oab*. Как при заряде, так и разряде конденсатора рабочая точка скользит по одной и той же кривой.

При наличии петли гистерезиса в установившемся режиме униполярного циклического процесса (рис. 10-39, *б*) энергия, запасаемая при заряде, определяется горизонтально заштрихованной площадью, а энергия, отдаваемая источнику при разряде конденса-

тора, — площадью, заштрихованной вертикально. Разность между ними, равная площади петли, представляет собой энергию потерь на диэлектрический гистерезис, обращающуюся в тепло.

Рис. 10-39 относится к случаю униполярного изменения напряжения. Аналогично и при знакопеременном циклическом воздействии энергия потерь на диэлектрический гистерезис также определяется площадью петли гистерезиса.

Все потери, возникающие в несовершенном диэлектрике, можно учитывать в эквивалентной последовательной схеме конденсатора

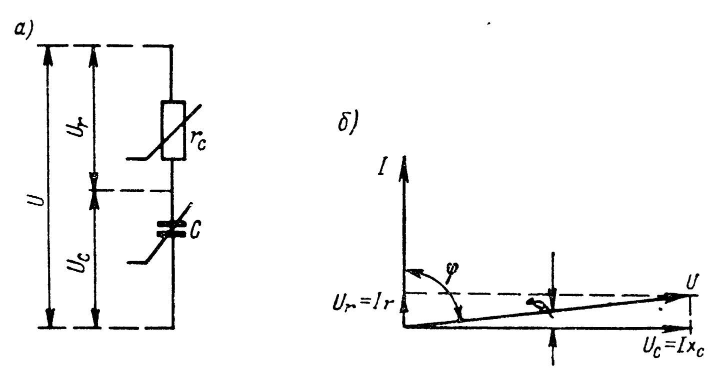


Рис. 10-40. Эквивалентная схема (*а*) и векторная диаграмма (*б*) нелинейного конденсатора.

одним активным сопротивлением r_C (рис. 10-40). Если считать, что ток имеет гармоническую форму, то

$$r_C = \frac{2P_d}{I^2}.$$

Здесь P_d — суммарные потери в диэлектрике, включающие в себя в случае нелинейной емкости и потери на гистерезис.

Мощность потерь можно выразить через добротность конденсатора Q_C [см. (3-127)].

Так как напряжение на емкости значительно превышает падение напряжения на сопротивлении r_C, то $U \approx U_C$; $I \approx \frac{U}{x_C}$ и

$$P_d = \frac{1}{2} I^2 r_C \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{U^2}{x_C} \cdot \frac{1}{Q_C}. \qquad (10\text{-}115)$$

Для схемы рис. 10-40, *а* справедлива векторная диаграмма рис. 10-40, *б*. Благодаря потерям в конденсаторе ток опережает напряжение на угол φ, несколько меньший, чем 90°;

$$\varphi = 90° - \delta,$$

где δ — угол потерь, величина которого характерна для данного диэлектрика.

Из рис. 10-40, *б* следует, что

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{r_C}{x_C} = \frac{1}{Q_C}. \qquad (10\text{-}116)$$

Поэтому вместо (10-115) можно написать

$$P_d = 0{,}5U^2\omega C\operatorname{tg}\delta. \qquad (10\text{-}117)$$

Для сегнетоэлектриков $\operatorname{tg}\delta$ существенно зависит от напряженности поля, возрастая с ее увеличением. Отсюда вытекает, что в эквивалентной схеме нелинейного конденсатора сопротивление r_C

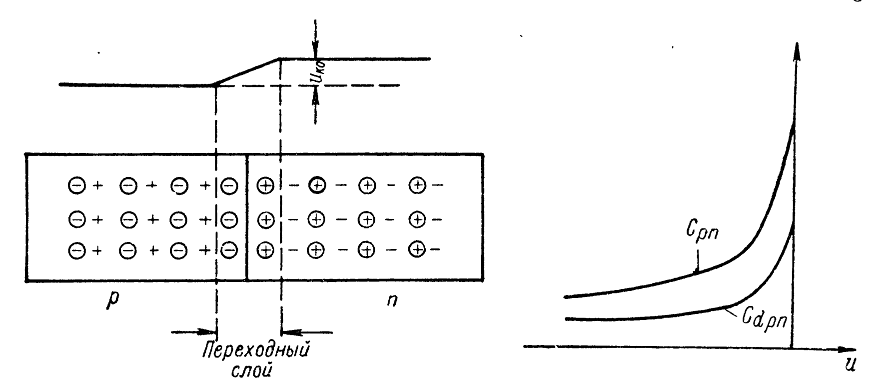


Рис. 10-41. Схема процессов в полупроводниковом диоде.

+ дырки; — электроны; ⊕ ⊖ ионы.

Рис. 10-42. Характеристики емкости *p-n* перехода.

следует считать нелинейным, что и показано на рис. 10-40, *а*. Так как в цепи нелинейного конденсатора, питаемого гармоническим напряжением, ток имеет искаженную форму, то, строго говоря, явления в этой цепи не могут быть иллюстрированы векторными диаграммами, и приведенный выше расчет носит приближенный характер.

Существенным недостатком варикондов является относительно большой угол потерь. Кроме того, параметры сегнетоэлектриков существенно зависят от температуры. Эти недостатки, однако, по мере разработки более совершенных нелинейных диэлектрических материалов, постепенно изживаются.

Наряду с варикондами в последние годы все большее применение в радиоэлектронной аппаратуре находят нелинейные емкости, основанные на ином принципе, а именно на использовании явлений в электронно-дырочном (*p-n*) переходе полупроводникового прибора.

На рис. 10-41 схематически изображен полупроводниковый диод, состоящий из двух областей: с дырочной p и электронной n проводимостью, разделенных переходным слоем.

Теория и опыт показывают, что статическая емкость p-n перехода

$$C_{pn} \approx \frac{\alpha}{\sqrt{u_{\text{к}0} + u}}, \tag{10-118}$$

где $u_{\text{к}0}$ — разность потенциалов между противоположными сторонами переходного слоя в отсутствие внешнего напряжения;

u — абсолютная величина отрицательного (обратного) напряжения, приложенного к диоду.

α — коэффициент, зависящий от материала и конструкции диода.

Если $u \gg u_{\text{к}0}$, то

$$C_{pn} \approx \frac{\alpha}{\sqrt{u}}. \tag{10-119}$$

Дифференциальная емкость p-n перехода может быть найдена на основании (10-4):

$$C_{dpn} = C_{pn} + u\frac{dC_{pn}}{du} = \frac{\alpha}{2\sqrt{u_{\text{к}0} + u}} \approx \frac{\alpha}{2\sqrt{u}}. \tag{10-120}$$

На графике рис. 10-42 изображена зависимость C_{pn} и C_{dpn} от напряжения. Изменяя напряжение смещения, можно в широких пределах изменять величины емкостей.

Полупроводниковому диоду эквивалентна схема рис. 10-43. При положительном (прямом) напряжении нелинейное сопротивление R_{pn} мало и емкость C_{pn} может играть роль только на достаточно высоких частотах, когда ее емкостное сопротивление соизмеримо с величиной R_{pn}. При обратном (отрицательном) напряжении активное сопротивление чрезвычайно велико ($R_{pn} \to \infty$) и диод может являться нелинейной емкостью.

R_{pn} C_{pn}

Рис. 10-43. Эквивалентная схема полупроводникового диода.

10-10. Нелинейное реактивное сопротивление при гармоническом воздействии

В § 10-2 было в общем виде показано, что гармоническое воздействие на нелинейный элемент вызывает отклик искаженной (отличной от синусоиды) формы. Этот же вопрос применительно к нелинейной цепи активного сопротивления рассмотрен в § 10-7.

Теперь изучим режим элементарной цепи, содержащей источник гармонического воздействия (в виде генератора э. д. с. или ге-

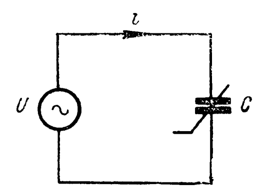


Рис. 10-44. Схема питания нелинейной емкости от источника гармонического напряжения.

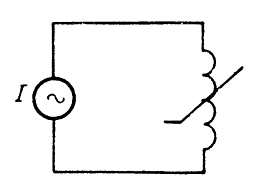


Рис. 10-45. Схема питания нелинейной индуктивности от источника гармонического тока.

нератора тока) и нелинейный энергоемкий элемент (индуктивность или емкость). Рассмотрим две элементарные цепи: с нелинейной

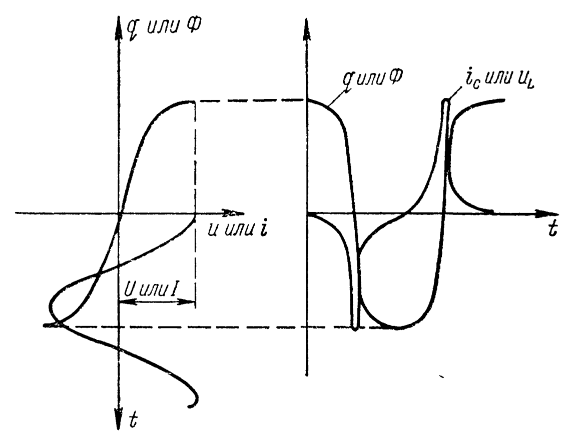


Рис. 10-46. К расчету гармонического воздействия на нелинейное реактивное сопротивление.

емкостью (варикондом) — рис. 10-44 и нелинейной индуктивностью — рис. 10-45.

Пусть к нелинейной емкости подведено гармоническое напряжение

$$u = U \cos \omega t;$$

иными словами, емкость питается от генератора э. д. с.

Будем искать ток в цепи i, являющийся откликом на заданное воздействие.

Пусть к нелинейной индуктивности подведен гармонический ток

$$i = I \cos \omega t;$$

иными словами, индуктивность питается от генератора тока.

Будем искать напряжение на индуктивности u_L, являющееся откликом на заданное воздействие.

Характеристики емкости $q = f(u_C)$ и индуктивности $\Phi = f(i)$ имеют, как показано в § 10-9, аналогичный вид. Поэтому, пренебрегая гистерезисом, можно полагать, что одна и та же кривая (рис. 10-46) при соответствующих масштабах координатных осей выражает как кулон-вольтную характеристику емкости, так и вебер-амперную характеристику индуктивности.

Располагая кулон-вольтной характеристикой емкости, строим временну́ю диаграмму заряда $q(t)$.

Так как ток

$$i_C = \frac{dq}{dt},$$

то, дифференцируя кривую $q(t)$, находим временну́ю диаграмму тока $i_C(t)$.

Как видно, ток имеет характерную остроконечную форму, причем выбросы тока опережают на четверть периода максимумы приложенного напряжения.

Этот же расчет можно приближенно выполнить аналитически, если в качестве уравнения кулон-вольтной характеристики принять (10-108):

$$q = b_1 u - b_3 u^3 = $$
$$= b_1 U \cos \omega t - b_3 U^3 \cos^3 \omega t.$$

Разложив $\cos^3 \omega t$ по формуле кратных дуг, получим

$$q = q_1 \cos \omega t - q_3 \cos 3\omega t, \qquad (10\text{-}121)$$

где

$$q_1 = b_1 U - \frac{3}{4} b_3 U^3; \qquad (10\text{-}122)$$

$$q_3 = \frac{1}{4} b_3 U^3. \qquad (10\text{-}123)$$

Отсюда

$$i_C = \frac{dq}{dt} = -\omega q_1 \sin \omega t + $$
$$+ 3\omega q_3 \sin 3\omega t. \qquad (10\text{-}124)$$

Располагая вебер-амперной характеристикой индуктивности, строим временну́ю диаграмму полного потока $\Phi(t)$.

Так как напряжение на индуктивности

$$u_L = \frac{d\Phi}{dt},$$

то, дифференцируя кривую $\Phi(t)$, получаем временну́ю диаграмму напряжения $u_L(t)$.

Как видно, напряжение на индуктивности имеет характерную остроконечную форму, причем выбросы напряжения опережают на четверть периода максимумы воздействующего тока.

Этот же расчет можно приближенно выполнить аналитически, если в качестве уравнения вебер-амперной характеристики принять (10-81):

$$\Phi = a_1 i - a_3 i^3 = $$
$$= a_1 I \cos \omega t - a_3 I^3 \cos^3 \omega t.$$

Разложив $\cos^3 \omega t$ по формуле кратных дуг, получим

$$\Phi = \Phi_1 \cos \omega t - \Phi_3 \cos 3\omega t, \qquad (10\text{-}121a)$$

где

$$\Phi_1 = a_1 I - \frac{3}{4} a_3 I^3; \qquad (10\text{-}122a)$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{4} a_3 I^3. \qquad (10\text{-}123a)$$

Отсюда

$$u_L = \frac{d\Phi}{dt} = -\omega \Phi_1 \sin \omega t + $$
$$+ 3\omega \Phi_3 \sin 3\omega t. \qquad (10\text{-}124a)$$

Таким образом, ток, кроме основной составляющей, содержит продукт нелинейности — третью гармонику, тем более ярко выраженную, чем больше амплитуда воздействующего напряжения U.

Таким образом, напряжение, кроме основной составляющей, содержит продукт нелинейности — третью гармонику, тем более ярко выраженную, чем больше амплитуда воздействующего тока I.

Для расчета нелинейной цепи при гармоническом воздействии удобно пользоваться средними параметрами, определяемыми согласно (10-21) как отношение амплитуды первой гармоники отклика к амплитуде гармонического воздействия.

Средняя емкость

$$C_{ср} = \frac{q_1}{U}. \qquad (10\text{-}125)$$

Принимая аппроксимацию характеристики уравнением (10-108) и подставляя в (10-125) q_1 из (10-122), получим

$$C_{ср} = b_1 - \frac{3}{4} b_3 U^2. \qquad (10\text{-}126)$$

Средняя емкость с увеличением напряжения уменьшается. При $U \to 0$ средняя емкость $C_{ср}$, как это видно из (10-110), стремится к дифференциальной емкости C_d.

Средняя индуктивность

$$L_{ср} = \frac{\Phi_1}{I}. \qquad (10\text{-}125а)$$

Принимая аппроксимацию характеристики уравнением (10-81) и подставляя в (10-125а) Φ_1 из (10-122а), получим

$$L_{ср} = a_1 - \frac{3}{4} a_3 I^2. \qquad (10\text{-}126а)$$

Средняя индуктивность с увеличением тока уменьшается. При $I \to 0$ средняя индуктивность $L_{ср}$, как это видно из (10-83), стремится к дифференциальной индуктивности L_d.

Кривые на рис. 10-47 и 10-48 построены по этим формулам и представляют зависимости $C_{ср}(U)$ и $L_{ср}(I)$. В приведенном анализе мы считали, что емкость питается определенным напряжением, а индуктивность — определенным током. Предлагается читателю рассмотреть обратный случай, когда нелинейная емкость питается от генератора синусоидального тока (рис. 10-49), а к индуктивности подведена гармоническая э. д. с. (рис. 10-50).

Нетрудно показать, что в схеме рис. 10-49 напряжение $u_C(t)$ имеет искаженную остроконечную форму, а в схеме рис. 10-50 аналогично искаженную форму имеет ток $i_L(t)$.

Нелинейные энергоемкие элементы решают многие важные задачи в радиоэлектронных устройствах. Так, нелинейные индуктивности и емкости используются в качестве элементов цепей с плавно регулируемыми параметрами (рис. 10-51). Изменяя смещение, т. е. исходную рабочую точку на характеристике, можно плавно изме-

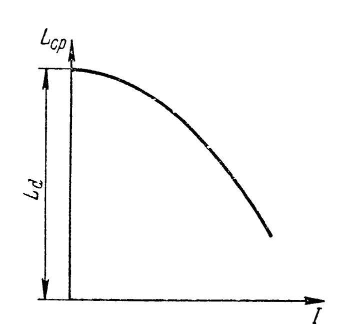


Рис. 10-47. Характеристика средней емкости.

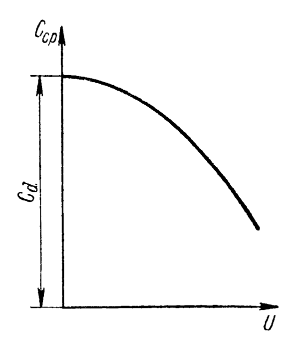


Рис. 10-48. Характеристика средней индуктивности.

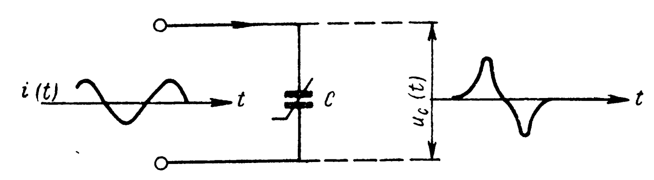


Рис. 10-49. Воздействие гармонического тока на нелинейную емкость.

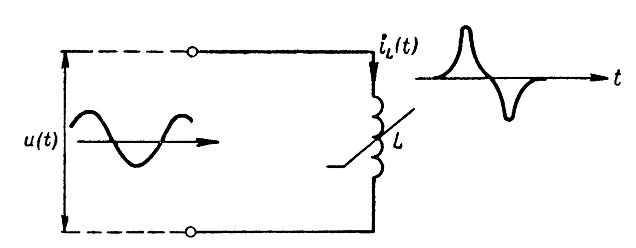


Рис. 10-50. Воздействие гармонического напряжения на нелинейную индуктивность.

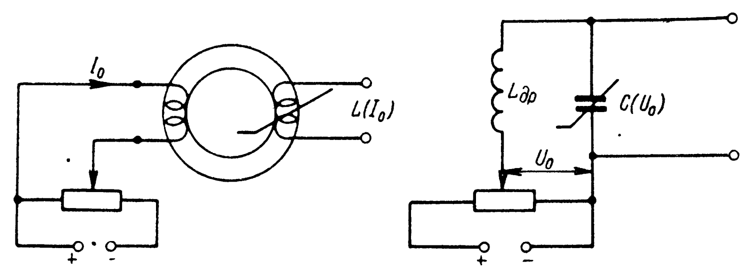


Рис. 10-51. Схемы практического использования нелинейных энергоемких элементов.

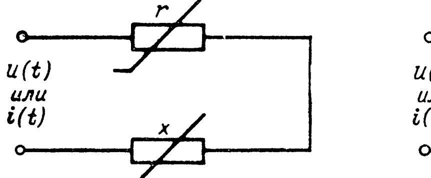
нять L и C элементов. В нелинейной индуктивности изменение исходной рабочей точки достигается регулированием постоянного тока подмагничивания I_0 через специальную обмотку, помещенную на том же сердечнике, что и основная обмотка, включаемая в цепь. Изменение смещения в нелинейной емкости достигается подключением к конденсатору источника регулируемого постоянного напряжения U_0. Дроссель $L_{др}$ служит для того, чтобы конденсатор не оказался замкнутым для переменного тока на малое сопротивление источника U_0.

Подробнее вопросы использования нелинейных реактивных элементов в радиотехнических цепях обсуждаются в главах четырнадцатой и шестнадцатой.

10-11. Смешанные нелинейные цепи с одним энергоемким элементом

а) Нелинейные дифференциальные уравнения цепей

Изучив элементарные нелинейные цепи, перейдем теперь к рассмотрению цепей, составленных из последовательно или параллельно соединенных активного и реактивного сопротивлений, полагая, что



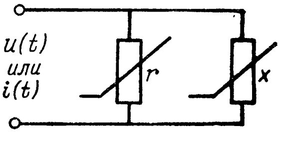


Рис. 10-52. Смешанная нелинейная цепь.

в общем случае оба эти элемента нелинейны (рис. 10-52). Если воздействующее на цепь напряжение u (t) или ток i (t) имеют произвольную форму, задача сводится к расчету переходного процесса в цепи.

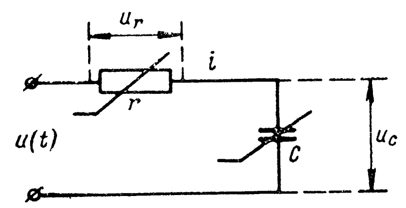


Рис. 10-53. Нелинейная цепь r, C.

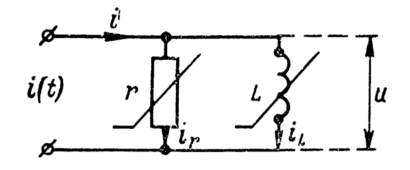


Рис. 10-54. Нелинейная цепь r, L.

Для решения этой задачи обратимся к классическому методу. В цепи r, C (рис. 10-53) искомой величиной (откликом) будем считать напряжение на емкости u_C, а в цепи r, L (рис. 10-54) — ток i_L через индуктивность.

Согласно второму закону Кирхгофа (рис. 10-53)

$$u_r + u_C = u(t)$$

или

$$u_C + ir = u(t); \quad (10\text{-}127)$$

подставляя сюда вместо i его значение из (10-111), получим

$$u_C + C_d r \frac{du_C}{dt} = u(t). \quad (10\text{-}128)$$

Согласно первому закону Кирхгофа (рис. 10-54)

$$i_r + i_L = i(t)$$

или

$$i_L + \frac{u}{r} = i(t); \quad (10\text{-}127а)$$

подставляя сюда вместо $u = u_L$ его значение из (10-84), получим

$$i_L + \frac{L_d}{r} \cdot \frac{di_L}{dt} = i(t). \quad (10\text{-}129)$$

Полученные дифференциальные уравнения по своей структуре аналогичны уравнениям линейных цепей. Однако теперь коэффициент при первой производной сам является функцией независимой переменной, так как роль параметра r в уравнениях играет статическое сопротивление нелинейного элемента, а в качестве емкости и индуктивности фигурируют дифференциальные параметры нелинейных элементов C_d и L_d. Все эти параметры зависят от режима цепи.

Таким образом, явления в рассматриваемых цепях описываются нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка вида

$$y + f(y)\frac{dy}{dt} = x(t), \quad (10\text{-}130)$$

где $x(t)$ — функция воздействия;
$y(t)$ — функция отклика.

За исключением некоторых частных случаев, решение этого уравнения не может быть представлено в известных функциях. Поэтому, желая использовать классический метод, мы в большинстве случаев принуждены искать приближенное, иногда лишь качественное, решение.

Что касается других методов расчета переходных процессов, основанных на принципе наложения (см. главу девятую), то они непригодны для нелинейных цепей, поскольку принцип наложения к этим цепям неприменим.

Все это приводит к существенным трудностям анализа смешанных нелинейных цепей при произвольной форме функции воздействия.

Остановимся на тех частных случаях, когда решение уравнения (10-130) оказывается возможным.

Пусть функция воздействия имеет форму скачка, т. е.

$$x(t) = U \cdot 1(t).$$

Тогда уравнение (10-130) для $t \geqslant 0$ приобретает вид

$$y + f(y)\frac{dy}{dt} = U, \quad (10\text{-}131)$$

откуда

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{U - y}{f(y)} \qquad (10\text{-}132)$$

и

$$t = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\dot{y}} = \int_{y_0}^{y} \frac{f(y)}{U - y} dy. \qquad (10\text{-}133)$$

Здесь y_0 — начальное (в начальный момент) значение отклика; y — его текущее значение.

Если вид функции $f(y)$ это позволяет, то интеграл (10-133) может быть вычислен. Правда, решение получается в виде $t = f(y)$, а не $y = f(t)$, но это, разумеется, не имеет принципиального значения.

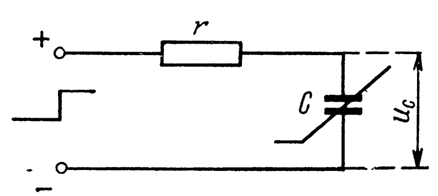


Рис. 10-55. Нелинейная цепь r, C под воздействием скачка напряжения.

Рассмотрим схему (рис. 10-55), состоящую из линейного сопротивления r и нелинейной емкости, дифференциальное значение которой имеет, например, вид

$$C_d(u_C) \approx \frac{\alpha}{2\sqrt{u_C}} = \frac{\beta}{\sqrt{u_C}}.$$

Требуется рассчитать напряжение на емкости $u_C(t)$ при условии воздействия на цепь скачка

$$u(t) = U \cdot 1(t).$$

Дифференциальное уравнение (10-128) для данной цепи для $t \geqslant 0$ приобретает вид:

$$u_C + \frac{\beta r}{\sqrt{u_C}} \cdot \frac{du_C}{dt} = U. \qquad (10\text{-}134)$$

Отсюда, имея в виду (10-133), найдем

$$t = \int_0^{u_C} \frac{\beta r}{\sqrt{u_C}(U - u_C)} du_C = \frac{2\beta r}{\sqrt{U}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{u_C}{U}}. \qquad (10\text{-}135)$$

Как видно, в данном случае оказалось возможным найти решение в известных функциях. Более того, нетрудно решить (10-135) относительно u_C и представить результат в виде временно̀й зависимости $u_C(t)$:

$$\frac{u_C}{U} = \operatorname{th}^2\left[\frac{\sqrt{U}}{2\beta r} t\right]. \qquad (10\text{-}136)$$

На рис. 10-56 построена рассчитанная по этой формуле кривая $\frac{u_C}{U} = f\left(\frac{t}{2\beta r}\right)$ при условии $U = 1$, представляющая собой не что иное как «переходную характеристику» цепи. Весьма интересно сравнить ее с аналогичной характеристикой линейной цепи r, C (см. рис. 8-15). Если в линейной цепи нарастание

напряжения на емкости происходит с монотонно убывающей скоростью, то в рассматриваемой нелинейной цепи дело обстоит иначе. По мере увеличения напряжения скорость его возрастания увеличивается, поэтому кривая в своей нижней части имеет характерный изгиб.

Причину этого явления нетрудно понять: ведь с увеличением напряжения емкость уменьшается и автоматически уменьшается «постоянная времени» цепи.

Еще одно обстоятельство существенно отличает нелинейную цепь от линейной. Форма переходной характеристики линейной цепи не зависит от величины скачка; последняя влияет только на масштаб оси ординат характери-

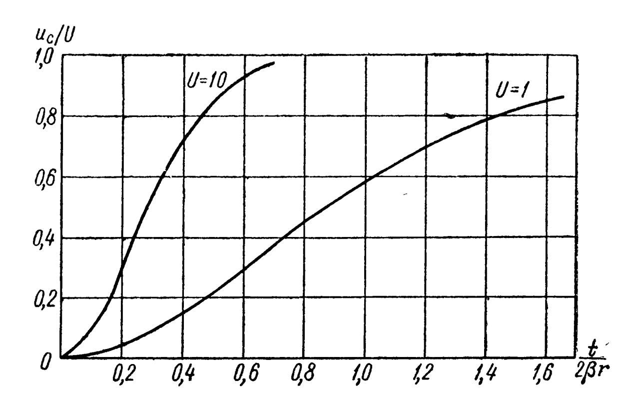


Рис. 10-56. Кривые переходного процесса в нелинейной цепи r, C.

стики, в то время как в нелинейной цепи величина скачка сказывается и на форме характеристики. Так, в рассматриваемом примере, как это видно из (10-136), при большем U (например, $U = 10$ — рис. 10-56) и при прочих равных условиях относительное напряжение на емкости нарастает быстрее, чем в случае $U = 1$. Кривая переходного процесса в среднем имеет бо́льшую крутизну.

б) Фазовые портреты

Процесс изменения во времени некоторой величины y можно, как это обычно делается, характеризовать временно́й диаграммой $y = f(t)$, представляющей собой график зависимости мгновенного значения y от времени.

Однако можно поступить иначе, изображая на графике зависимость скорости изменения $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ от самой величины y, т. е. $\dot{y} = f(y)$.

Координатная плоскость ($\dot{y}$; y) называется **фазовой плоскостью**, а кривая $\dot{y} = f(y)$ — фазовой траекторией изображающей точки или, короче, **фазовым портретом**.

Хотя в фазовом портрете время явно не участвует, он все же дает достаточно полное представление о характере процесса, так как каждая точка фазовой траектории соответствует определенному состоянию (фазе) системы.

Рассмотрим некоторые примеры.

В главе восьмой было показано, что в линейной цепи r, C скорость изменения напряжения на емкости в процессе ее зарядки постоянным напряжением U_0 [см. (8-23) при $e(t) = U_0$]

$$\dot{u}_C = \frac{du_C}{dt} = \frac{U_0 - u_C}{rC}.$$

Это и есть уравнение фазовой траектории напряжения на емкости $\dot{u}_C = f(u_C)$. Фазовая траектория представляет собой прямую, вдоль которой (по направлению стрелки) скользит изображающая точка: в момент включения напряжения U_0 (т. е. $t = 0+$) скорость макси-

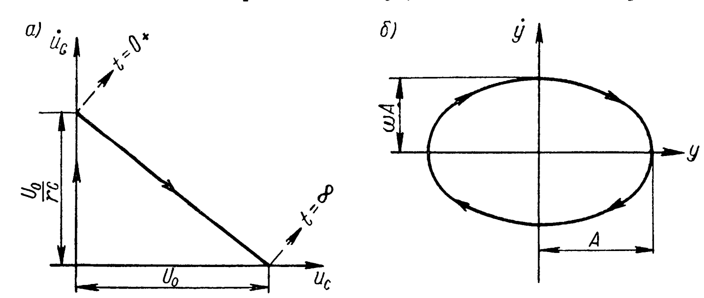


Рис. 10-57. Фазовые портреты: *а*) напряжения на емкости при воздействии скачка напряжения на линейную цепь r, C; *б*) гармонического колебания.

мальна $\left(\dot{u}_{C\,\text{макс}} = \frac{U_0}{rC}\right)$ а при $t = \infty$, когда $u_C = U_0$, скорость равна нулю (рис. 10-57, *а*). [1]

В качестве другого примера рассмотрим гармоническое колебание

$$y = A \cos \omega t;$$

скорость изменения величины y

$$\dot{y} = -\omega A \sin \omega t.$$

Возведя в квадрат эти выражения и сложив их почленно, получим уравнение фазовой траектории в виде

$$\frac{y^2}{A^2} + \frac{\dot{y}^2}{\omega^2 A^2} = 1. \qquad (10\text{-}137)$$

Это — уравнение эллипса с полуосями A и ωA (рис. 10-57, *б*). За один период изображающая точка описывает полный оборот вдоль эллипса.

[1] Нетрудно видеть, что приведенный в главе восьмой рис. 8-7 является фазовым портретом тока при включении цепи r, L на постоянное напряжение, а рис. 8-19 — фазовой траекторией напряжения на емкости при разряде конденсатора на сопротивление.

Отсюда видно, что фазовый портрет периодического процесса представляет собой замкнутую фигуру, причем гармоническому колебанию соответствует фазовая траектория, имеющая форму эллипса.

Вернемся теперь к нелинейному уравнению (10-131). Функция $y(t)$ описывается фазовым портретом [уравнение (10-132)]; характер фазовой траектории определяется видом функции $f(y)$.

Для нелинейной цепи (рис. 10-55) уравнение фазового портрета получается из (10-134):

$$\dot{u}_C = \frac{du_C}{dt} = \frac{U - u_C}{\beta r}\sqrt{u_C} = \frac{U^{3/2}}{\beta r}\sqrt{\frac{u_C}{U}}\left(1 - \frac{u_C}{U}\right). \tag{10-138}$$

На рис. 10-58 показаны кривые, построенные по этому уравнению для $U = 1$ и $U = 10$. При $\frac{u_C}{U} = \frac{1}{3}$ они имеют максимум, равный

$$\dot{u}_{C\,\text{макс}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{U\sqrt{U}}{\beta r}.$$

Даже не производя интегрирования, только по виду этих кривых можно судить о характерных особенностях изучаемого процесса. В начальный момент $t = 0$, в отличие от линейной цепи, скорость равна нулю. Затем вплоть до $u_C = \frac{1}{3}U$ скорость возрастания напряжения увеличивается и тем в большей степени, чем больше величина скачка воздействующего напряжения U. Только при напряжениях $u_C > \frac{1}{3}U$ скорость уменьшается, становясь опять равной нулю при $u_C = U$ (когда $t = \infty$).

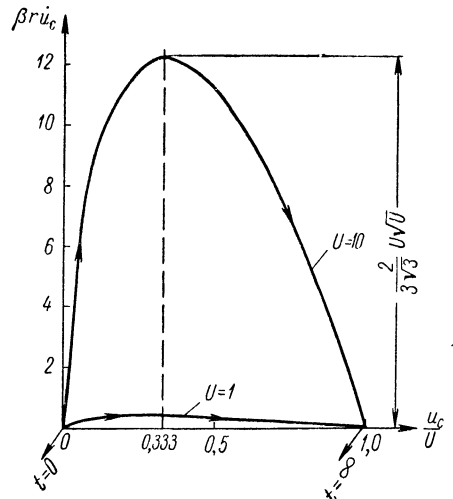


Рис. 10-58. Фазовые портреты нелинейной цепи r, C.

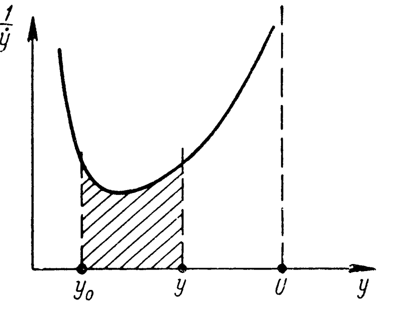


Рис. 10-59. Графический расчет временной диаграммы переходного процесса.

Во многих случаях фазовая траектория дает достаточную качественную информацию о характере процесса и нет нужды искать уравнение временной диаграммы $y = f(t)$.

Если же необходимо рассчитать временну́ю диаграмму, когда аналитическое интегрирование оказывается невозможным, переход от фазового портрета к временно̀й диаграмме можно осуществить путем графического интегрирования.

С этой целью строят (рис. 10-59) кривую $\frac{1}{\dot{y}} = f(y)$. Так как согласно (10-133)

$$t = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{\dot{y}} dy,$$

то время, соответствующее некоторому значению y, равно площади, заштрихованной на рис. 10-59. Так, последовательно задаваясь разными значениями y, находят $t = f(y)$.

Надо иметь в виду, что непосредственно найти уравнение фазового портрета из нелинейного дифференциального уравнения возможно только в том случае, когда правая часть последнего (функция воздействия) равна нулю или постоянной величине, т. е. в свободном режиме или при воздействии скачка напряжения.

Метод фазовой плоскости особенно удобен в тех случаях, когда зависимость параметров схемы r, L и C от режима задана не аналитически, а своими численными значениями (графиками). Тогда без особого труда может быть найдена функция $f(y)$, которая определяется параметрами схемы (например, в схеме рис. 10-55 $f(y) = r_d C$), а затем построена и фазовая траектория.

в) Расчет переходного процесса при произвольной форме воздействия

Пусть функция воздействия $x(t)$ имеет произвольную форму (рис. 10-60, *а*), и требуется рассчитать переходный процесс в цепи, т. е. зависимость отклика от времени — $y(t)$. Эта задача может быть приближенно решена графо-аналитическим способом, основанным на методе фазовой плоскости.

Представим функцию воздействия в виде ряда последовательно действующих прямоугольных импульсов одинаковой длительности

$$x_1 = u_1[1(t) - 1(t - \Delta t)]; \quad x_2 = u_2[1(t - \Delta t) - 1(t - 2\Delta t)];$$
$$x_3 = u_3[1(t - 2\Delta t) - 1(t - 3\Delta t)]; \ \ldots$$

Уравнение фазовой траектории для исследуемой величины y является некоторой функцией величины скачка u (высоты импульса) и самой величины y, т. е.

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = F(u, y).$$

Если в начальный момент $y = y_0$ (рис. 10-60, *б*), то к концу первого интервала искомая величина y приближенно равна

$$y_1 \approx y_0 + \left[\frac{dy}{dt}\right]_{\substack{u=u_1 \\ y=y_0}} \Delta t = y_0 + F(u_1, y_0)\,\Delta t,$$

где $F(u_1, y_0) = \operatorname{tg} \alpha_1$ — скорость $\dot{y}$, соответствующая скачку u_1 и величине $y = y_0$.

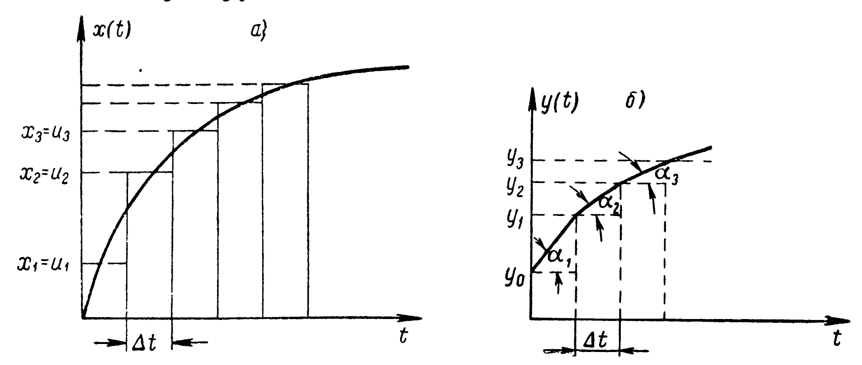


Рис. 10-60. К расчету переходного процесса при произвольной форме воздействия.

Значение $y = y_1$ является начальным для второго интервала. В конце этого интервала

$$y_2 = y_1 + F(u_2, y_1)\Delta t,$$

где $F(u_2, y_1) = \operatorname{tg} \alpha_2$.

Вообще в конце n-го интервала времени

$$y_n = y_{n-1} + F(u_n, y_{n-1})\Delta t.$$

Результаты расчетов целесообразно свести в табл. 10-8.

Таблица 10-8

Расчет режима нелинейной цепи при произвольной форме воздействия

t	x	$y_{нач}$	$F(u, y_{нач})$	$F(u, y_{нач})\Delta t$	y
1	2	3	4	5	6
t_1	u_1	y_0	$F(u_1, y_0)$	$F(u_1, y_0)\Delta t$	y_1
t_2	u_2	y_1	$F(u_2, y_1)$	$F(u_2, y_1)\Delta t$	y_2
t_3	u_3	y_2	$F(u_3, y_2)$	$F(u_3, y_2)\Delta t$	y_3
.....					....

Данные граф первой и шестой определяют временну́ю диаграмму исследуемой величины $y = f(t)$. Одновременно графы первая и четвертая дают временну́ю зависимость $\frac{dy}{dt} = f(t)$ Если расчет произ-

водится, например, для цепи r, C и искомой величиной является заряд ($y \equiv q$), полученные таким путем зависимости дают закон изменения во времени заряда q и тока $i = \frac{dq}{dt}$.

Наконец, по данным граф четвертой и шестой определяется фазовый портрет $\dot{y} = f(y)$.

Если функция воздействия периодическая, то после окончания переходного процесса, в стационарном режиме, фазовая траектория представляет собой замкнутую фигуру, которая называется стационарным циклом. В качестве примера на рис. 10-61 приведен фазовый портрет некоторого процесса; начальное состояние системы характеризуется точкой a на фазовой плоскости, координаты которой равны начальным значениям: самой величины y_0 и скорости ее изменения $\dot{y}_0$.

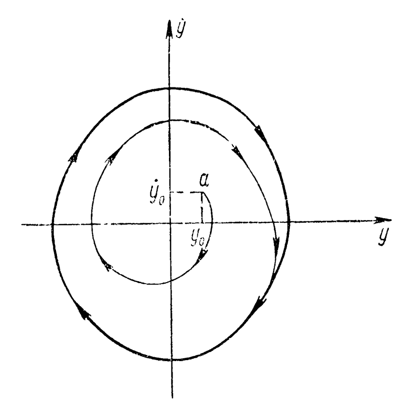


Рис. 10-61. Фазовый портрет переходного процесса при периодическом воздействии.

После нескольких витков спирали, соответствующих переходному процессу, фазовая траектория «наматывается» на стационарный цикл. Чем ближе к эллипсу вид стационарного цикла, тем менее форма колебаний отличается от гармонической.

Описанный метод аналогичен методам, рассмотренным в § 9-2 и 9-3 в том смысле, что воздействующее на цепь напряжение произвольной формы заменяется действием множества элементарных функций (импульсов). Однако здесь принцип суперпозиции не может быть использован и не используется; реакция системы на каждый из импульсов определяется в соответствии с его величиной и значением отклика в момент «включения» очередного импульса. Метод дает тем более точные результаты, чем меньше шаг интегрирования Δt.

10-12. Нелинейные цепи с двумя энергоемкими элементами

В качестве нелинейной цепи с двумя реактивными элементами рассмотрим последовательный колебательный контур. Наибольший интерес представляет изучение двух случаев: а) когда нелинейным является активное сопротивление, в то время как емкость и индуктивность линейны; б) когда один из реактивных элементов — индуктивность или емкость — обладает нелинейными свойствами, а сопротивление контура линейно.

а) Колебательный контур с нелинейным сопротивлением. Построение Льенара

Пусть на контур (рис. 10-62), содержащий нелинейное сопротивление $r(i)$, воздействует скачок напряжения

$$u(t) = U \cdot 1(t).$$

Найдем дифференциальное уравнение, описывающее процессы в контуре, полагая откликом на заданное воздействие напряжение на емкости u_C; имеем для $t \geqslant 0$

$$u_L + u_r + u_C = U.$$

Так как

$$i = C\frac{du_C}{dt},$$

то

$$u_L = L\frac{di}{dt} = LC\frac{d^2u_C}{dt^2},$$

$$u_r = r(i)\,i = r(i)\,C\frac{du_C}{dt}$$

и уравнение принимает вид

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + r(i)\,C\frac{du_C}{dt} + u_C = U. \qquad (10\text{-}139)$$

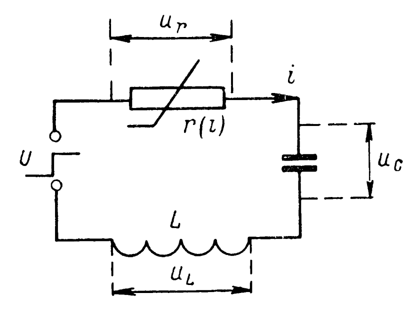


Рис. 10-62. Колебательный контур с нелинейным сопротивлением.

От независимой переменной t перейдем теперь к новой переменной

$$\vartheta = \omega_0 t = \frac{1}{\sqrt{LC}}t.$$

Тогда

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{du_C}{d\vartheta}\cdot\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_0\frac{du_C}{d\vartheta};$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} = \omega_0\frac{d^2u_C}{d\vartheta^2}\cdot\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_0^2\frac{d^2u_C}{d\vartheta^2};$$

$$i = \omega_0 C\frac{du_C}{d\vartheta} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{du_C}{d\vartheta}.$$

В связи с заменой переменной уравнение (10-139) запишется так:

$$\ddot{u}_C + r\left(\frac{\dot{u}_C}{\rho}\right)\frac{\dot{u}_C}{\rho} + u_C = U. \qquad (10\text{-}140)$$

Здесь точки над буквами символизируют дифференцирование по новой переменной ϑ; через $r\left(\frac{\dot{u}_C}{\rho}\right)$ обозначено сопротивление, являющееся функцией отношения $\dot{u}_C/\rho$.

Итак, процессы в контуре описываются нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка, имеющим вид

$$\ddot{y} + \varphi(\dot{y}) + y = U, \qquad (10\text{-}141)$$

где $\varphi(\dot{y})$ — некоторая нелинейная функция первой производной $\dot{y}$.

Будем искать решение этого уравнения в виде фазового портрета $\dot{y} = F(y)$.

С этой целью удобно воспользоваться графическим построением, предложенным Льенаром.

Обозначив $\dot{y} = z$, получим из уравнения (10-141)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{d\vartheta} &= \dot{z} = U - \varphi(z) - y, \\ \frac{dy}{d\vartheta} &= z. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$\frac{dz}{dy} = \frac{U - \varphi(z) - y}{z}. \qquad (10\text{-}142)$$

Это выражение определяет крутизну фазовой траектории $z = \dot{y} = F(y)$ в данной точке.

Согласно методу Льенара сначала строится так называемая характеристическая кривая (рис. 10-63) по уравнению

$$y = U - \varphi(z).$$

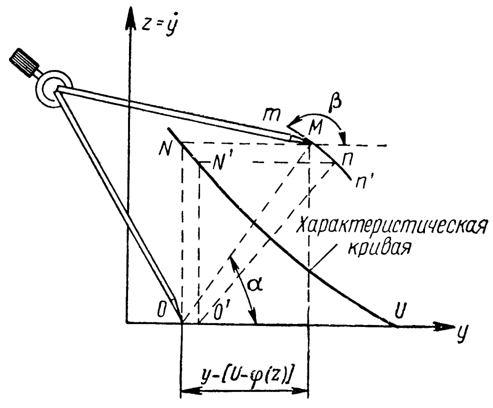


Рис. 10-63. Построение Льенара.

Для построения участка фазовой траектории, проходящей через точку M, надо провести горизонтальную прямую MN до пересечения с характеристической кривой, опустить перпендикуляр NO на ось абсцисс и из точки O провести прямую OM. Отрезок mn, перпендикулярный OM, является частью фазовой кривой.

Для того чтобы убедиться в справедливости этого построения, достаточно обратить внимание на то, что

$$\operatorname{tg}\beta = -\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{y - [U - \varphi(z)]}{z}.$$

Сравнив это с (10-142), видим, что $\operatorname{tg}\beta = \frac{dz}{dy}$, т. е. равен крутизне фазовой траектории в заданной точке.

Практически при построении фазового портрета поступают так: из точки O как из центра проводят циркулем засечку mn через

точку M. Далее из конца дуги (точка n) проводят горизонталь nN', опускают перпендикуляр в точку O' и описанным способом получают следующий участок фазовой траектории nn'. Чем меньше длина каждой дуги, тем точнее результат построения.

Вернемся теперь к уравнению (10-140). Произведение

$$r\left(\frac{\dot{u}_C}{\rho}\right)\frac{\dot{u}_C}{\rho}=ri=u_r,$$

равное напряжению на активном сопротивлении, является некоторой функцией тока $i=\frac{\dot{u}_C}{\rho}$:

$$u_r=f_{0r}(i). \tag{10-143}$$

Здесь функция f_{0r} представляет собой уравнение обращенной вольт-амперной характеристики нелинейного сопротивления.

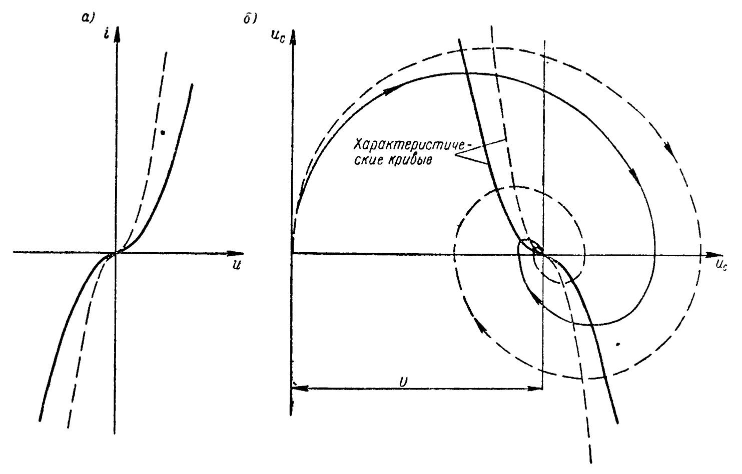


Рис. 10-64. Построение Льенара для нелинейного колебательного контура.

Таким образом, уравнение (10-140) можно записать так:

$$\ddot{u}_C+f_{0r}\left(\frac{\dot{u}_C}{\rho}\right)+u_C=U. \tag{10-144}$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(\dot{u}_C)=f_{0r}\left(\frac{\dot{u}_C}{\rho}\right),$$

и уравнение характеристической кривой имеет вид

$$u_C=U-f_{0r}\left(\frac{\dot{u}_C}{\rho}\right). \tag{10-145}$$

Если задана вольт-амперная характеристика сопротивления (рис. 10-64, *а*), то для нахождения фазовой траектории из точки оси

абсцисс $u_C = U$ как из начала координат строят влево подобную же характеристику, откладывая в качестве тока i отношение $\dot{u}_c/\rho$ (рис. 10-64, *б*). Она и является характеристической кривой, относительно которой надо производить построение Льенара. На рис. 10-64, *б* показан полученный таким способом для некоторого значения ρ фазовый портрет. Он представляет собой спираль, начинающуюся в начале координат (нулевые начальные условия) и заканчивающуюся в точке $u_C = U$. Это означает, что переходный процесс имеет колебательный затухающий характер. Представляющая точка описывает один виток спирали за время, равное периоду собственных колебаний. Форма спирали определяет и форму временнóй диаграммы $u_C = f(t)$. В стационарном режиме напряжение на емкости равно U.

При бóльшем ρ (т. е. большей добротности контура) характеристическая кривая проходит круче (пунктир на рис. 10-64, *б*), а фазовый портрет состоит из большего числа витков.

б) Колебательный контур с нелинейной реактивностью. Феррорезонанс.

На рис. 10-65 изображена схема колебательного контура, содержащего нелинейную индуктивность $L(i)$. Контур находится под воздействием гармонического напряжения с частотой ω и амплитудой U.

Напряжение на нелинейной индуктивности

$$u_L = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{di} \cdot \frac{di}{dt} = L_d(i)\frac{di}{dt}$$

или, имея в виду, что ток

$$i = C\frac{du_C}{dt} = C\dot{u}_C,$$

получим

$$u_L = L_d(C\dot{u}_C)\,C\ddot{u}_C.$$

Напряжение на активном сопротивлении

$$u_r = rC\dot{u}_C.$$

Уравнение второго закона Кирхгофа для изучаемой цепи будет

$$CL_d(C\dot{u}_C)\,\ddot{u}_C + rC\dot{u}_C + u_C = U\cos\omega t. \qquad (10\text{-}146)$$

Таким образом, явления в системе описываются нелинейным дифференциальным уравнением вида

$$\psi(\dot{y})\,\ddot{y} + a\dot{y} + y = U\cos\omega t.$$

Даже приближенное качественное решение этого уравнения вызывает большие затруднения. Поэтому для анализа стационарного режима цепи пойдем по иному пути.

Если контур обладает достаточной избирательностью (высокой добротностью), то в режиме, близком к резонансу, из всех гармонических составляющих тока наибольшую величину имеет ток первой гармоники. Коэффициент нелинейных искажений k_f будет невелик, и согласно (10-25) действующее значение тока весьма близко к действующему значению составляющей тока первой гармоники, т. е. $I_д \approx I_{1д}$.

В этих условиях вполне целесообразно произвести расчет для токов и напряжений основной частоты, имея, конечно, в виду, что параметры цепи, в частности ее входное сопротивление, не остаются неизменными, а сами зависят от амплитуды колебаний первой гармоники. Короче говоря, для исследования цепи применим к в а з и л и н е й н ы й м е т о д (см. § 10-2).

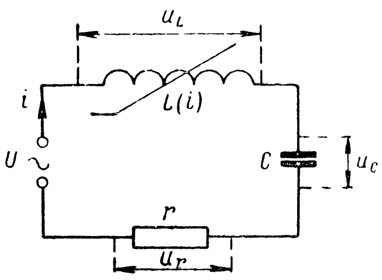


Рис. 10-65. Колебательный контур с нелинейной индуктивностью.

Желая определить амплитуду тока первой гармоники в стационарном режиме, в качестве индуктивности контура мы должны считать среднюю индуктивность $L_{ср}(I_1)$.

Тогда амплитуда тока первой гармоники

$$I_1 = \frac{U}{r\sqrt{1+\left[\frac{\omega L_{ср}(I_1) - \frac{1}{\omega C}}{r}\right]^2}};$$

обозначая

$$\frac{U}{r} = I_{1р},$$

для нормированного тока $n = \frac{I_1}{I_{1р}}$ получим

$$n = \frac{1}{\sqrt{1+\left[\frac{\omega L_{ср}(I_1) - \frac{1}{\omega C}}{r}\right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2_{вх}}{r^2}}}. \qquad (10\text{-}147)$$

Для зависимости средней индуктивности от тока примем аппроксимацию вида (10-126а)

$$L_{ср} = a_1 - \frac{3}{4}a_3 I_1^2 = L_0(1 - k^2 I_1^2). \qquad (10\text{-}148)$$

Здесь $L_0 = a_1$ — средняя индуктивность при $I_1 \to 0$, т. е. дифференциальная индуктивность L_d.

$k^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{a_3}{a_1}$ — коэффициент, определяющий степень нелинейности характеристики индуктивности.

Резонансные явления в нелинейном контуре имеют некоторые интересные особенности. Прежде всего резонансная частота ω_0 сама зависит от тока I_1.

Действительно, из (10-147) следует, что

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_{\text{ср}}(I_1)\,C}};$$

подставив сюда (10-148), получим

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C\,(1 - k^2 I_1^2)}} = \frac{\omega_{00}}{\sqrt{1 - k^2 I_1^2}}. \qquad (10\text{-}149)$$

Здесь $\omega_{00} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C}}$ — резонансная частота в режиме малых колебаний, когда $I_1 \to 0$.

Таким образом, резонансная частота возрастает с увеличением произведения kI_1 (рис. 10-66), т. е. при заданной степени нелинейности k — с увеличением тока I_1.

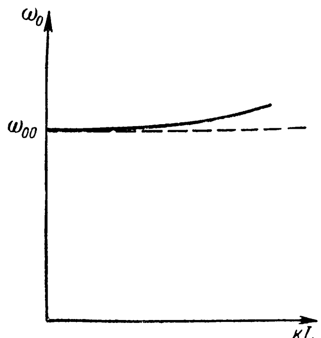


Рис. 10-66. Характеристика резонансной частоты нелинейного колебательного контура.

Теперь аналогично тому, как это делалось в теории линейного колебательного контура, найдем уравнение частотной (резонансной) характеристики $n(\omega)$ для области малых расстроек.

Преобразуя выражение реактивной составляющей входного сопротивления, получим

$$x_{\text{вх}} = \omega L_{\text{ср}}(I_1) - \frac{1}{\omega C} =$$
$$= \omega_{00} L_0 \left[\frac{\omega}{\omega_{00}}(1 - k^2 I_1^2) - \frac{\omega_{00}}{\omega}\right].$$

Здесь $\omega_{00} L_0 = \rho_0$ — характеристическое сопротивление в режиме малых колебаний.

Обозначая

$$\Delta\omega = \omega - \omega_{00}$$

и полагая, что в области малых расстроек

$$\omega + \omega_{00} \approx 2\omega_{00},$$
$$\omega\omega_{00} \approx \omega_{00}^2,$$

после простых преобразований найдем

$$x_{\text{вх}} \approx \rho_0 \left[\frac{2\Delta\omega}{\omega_{00}} - k^2 I_1^2\right].$$

Имея в виду, что $I_1 = nI_{1р}$ и обозначив

$$k^2 I_{1р}^2 = \gamma,$$

получим

$$x_{вх} \approx \rho_0 \left[\frac{2\Delta\omega}{\omega_{00}} - \gamma n^2 \right].$$

Подставив найденное значение $x_{вх}$ в (10-147), придем к уравнению частотной характеристики

$$n^2 = \frac{1}{1 + Q_0^2 \left[\frac{2\Delta\omega}{\omega_{00}} - \gamma n^2 \right]^2}, \qquad (10\text{-}150)$$

где $Q_0 = \frac{\rho_0}{r}$ — добротность в режиме малых колебаний.

Уравнение (10-150) отличается от резонансной характеристики линейного контура [см. (4-39)] присутствием в знаменателе члена γn^2.

Это уравнение удобнее представить в виде $\frac{\Delta\omega}{\omega_{00}} = f(n)$.

Решая его относительно $\Delta\omega/\omega_{00}$, находим

$$2Q_0 \frac{\Delta\omega}{\omega_{00}} = \frac{\pm\sqrt{1 - n^2}}{n} + \gamma Q_0 n^2. \qquad (10\text{-}151)$$

Величина, стоящая в левой части, есть не что иное, как обобщенная расстройка, рассчитанная относительно резонансной частоты ω_{00}, при добротности Q_0:

$$2Q_0 \frac{\Delta\omega}{\omega_{00}} = \xi \quad [\text{ср. с } (4\text{-}31)].$$

Таким образом, получено уравнение частотной характеристики в координатах $\xi = f(n)$ при параметре γQ_0.

По формуле (10-151) рассчитаны и построены резонансные характеристики $n(\xi)$, изображенные на рис. 10-67.

При $\gamma Q_0 = 0$, т. е. в линейном режиме, характеристика совпадает с обобщенной кривой резонанса колебательного контура (см. рис. 4-9). С увеличением параметра γQ_0 частотная характеристика деформируется. Максимум ее смещается в область более высоких частот. Это вполне естественно и согласуется с рис. 10-66: ведь с увеличением $\gamma = k^2 I_{1р}^2$ уменьшается средняя индуктивность и возрастает резонансная частота.

После прохождения максимума при дальнейшем увеличении частоты ток резко спадает. Объясняется это тем, что уменьшению тока способствует не только возрастание входного сопротивления при расстройке (наблюдаемое и в линейном контуре), но и то, что уменьшение тока в свою очередь влечет за собой уменьшение резонансной частоты и, значит, резкое возрастание разности между частотой воздействия и резонансной частотой (т. е. возрастание расстройки).

При больших значениях параметра γQ_0 в резонансных кривых наблюдается своеобразная «впадина» (*abc* на рис. 10-68). Однако участок *ab* «впадины» не может наблюдаться на опыте.

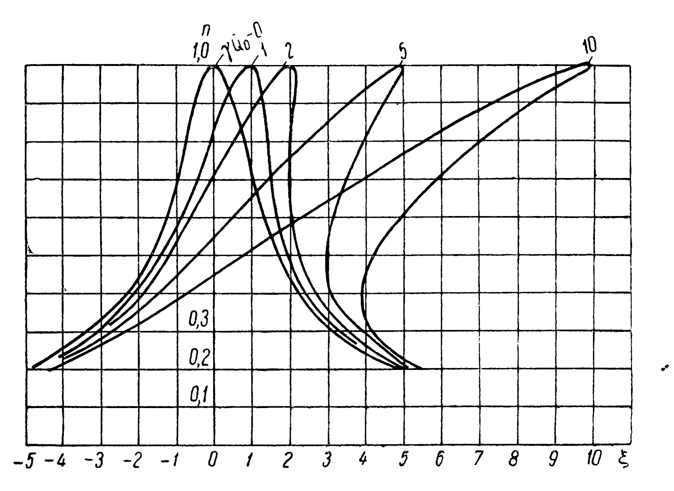


Рис. 10-67. Резонансные характеристики нелинейного колебательного контура.

Действительно, при плавном увеличении частоты рабочая точка скользит по участку *ma*. Дальнейшее возрастание частоты приводит к резкому переходу в точку *c*, т. е. к скачкообразному уменьшению тока, после чего он изменяется по нижнему участку кривой *cn*. Наоборот, при уменьшении частоты рабочая точка скользит по участку *ncb*, после чего в точке *b* происходит скачок в точку *p* и далее изменение тока по верхнему участку *pm*. Этот своеобразный «гистерезис» может наблюдаться, как это следует из рис. 10-67, только при весьма глубоком использовании нелинейности.

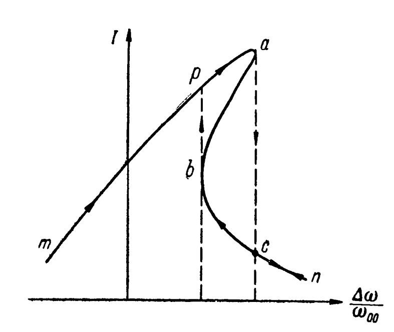


Рис. 10-68. Резонансная характеристика нелинейного колебательного контура.

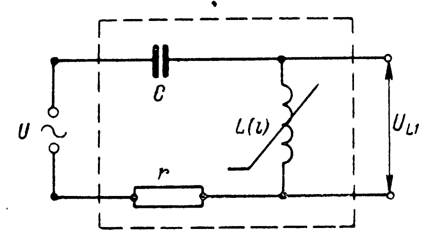


Рис. 10-69. Нелинейный колебательный контур как четырехполюсник.

Резонансные явления в контуре с нелинейной индуктивностью называют обычно феррорезонансом. Результаты, аналогичные изложенным, мы получили бы, если бы нелинейным элементом контура была не индуктивность, а емкость (например, вариконд), величина которой уменьшается с увеличением амплитуды колебаний.

Значительный интерес представляет использование нелинейного колебательного контура в качестве четырехполюсника.

Выходным напряжением будем считать напряжение на нелинейной индуктивности (рис. 10-69). Применяя по-прежнему квазили-

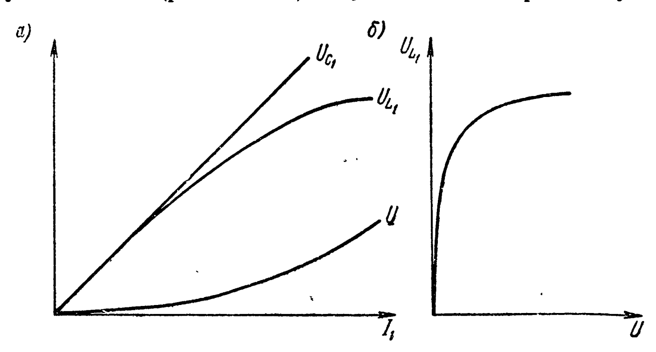


Рис. 10-70. Характеристики напряжений на элементах нелинейного колебательного контура.

нейный метод, получим, что напряжение на индуктивности нелинейно связано с током, т. е.

$$U_{L_1} = \omega L_{\text{ср}} I_1 = \omega L_0 I_1 (1 - k^2 I_1^2). \qquad (10\text{-}152)$$

Зависимость $U_{L1}(I_1)$ является вольт-амперной характеристикой индуктивности (рис. 10-70, *а*).

Амплитуда напряжения на линейной емкости находится в прямой зависимости от амплитуды тока:

$$U_{C1} = \frac{1}{\omega C} I_1. \qquad (10\text{-}153)$$

График зависимости $U_{C1}(I_1)$ также показан на рис. 10-70, *а*.

Допустим для простоты, что в контуре отсутствуют потери ($r = 0$), а частота воздействия ω совпадает с резонансной частотой ω_{00}, соответствующей $I_1 \to 0$. Будем искать зависимость между напряжениями на выходе и входе четырехполюсника.

Так как $\omega = \omega_{00}$ и имея в виду, что $\omega_{00} L = \frac{1}{\omega_{00} C} = \rho_0$, вместо выражений (10-152) и (10-153) получим

$$U_{L1} = \rho_0 I_1 (1 - k^2 I_1^2); \qquad (10\text{-}154)$$

$$U_{C1} = \rho_0 I_1. \qquad (10\text{-}155)$$

Амплитуда приложенного напряжения

$$U = |U_{C1} - U_{L1}| = k^2\rho_0 I_1^3. \qquad (10\text{-}156)$$

График этой функции также приведен на рис. 10-70, *а*.

Определив отсюда I_1 и подставив его значение в (10-154), найдем искомую зависимость между U_{L1} и U:

$$U_{L1} = \sqrt[3]{\frac{\rho_0^2}{k^2}}\sqrt[3]{U} - U. \qquad (10\text{-}157)$$

График зависимости между напряжениями на выходе и входе дан на рис. 10-70, *б*.

Обращает на себя внимание то, что в известных пределах изменения питающего напряжения выходное напряжение изменяется совсем незначительно, т. е. имеет место стабилизация напряжения. Причина этого явления кроется в том, что с увеличением приложенного напряжения, а значит и тока в цепи, уменьшается индуктивность $L_{\text{ср}}(I_1)$, что способствует уменьшению напряжения на индуктивности, т. е. поддержанию его неизменным.

Рассмотренная схема лежит в основе широко используемых феррорезонансных стабилизаторов напряжения. Как видно, феррорезонансный стабилизатор по принципу действия аналогичен стабилизатору, составленному из двух активных сопротивлений (см. рис. 10-20).

Однако при использовании феррорезонанса коэффициент стабилизации σ может быть получен значительно более высоким. Действительно, даже незначительное изменение индуктивности цепи в режиме, близком к резонансу, приводит к весьма резкому перераспределению напряжения между последовательно соединенными элементами цепи. Кроме того, в схеме феррорезонансного стабилизатора отсутствует балластное сопротивление, а значит, и связанные с ним потери энергии.

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

СЛУЧАЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

11-1. Введение

В предыдущих главах книги речь шла о процессах в электрических цепях при воздействиях, описываемых известными, наперед заданными, функциями времени. Такие воздействия, естественно, вызывали отклики, которые в принципе можно было определить для любого момента. Однако во многих случаях величины напряжений и токов в цепи, а также характер их изменения нельзя сколь-нибудь удовлетворительно предсказать заранее. Подобная ситуация будет, например, иметь место, когда электрические явления обусловлены настолько большим количеством связанных между собой причин, что осуществить точный их учет невозможно. С таким же положением наблюдатель, очевидно, будет встречаться каждый раз, когда ему неизвестны законы, управляющие изменением воздействия.

Происходящие при этих условиях процессы называют случайными. Они играют весьма большую роль в современной радиоэлектронике.

Типичными примерами случайных процессов в цепях могут служить явления, вызываемые непрерывной тепловой флюктуацией (т. е. хаотическими колебаниями) свободных электронов. Хаотическое движение большого числа электронов образует ток, существующий в проводнике даже при полном отсутствии внешнего напряжения. Мгновенная величина этого тока будет, очевидно, принимать в различные моменты самые различные, неожиданные для наблюдателя значения.

Возникающее за счет флюктуации электронов падение напряжения на активных сопротивлениях должно изменяться так же случайно.

Аналогичный характер имеют процессы, наблюдаемые в цепях с электронными лампами. Известно, что электрический ток, текущий через лампу, обусловлен движением множества электронов, испускаемых накаленным катодом. Так как число выходящих из катода в равные промежутки времени электронов не может быть

строго постоянным, величина анодного тока лампы все время испытывает случайные колебания относительно некоторого среднего значения.

Помимо рассмотренных процессов, в цепях могут возникать различные нерегулярные изменения, вызванные частичным нарушением контактов, пробоем изоляции и т. д.

Случайные напряжения и токи, появляющиеся в цепях как следствие различных неконтролируемых процессов, по отношению к полезным электрическим колебаниям, возбуждаемым заданными источниками, будут играть роль вредных воздействий — помех.

В радиоприемных устройствах, предназначенных для воспроизведения звуковых колебаний, помехи на выходе воспринимаются в виде шума. По этой причине они получили наименование электрических шумов. В настоящее время термин «электрический шум» условно принят для обозначения помех электрическим колебаниям самых различных видов.

Перечисленные шумы принадлежат к классу так называемых внутренних помех, возникающих непосредственно в электрических цепях.

В радиотехнике при приеме электромагнитных колебаний помимо внутренних шумов приходится сталкиваться также с помехами, создаваемыми различными внешними источниками (внешние шумы). К числу внешних помех относятся атмосферные шумы, возникающие при грозовых разрядах, шумы космического происхождения, обусловленные радиоизлучением Солнца и других небесных тел, помехи, создаваемые различными промышленными установками и т. д.

Исследования показывают, что изменения во времени мгновенных значений напряженности электромагнитного поля внешних шумов в большинстве случаев носят случайный характер. Поэтому электрические процессы, возникающие в цепях под воздействием подобных помех, также являются случайными.

Наконец, следует отметить, что полезные электрические колебания, применяемые в радиотехнике, нередко сами имеют характер случайных процессов (глава двенадцатая).

Таким образом, изучение случайных процессов в настоящее время приобретает весьма большое значение.

11-2. Основные характеристики случайного процесса

Обычные методы расчета, которые мы использовали в предыдущих главах, становятся непригодными для исследования случайных процессов в электрических цепях. Анализ случайных явлений возможно осуществить лишь с помощью методов теории вероятностей.

В теории вероятностей величина ξ, которая может быть определена количественно и которая при каждом конкретном наблюдении одного и того же характера может принимать различные значения, называется случайной. Если такая величина зависит от непрерывно изменяющегося аргумента, например, времени t, то мы имеем **случайную функцию**, или **случайный процесс** $\xi(t)$.

Согласно этой формулировке случайная функция на промежутке времени, равном продолжительности любого конкретного опыта, будет принимать какой-то вполне определенный вид. Однако при каждом новом опыте такой же категории $\xi(t)$ может изменяться во времени совсем по-иному, причем установить характер ее изменения заранее невозможно.

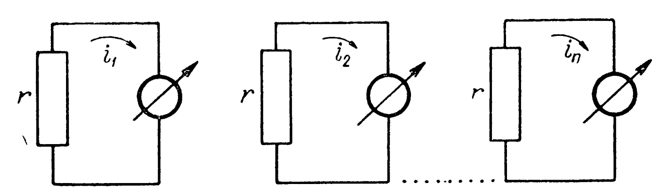


Рис. 11-1. Совокупность n идентичных электрических цепей.

Таким образом, существует множество различных зависимостей $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, ..., $\xi_n(t)$ и т. д., каждая из которых является возможной (конкретной) реализацией случайной функции $\xi(t)$. Совокупность таких зависимостей и описывает случайный процесс.

Предположим, например, что имеется n идентичных электрических цепей, состоящих из активного сопротивления r и прибора для измерения мгновенного значения тока (рис. 11-1).

Во всех этих цепях, как уже отмечалось, должен существовать электрический ток, обусловленный тепловыми флюктуациями электронов. Так как величина тока изменяется во времени хаотически, показания приборов при одинаковых t в общем случае будут различны.

Измеряя мгновенные значения токов в цепях на промежутке времени от t_1 до t_2, можно получить серию кривых $i_1(t)$, $i_2(t)$, ..., $i_n(t)$, примерный вид которых показан на рис. 11-2. Ясно, что любая из этих зависимостей является конкретной реализацией случайной функции $i(t)$ на интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$.

Рассмотрим свойства случайной функции $\xi(t)$ в различные моменты. Пусть, например, $t = t_1$. В соответствии с изложенным значения $\xi(t_1)$ будут равны $\xi_1(t_1)$, $\xi_2(t_1)$, ..., $\xi_n(t_1)$ и т. д. Совокупность полученных чисел, как видно, представляет собой набор значений случайной величины $\xi(t_1)$.

При $t = t_2$ числа $\xi_1(t_2)$, $\xi_2(t_2)$, ..., $\xi_n(t_2)$ ... образуют новую случайную величину $\xi(t_2)$ и т. д.

Отсюда следует, что при фиксированном значении аргумента t случайная функция эквивалентна случайной величине.

Из теории вероятностей известно, что свойства случайной величины достаточно полно описываются так называемой ф у н к ц и е й р а с п р е д е л е н и я. Напомним, что функция распределения $F(x)$ случайной величины X определяет вероятность события $X < x$, где x — текущая переменная. Аналитически это определение можно записать следующим образом:

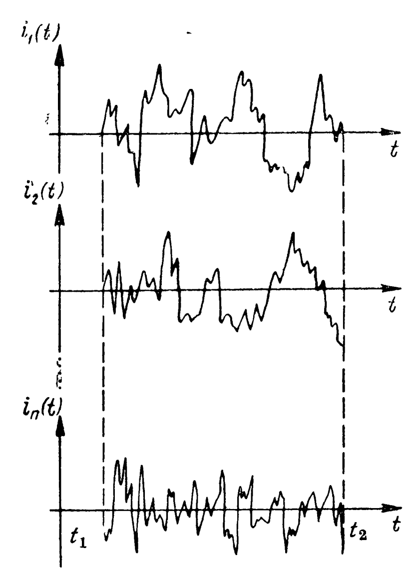


Рис. 11-2. Тепловые флюктуации тока.

$$F(x) = P(X < x),$$

где P — символ, обозначающий вероятность события [Л. 2].

Если величина X непрерывна, то вместо функции распределения удобно пользоваться функцией

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \qquad (11\text{-}1)$$

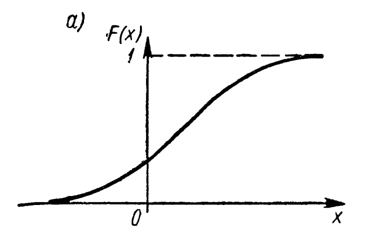
получившей название п л о т н о с т и р а с п р е д е л е н и я, или п л о т н о с т и в е р о я т н о с т и.

Примерные графики функции и плотности распределения непрерывной случайной величины приведены на рис. 11-3, *а* и *б* соответственно.

Из выражения (11-1) видно, что

$$dF(x) = f(x)\,dx.$$

Величина $dF(x)$, равная разности вероятностей $P(X < x + dx)$ и $P(X < x)$, определяет вероятность того, что $x < X < x + dx$,



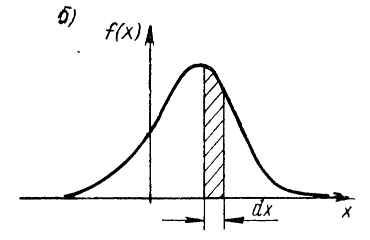


Рис. 11-3. Характеристики непрерывной случайной величины.

т. е. вероятность нахождения случайной величины X в пределах интервала dx (рис. 11-3, *б*). Следовательно,

$$f(x)\,dx = F(x + dx) - F(x) = P(x < X < x + dx).$$

Для конечного интервала $[x_1, x_2]$

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

Если $x_1 \to -\infty$, а $x_2 = x$, то

$$F(x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx. \qquad (11\text{-}2)$$

Основными численными характеристиками случайной величины являются, как известно, среднее статистическое значение и дисперсия.

Среднее статистическое значение, или математическое ожидание величины X дискретного типа

$$m_x = m[X] = \sum_{n=1}^{N} x_n P_n,$$

где x_n — возможные значения X;
P_n — вероятности этих значений.

Для непрерывной X

$$m_x = M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx.$$

Дисперсия случайной величины, характеризующая разброс ее значений относительно среднего статистического, определяется выражением

$$D_x = M[(X - m_x)^2],$$

откуда вытекает, что D_x есть математическое ожидание величины $(X - m_x)^2$.

В развернутом виде последнюю формулу можно записать так:

$$D_x = \sum_{n=1}^{N} (x_n - m_x)^2 P_n,$$

или для непрерывных X

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x)\,dx.$$

Для количественной оценки случайных процессов можно использовать аналогичные характеристики.

Обозначив плотность распределения случайной величины $\xi(t)$ при произвольном фиксированном t через $f(\xi, t)$, на основании предыдущих равенств получим:

$$m_\xi(t) = M[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi f(\xi, t)\, d\xi; \qquad (11\text{-}3)$$

$$D_\xi(t) = M[(\xi - m_\xi)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} [\xi(t) - m_\xi(t)]^2 f(\xi, t)\, d\xi. \qquad (11\text{-}4)$$

При переменных t эти выражения будут определять математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $\xi(t)$. Последние являются уже не числами, а функциями времени.

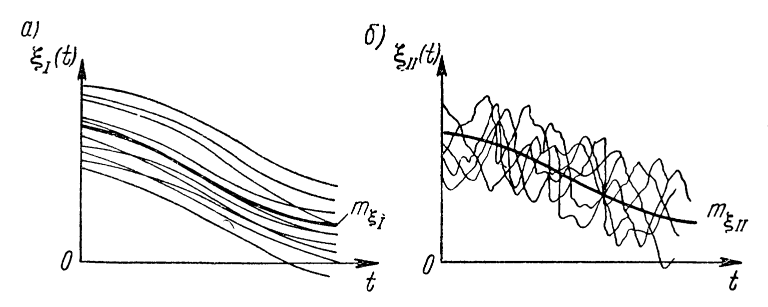


Рис. 11-4. Случайные функции с одинаковыми математическими ожиданиями и дисперсиями.

Входящая в выражения (11-3) и (11-4) зависимость $f(\xi, t)$ носит название **одномерной плотности распределения функции** $\xi(t)$.

Нетрудно понять, что математическое ожидание $m_\xi(t)$ по смыслу представляет собой какую-то среднюю функцию, относительно которой «колеблются» различные конкретные реализации случайной функции $\xi(t)$. Что же касается дисперсии $D_\xi(t)$, то она характеризует разброс конкретных реализаций $\xi(t)$ относительно функции $m_\xi(t)$.

Характеристики $m_\xi(t)$ и $D_\xi(t)$, однако, не дают достаточно полного представления о случайном процессе. Оказывается, случайные функции могут иметь одинаковые (или почти одинаковые) математические ожидания и дисперсии и вместе с тем существенно отличаться друг от друга.

Примеры конкретных реализаций двух таких случайных функций $\xi_I(t)$ и $\xi_{II}(t)$ приведены на рис. 11-4. Как видно, функция $\xi_I(t)$ меняется во времени довольно плавно (рис. 11-4, *а*), а изменения $\xi_{II}(t)$ весьма быстры и беспорядочны (рис. 11-4, *б*). В соответствии с этим для функции $\xi_I(t)$, по-видимому, характерна довольно сильная зависимость между конкретными ее значениями в различные

моменты, а для функции $\xi_{II}(t)$ такая зависимость проявляется слабее.

Проведенные рассуждения показывают, что необходимо ввести еще одну характеристику случайного процесса, которая отражала бы взаимосвязь между значениями функции $\xi(t)$ при различных t.

Чтобы установить такую взаимосвязь, рассмотрим $\xi(t)$ при $t = t_1$ и $t = t_2$; $t_2 > t_1$.

Случайную величину в точке t_1 обозначим ξ_1, а в точке t_2 — ξ_2. Тогда для совокупности ξ_1 и ξ_2 можно образовать функцию $f(\xi_1, \xi_2)$ — плотность распределения системы двух случайных величин. По теории вероятностей произведение $f(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2)\, d\xi_1\, d\xi_2$ будет равно вероятности нахождения значения ξ в момент t_1 на интервале $[\xi_1, \xi_1 + d\xi]$, а в момент t_2 — на интервале $[\xi_2, \xi_2 + d\xi]$.

Двойной интеграл

$$K(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_1 \xi_2 f(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2)\, d\xi_1\, d\xi_2, \qquad (11\text{-}5)$$

зависящий от аргументов t_1, t_2 и плотности распределения $f(\xi_1, \xi_2)$, носит название корреляционной функции непрерывного случайного процесса. Эта функция и является своего рода мерой связи между значениями $\xi(t)$ в различные моменты. Чем больше величина $K(t_1, t_2)$ при заданных t_1 и t_2, тем сильнее связаны совокупности $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$. При увеличении разности $t_2 - t_1$ абсолютные значения корреляционной функции уменьшаются, и связь между соответствующими случайными величинами ослабевает.

В общем виде корреляционную функцию $K(t_1, t_2)$ можно рассматривать как математическое ожидание произведения $(\xi_1\xi_2)$, т. е.

$$K(t_1, t_2) = M(\xi_1 \xi_2). \qquad (11\text{-}6)$$

При $t_1 = t_2 = t$ выражение (11-6) превращается в равенство

$$K(t_1, t_2) = M[(\xi)^2].$$

Функция $f(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2)$ в теории случайных процессов называется двухмерной плотностью распределения случайной функции $\xi(t)$.

11-3. Стационарный случайный процесс

В теории вероятностей особое место занимают случайные процессы, статистические характеристики которых не зависят от времени (или, точнее, от выбора начала отсчета по оси t). Последние получили название стационарных. К такому типу процессов принадлежат многие случайные явления, протекающие в радиотехнических цепях. Поэтому изучение свойств стационарных случайных функций представляет для радиотехники большой интерес.

Практически стационарными принято считать те случайные процессы, средние значения и дисперсии которых не меняются во времени, а корреляционные функции зависят только от разности $\theta = t_2 - t_1$ (в теории вероятностей такие процессы называются стационарными в широком смысле.)

Значительная часть стационарных случайных функций, с которыми приходится встречаться в действительности (например, большинство флюктуационных процессов), обладает так называемым свойством эргодичности. Это свойство заключается в том, что любая статистическая характеристика случайной функции, определяемая, как обычно, по множеству возможных реализаций, может быть вычислена путем усреднения по времени из одной конкретной ее реализации, если только усреднение производится за достаточно большой интервал. Другими словами, для случайных процессов, обладающих свойством эргодичности, усреднение по множеству реализаций (или, как говорят, усреднение по ансамблю) дает тот же результат, что и усреднение по времени какой-либо одной реализации.

Отсюда следует, что математическое ожидание эргодического стационарного процесса $\xi(t)$ определяется выражением

$$m_\xi = M[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi f(\xi)\, d\xi = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \xi_n(t)\, dt = \bar{\xi}, \qquad (11\text{-}7)$$

где $\xi_n(t)$ — n-я реализация случайной функции $\xi(t)$, а символ $\bar{\xi}$ означает усреднение переменной ξ по времени. Физически величина $m_\xi = \bar{\xi}$ определяет постоянную составляющую случайного процесса.

Корреляционная функция $K(\theta)$, которую согласно (11-6) можно рассматривать как математическое ожидание функции $\xi(t)\,\xi(t+\theta)$, в этом случае имеет вид

$$K(\theta) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \xi_n(t)\, \xi_n(t+\theta)\, dt. \qquad (11\text{-}8)$$

При $\theta = 0$

$$K(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \xi_n^2(t)\, dt = (\overline{\xi^2}). \qquad (11\text{-}9)$$

Аналогично дисперсия стационарной функции ξ, обладающей свойством эргодичности, представляет собой величину

$$D_\xi = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} (\xi_n - m_\xi)^2\, dt = \overline{(\xi - m_\xi)^2}$$

или, в другом виде

$$D_\xi = (\overline{\xi^2}) - m_\xi^2. \qquad (11\text{-}10)$$

Таким образом, стационарные случайные процессы имеют более простые статистические свойства, и анализ их оказывается более простым, нежели исследование нестационарных процессов.

11-4. Энергетический спектр стационарного случайного процесса

При изучении случайных процессов было бы целесообразно воспользоваться спектральными представлениями. Однако непосредственное применение спектрального метода к случайным функциям (по аналогии с теорией неслучайных процессов) лишено практического смысла, так как спектральные характеристики их оказываются также случайными функциями.

Для стационарных процессов можно ввести усредненные спектральные характеристики, имеющие, как будет показано ниже, определенный энергетический смысл.

Итак, пусть нам дан стационарный случайный процесс $\xi(t)$. Рассмотрим предварительно новую функцию $\xi_T(t)$, определяемую при помощи равенства

$$\xi_T(t) = \begin{cases} \xi(t) \text{ при } -T \leqslant t \leqslant T, \\ 0 \text{ при } -\infty < t < -T \text{ и } T < t < \infty. \end{cases}$$

Так как $\xi_T(t)$ на бесконечности равна нулю, к ней применимы преобразования Фурье. Прямое преобразование $\xi_T(t)$ по Фурье (см. § 9-4) имеет вид

$$F_T(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_T(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^{+T} \xi_T(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Предположим, что $\xi_T(t)$ представляет электрический ток в цепи. При таком условии интеграл $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F_T(j\omega)|^2 d\omega$, как было показано в § 9-5, характеризует энергию, расходуемую в активном сопротивлении величиной 1 *ом* за промежуток времени $2T$. Значит, величина

$$P_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} [\xi_T(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2T} |F_T(j\omega)|^2 d\omega$$

есть средняя мощность тока $\xi_T(t)$, расходуемая на единичном сопротивлении.

Устремляя T к бесконечности и переходя к пределу, получим независимо от вида конкретной реализации $\xi_T(t)$

$$P = \lim_{T\to\infty} P_T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [\xi_T(t)]^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} |F_T(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} | F_T(j\omega) |^2 d\omega.$$

Введем функцию

$$S(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} | F_T(j\omega)|^2. \tag{11-11}$$

Тогда

$$P = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega)\, d\omega. \tag{11-12}$$

Отсюда видно, что $1/\pi S(\omega)$ соответствует усредненной по времени мощности, приходящейся на единицу полосы частот. Следовательно, функция $S(\omega)$ характеризует распределение мощности в спектре частот и поэтому носит название **спектральной плотности мощности** (или просто **спектральной плотности**) **стационарного случайного процесса** $\xi(t)$. Наряду с корреляционной зависимостью $K(\theta)$ она является важнейшей характеристикой функции $\xi(t)$.

Покажем, что $S(\omega)$ и $K(\theta)$ связаны между собой преобразованием Фурье. Для этого рассмотрим функцию

$$K_T(\theta) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \xi_T(t+\theta)\, \xi_T(t)\, dt,$$

которая при $T \to \infty$ превращается в обычную корреляционную функцию. Преобразуя $K_T(\theta)$ по Фурье, будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_T(\theta)\, e^{-j\omega\theta} d\theta = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\theta} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_T(t+\theta)\, \xi_T(t)\, dt.$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_T(\theta)\, e^{-j\omega\theta} d\theta = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_T(t)\, e^{j\omega t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_T(t+\theta)\, e^{-j\omega(t+\theta)} d\theta.$$

В результате, применив подстановку $t + \theta = \nu$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_T(\theta)\, e^{-j\omega\theta} d\theta = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_T(t)\, e^{j\omega t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_T(\nu)\, e^{-j\omega\nu} d\nu =$$

$$= \frac{1}{2T} \hat{F}_T(j\omega)\, F_T(j\omega) = \frac{1}{2T} | F_T(j\omega) |^2.$$

При $T \to \infty$

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_T(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\theta) e^{-j\omega\theta} dt$$

и

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta. \qquad (11\text{-}13)$$

Таким образом, *спектральную плотность стационарного случайного процесса можно рассчитать путем преобразования корреляционной функции по Фурье*. Другими словами, форма энергетического спектра стационарной случайной функции целиком определяется видом ее корреляционной зависимости.

Пусть, например, $K(\theta) = e^{-\beta|\theta|}$, где β — постоянная величина с размерностью 1/*сек*. В этом случае

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|\theta|} e^{-j\omega\theta} d\theta = 2\int_{0}^{\infty} e^{-\beta\theta} \cos \omega\theta \, d\theta = \frac{2\beta}{\omega^2 + \beta^2}.$$

Из найденного выражения следует, что при малых β (корреляционная функция убывает медленно) значения S по мере увеличения частоты уменьшаются достаточно быстро, т. е. энергия в спектре распределена весьма неравномерно. При больших β зависимость спектральной плотности от частоты проявляется слабее, и спектр случайной функции становится более равномерным.

Легко убедиться, что корреляционной функции $K(\theta) = K_0 \delta(\theta)$ соответствует энергетический спектр, равномерный в полосе частот $0 \leqslant \omega < \infty$. В радиотехнике случайный электрический процесс с абсолютно равномерным частотным спектром носит название «белого шума».

Корреляционную функцию случайного процесса можно рассчитать по известной спектральной плотности при помощи обратного преобразования Фурье (§ 9-4):

$$K(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega\theta} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} S(\omega) \cos \omega\theta \, d\theta. \qquad (11\text{-}14)$$

Из выражения (11-14) следует, что $K(\theta) = K(-\theta)$, т. е. корреляционная функция оказывается четной.

Если $\theta = 0$, то

$$K(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \, d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} S(\omega) \, d\omega, \qquad (11\text{-}15)$$

откуда вытекает, что средняя мощность P стационарного случайного процесса [см. (11-12)] равна начальному значению корреляционной функции.

Принимая во внимание также формулы (11-9) и (11-10), будем иметь

$$P=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty S(\omega)\,d\omega=\overline{(\xi^2)}=m_\xi^2+D_\xi. \qquad (11\text{-}16)$$

Как видно из (11-16), величина P равна сумме двух слагаемых. Первое из них m_ξ^2 характеризует мощность постоянной составляющей стационарного процесса, а второе D_ξ — мощность «переменной» (или, точнее, случайной) составляющей.

Для «белого шума» величина средней мощности обращается в бесконечность, так как при абсолютно равномерном спектре интеграл $\int\limits_0^\infty S(\omega)\,d\omega$ расходится. Поэтому случайный процесс такого типа представляет собой математическую абстракцию.

11-5. Флюктуационные шумы

Рассмотрим более подробно свойства шумов, обусловленных флюктуациями электронов.

а) Шумы тепловых флюктуаций

Если флюктуация электронов в цепи происходит при неизменных внешних условиях, статистические свойства шумов не должны меняться во времени, и, следовательно, случайный процесс оказывается стационарным.

Шумовой ток тепловых флюктуаций можно рассматривать как совокупность множества весьма кратковременных импульсов, вызванных движением каждого отдельного электрона. Такое представление позволяет заключить, что тепловой шум имеет энергетический спектр, равномерный в широкой полосе частот.

Чтобы определить закон распределения мгновенных значений шума, придется воспользоваться так называемой *центральной предельной теоремой теории вероятностей*. Согласно этой теореме закон распределения суммы малых независимых или слабо зависимых случайных величин, имеющих одинаковые плотности распределения, с увеличением числа слагаемых стремится к предельному закону

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi D_x}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2D_x}}, \qquad (11\text{-}17)$$

называемому гауссовым, или нормальным. Здесь m_x и D_x — математическое ожидание и дисперсия суммарной случайной величины x.

Графики функции (11-17) для различных значений дисперсии и $m_x=0$ приведены на рис. 11-5.

Так как совокупность импульсов, образующих шумовой ток, удовлетворяет требованиям этой теоремы (амплитуды импульсов весьма малы, а статистические характеристики их, очевидно, слабо зависимы и идентичны), плотность распределения мгновенных значений шума будет подчиняться нормальному закону.

Исследования, проведенные Найквистом, показали, что флюктуационный ток на зажимах двухполюсника с входным сопротивлением $Z = r + jx$ создает напряжение шумов, величина которого определяется равенством

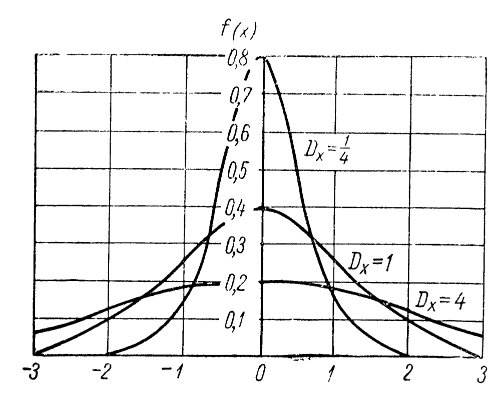


Рис. 11-5. Плотность распределения при нормальном законе.

$$\overline{u_{ш}^2} = 4kTr\Delta f, \quad (11\text{-}18)$$

где $\overline{u_{ш}^2}$ — средний квадрат шумового напряжения, равный квадрату его действующего значения $U_{д.ш}$;

Δf — полоса пропускания;

T — абсолютная температура;

$k = 1{,}37 \cdot 10^{-23}$ *вт · сек/град* — постоянная Больцмана.

Извлекая корни квадратные из обеих частей равенства (11-18), для действующего значения шумового напряжения получим

$$U_{д.ш} = \sqrt{\overline{u_{ш}^2}} = 2\sqrt{kTr\Delta f}. \quad (11\text{-}19)$$

Вывод формулы (11-18), основанный на применении законов статистической термодинамики, здесь не приводится. Тем не менее физический смысл ее очевиден: чем выше температура среды, тем сильнее флюктуации электронов и, следовательно, тем больше интенсивность шумов. Далее, чем шире полоса Δf, тем большее количество шумовых гармоник наблюдается в цепи. Так как спектр шума равномерен в широкой полосе частот, величина $\overline{u_{ш}^2}$ пропорциональна Δf.

Интересно отметить, что напряжение тепловых шумов зависит только от активной составляющей r сопротивления двухполюсника и не зависит непосредственно от реактивной его составляющей x; иными словами, источником теплового шума в цепях является активное сопротивление. Поэтому при анализе флюктуационных процессов последнее следует рассматривать как некоторый эквивалентный генератор с э. д. с. шумов, определяемой выражением (11-19), и внутренним «нешумящим» сопротивлением. Эквивалентная схема активного сопротивления с учетом шумов изображена на рис. 11-6.

Полезно отметить, что среднее значение напряжения тепловых шумов в двухполюснике (т. е. математическое ожидание m_u) равно нулю, так как тепловое движение электронов в отсутствие внешней э. д. с. равновероятно по направлениям. Что касается дисперсии напряжения D_u, то она в данном случае равна квадрату действующего напряжения и, следовательно, пропорциональна мощности шумов:

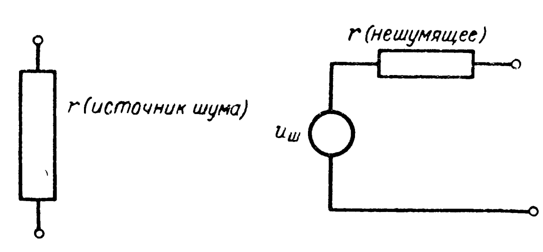


Рис. 11-6. Эквивалентная схема активного сопротивления.

$$D_u = \overline{(u_ш - m_u)^2} = \overline{u_ш^2} = 4kTr\Delta f. \qquad (11\text{-}20)$$

Формула (11-18) справедлива лишь для тех случаев, когда активное сопротивление не зависит от частоты. Если же $r = r(\omega)$, то соотношение, аналогичное (11-18), можно написать для бесконечно малой полосы $df = \frac{1}{2\pi} d\omega$:

$$d(\overline{u_ш^2}) = 4kTr(\omega)\frac{1}{2\pi}d\omega = \frac{2}{\pi}kTr(\omega)\,d\omega.$$

Интегрируя обе части последнего равенства, получим

$$\overline{u_ш^2} = \frac{2}{\pi}kT\int_0^\infty r(\omega)\,d\omega = D_u. \qquad (11\text{-}21)$$

С другой стороны, согласно (11-16)

$$\overline{u_ш^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty S_u(\omega)\,d\omega.$$

Следовательно,

$$S_u(\omega) = 2kTr(\omega). \qquad (11\text{-}22)$$

Формулы (11-21) и (11-22) позволяют определить соответствующие характеристики напряжения шумов на зажимах любого линейного двухполюсника с входным сопротивлением $Z_{вх}(\omega) = r_{вх}(\omega) + jx_{вх}(\omega)$.

Пусть, например, имеем параллельный колебательный контур с резонансной частотой ω_0 и добротностью Q. Активная составляющая входного сопротивления такого контура, как известно,

$$r_{вх}(\omega) \approx \frac{R_э}{1+\left(2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{R_э}{1+\frac{4Q^2}{\omega_0^2}(\omega-\omega_0)^2}.$$

Подставив значение $r_{вх}(\omega)$ в формулу (11-20), находим, что

$$\overline{u_{ш}^2} \approx \frac{2}{\pi} kTR_э \int_0^\infty \frac{d\omega}{1+\left|\frac{2Q}{\omega_0}(\omega-\omega_0)\right|^2} =$$

$$= \frac{2}{\pi} kTR_э \frac{\omega_0}{2Q} \int_{-2Q}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi} kTR_э \frac{\omega_0}{Q} \operatorname{arctg} x \Big|_{-2Q}^{\infty}.$$

Так как для контура хорошего качества $2Q \gg 1$, то

$$\operatorname{arctg}(-2Q) = -\operatorname{arctg}(2Q) \approx -\frac{\pi}{2}$$

и

$$\overline{u_{ш}^2} = kTR_э \frac{\omega_0}{Q} = kTR_э \Delta\omega_к. \qquad (11\text{-}23)$$

Таким образом, средняя мощность тепловых шумов в параллельном контуре пропорциональна полосе пропускания $\Delta\omega_к = \frac{\omega_0}{Q}$.

Спектральная плотность шумов контура определяется выражением

$$S_u(\omega) \approx 2kT \frac{R_э}{1+\left[\frac{2Q(\omega-\omega_0)}{\omega_0}\right]^2}. \qquad (11\text{-}24)$$

б) Шумы электронной лампы

Электрический шум, обусловленный флюктуациями анодного тока в электронных лампах, на выходе радиоприемного устройства подобен шуму, который создается потоком дробинок, ударяющих в мишень. Поэтому в радиоэлектронике такое явление получило наименование д р о б о в о г о э ф ф е к т а.

Статистические характеристики шумов дробового эффекта аналогичны характеристикам тепловых шумов. При неизменных внешних условиях эти шумы стационарны и, кроме того, подчиняются нормальному закону распределения.

Необходимо только учитывать, что математическое ожидание стационарной случайной функции $i_a(t)$ отлично от нуля, так как хаотические изменения анодного тока происходят относительно среднего значения I_{a0}.

Величина постоянной составляющей тока определяется средним числом электронов, попадающих в единицу времени на анод лампы. Если это число обозначить n, а заряд электрона e, то

$$I_{a0} = ne. \qquad (11\text{-}25)$$

Квадрат действующего значения шумовой компоненты тока характеризуется дисперсией функции $i_a(t)$

$$\overline{i_{aш}^2} = I_{д.ш}^2 = \overline{(i_a - I_{a0})^2}.$$

Исследование физических процессов в электронных лампах показывает, что

$$\overline{i_{аш}^2} = 2\Gamma^2 e I_a \Delta f, \qquad (11\text{-}26)$$

где Γ^2 — положительная постоянная, меньшая единицы, учитывающая ослабление дробового эффекта за счет пространственного заряда.

Аналитическое выражение для Γ^2 весьма сложно. Поэтому на практике для триодов с отрицательным смещением на сетке обычно применяется другая формула:

$$\overline{i_{аш}^2} = \frac{0{,}644}{\sigma} 4kT_c S\Delta f. \qquad (11\text{-}27)$$

Здесь T_c — абсолютная температура катода;
k — постоянная Больцмана;
S — крутизна характеристики триода;
Δf — полоса частот;
σ — параметр лампы, величина которого лежит между 0,5 и 1.

При расчете шумов, создаваемых в цепи триодом (или любой другой многоэлектродной лампой), удобно полагать, что сама лампа не «шумит», а источником шума является активное сопротивление $R_ш$, включенное между сеткой и катодом при нормальной температуре, — так называемое **шумовое сопротивление**. Напряжение тепловых флюктуаций электронов на зажимах этого сопротивления должно вызывать хаотические изменения анодного тока лампы той же интенсивности, что и шумы дробового эффекта (рис. 11-7).

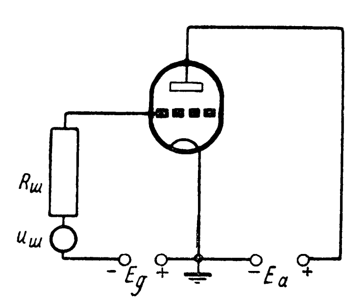


Рис. 11-7. К расчету шумов дробового эффекта.

В соответствии с (11-18) квадрат действующего напряжения шумов на управляющей сетке

$$U_{д.ш}^2 = \overline{u_ш^2} = 4kTR_ш\Delta f.$$

Анодный ток, возникающий под действием напряжения $u_ш$,

$$i_{аш} = Su_ш,$$

следовательно,

$$\overline{i_{аш}^2} = S^2\overline{u_ш^2} = 4kTR_ш S^2\Delta f.$$

Сравнивая последние выражения с формулой (11-27), получим

$$R_ш = \frac{0{,}644}{\sigma} \cdot \frac{T_c}{T} \cdot \frac{1}{S}. \qquad (11\text{-}28)$$

Таким образом, шумовое сопротивление триода обратно пропорционально его крутизне S.

Если в (11-28) положить, что температура катода (оксидного) $T_c = 1000°$ K, $T = 300°$ K, а $\sigma = 0{,}5 \div 1$, то

$$R_ш \approx \frac{2{,}1 \div 4}{S}.$$

Общая методика анализа шумов электронных ламп в радиотехнических цепях была разработана советским ученым В. И. Сифоровым.

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

СИГНАЛЫ

12-1. Введение

Радиотехника и электросвязь, как известно, занимаются изучением принципов передачи различных сообщений из одной точки пространства в другую при помощи электромагнитного поля.

Термин сообщение следует понимать в широком смысле: им обозначают все то, что содержит сведения (информацию) об интересующем событии, явлении или предмете и подлежит передаче на расстояние (человеческая речь, музыка, печатный текст, изображение, программа управления механизмом и т. д.).

Для передачи сообщений в радиотехнике и электросвязи применяются специальные электрические колебания, называемые электрическими сигналами. Между сообщением и сигналом, очевидно, должно наблюдаться однозначное соответствие. Только при этом условии информация, содержащаяся в сигнале, будет эквивалентна информации, «выданной» источником.

Разумеется, не всякие электрические колебания имеют характер сигналов. Так, например, переменный ток в установившемся режиме при заданных амплитуде, начальной фазе и частоте колебаний никакой информации в себе не содержит и, следовательно, не является сигналом. Равным образом, любой ток (или напряжение), изменение которого на всей временной оси описывается наперед заданной (детерминированной) функцией, по той же причине нельзя считать сигналом. Функции сигнала будут выполнять лишь те электрические колебания, которые связаны с определенным сообщением и, стало быть, несут какую-то информацию.

Совершенно ясно, что информация, заключенная в сигнале, объективно будет полезна получателю лишь в том случае, когда передаваемое сообщение заключает в себе что-то новое, непредвиденное. Следовательно, сигнал в аналитическом отношении должен представляться получателю случайной функцией времени.

Применение методов теории вероятностей к изучению свойств сигналов и особенностей их передачи привело в последние годы

к появлению так называемой статистической теории связи. Эта теория, развитая в трудах К. Шэннона, В. А. Котельникова, А. Н. Колмогорова, В. И. Сифорова, А. А. Харкевича и других ученых, позволяет определить количество информации, заключенной в сообщении и сигнале, оценить предельные возможности различных систем связи и т. д.

В этой книге мы не будем заниматься исследованием информационного содержания электрических сигналов и ограничимся изучением только их основных физических характеристик.[1]

12-2. Блок-схема радиоканала

В отличие от электросвязи, использующей соединительные провода, радиотехника для передачи сообщений из одной точки пространства в другую применяет электромагнитные волны, распространяющиеся непосредственно в свободном пространстве (радиоволны).

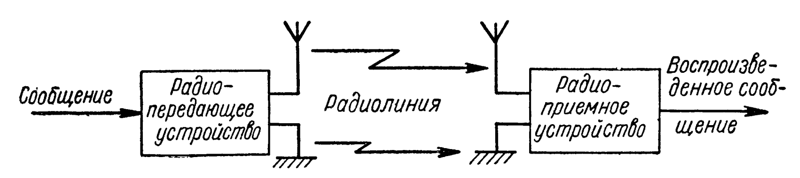


Рис. 12-1. Блок-схема радиоканала.

Совокупность элементов, обеспечивающих передачу сообщений без проводов, образует р а д и о к а н а л. В состав его входят радиопередающее и радиоприемное устройства, а также промежуточная среда между пунктами связи. Последняя по аналогии с системами проводной связи называется р а д и о л и н и е й.

Блок-схема радиоканала изображена на рис. 12-1.

Назначение радиопередающего устройства состоит в том, чтобы преобразовать исходное сообщение в сигналы и излучить их в окружающее пространство в виде радиоволн.

Непосредственным источником радиоволн является передающая антенна. В простейшем случае она имеет вид проводника, по которому течет переменный ток.

Как уже упоминалось в главе первой, система проводов с переменным током эффективно излучает электромагнитные волны при условии, что линейные размеры ее по крайней мере соизмеримы с длиной волны. Последнее требование сравнительно легко выполняется, если в антенне протекает электрический ток высокой частоты. По этой причине радиотехника в противоположность электро-

[1] В настоящей главе частично использованы материалы, содержащиеся в книге А. А. Харкевича [Л. 13].

технике имеет дело главным образом с электрическими колебаниями высокой частоты.

Диапазон электромагнитных волн, используемых в современной радиотехнике, указан в табл. 1-1.

Источником переменного тока высокой частоты является генератор, создающий гармонические электрические колебания требуемой интенсивности.

На входе передающего устройства сообщения преобразуются в электрические сигналы. Для этого в зависимости от вида сообщений применяются различные преобразователи. Так, например, при передаче звука (человеческий голос, музыка и т. д.) преобразователем является микрофон.

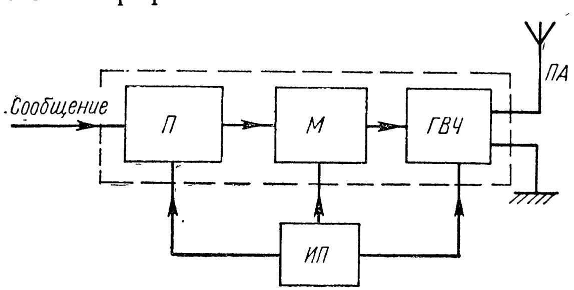


Рис. 12-2. Блок-схема радиопередающего устройства.

Полученные сигналы затем используются для управления высокочастотными гармоническими колебаниями генератора, поэтому они называются у п р а в л я ю щ и м и. Процесс изменения высокочастотных гармонических колебаний под воздействием управляющего сигнала носит название м о д у л я ц и и. Осуществляется она при помощи модулятора. Образующиеся в результате модуляции высокочастотные колебания — р а д и о с и г н а л ы, используются для возбуждения тока в передающей антенне. Поэтому радиоволны, излученные антенной, будут нести в себе такую же информацию, как и входные управляющие колебания.

Приведенные рассуждения дают возможность составить блок-схему радиопередающего устройства (рис. 12-2). Оно состоит из передающей антенны *ПА*, генератора электрических колебаний высокой частоты *ГВЧ*, модулятора *М*, преобразователя сообщений в сигналы *П* и, наконец, источника питания *ИП*. В качестве источника питания используется сеть переменного тока или аккумуляторная батарея и т. п. Следовательно, с энергетической точки зрения радиопередающее устройство можно рассматривать как преобразователь энергии источника питания в энергию радиоволн, несущих информацию.

Совокупность элементов, формирующих радиосигнал, часто называют радиопередатчиком. В его состав, как видно из блок-схемы,

входят: генератор высокочастотных колебаний, модулятор и преобразователь сообщений.[1] На рис. 12-2 элементы радиопередатчика выделены пунктиром.

Радиоприемное устройство предназначено для «улавливания» радиоволн и преобразования их в электрические сигналы, воспроизводящие передаваемое сообщение.

Энергия электромагнитных волн извлекается из окружающего пространства при помощи приемной антенны, которая в принципе может быть подобна передающей антенне.

В реальных условиях любая приемная антенна принимает не только полезные радиосигналы, но и множество мешающих электрических колебаний, излучаемых другими радиопередающими устройствами. Однако в большинстве случаев частоты мешающих колебаний отличаются от частоты, на которой работает передающее устройство рассматриваемого радиоканала. Для устранения вредного воздействия посторонних колебаний в приемном устройстве применяют элементы, обладающие частотной избирательностью. В качестве таких избирательных элементов используются колебательные системы. Наличие резонансного контура во входной цепи позволяет выделить из множества возникающих в антенне электрических колебаний сигналы нужной радиостанции.

Известно, что энергия электромагнитных волн, излучаемых передающей антенной, по мере их движения в пространстве рассеивается в различных направлениях. Очевидно, в точку, где находится приемный пункт, приходит лишь ничтожная доля общей излучаемой энергии. В результате сигнал, принимаемый антенной, будет очень слабым. Чтобы увеличить интенсивность принятых сигналов, применяют усилители электрических колебаний высокой частоты (или, сокращенно, усилители высокой частоты). В современных приемных устройствах, предназначенных для регистрации слабых сигналов, входные колебания приходится усиливать по мощности в несколько десятков или даже сотен миллиардов раз.

Высокочастотные электрические колебания после усиления должны быть преобразованы в сигналы, аналогичные управляющим. Такое преобразование выполняется детектором. Полученный на выходе детектора сигнал в принципе может быть использован для воспроизведения исходного сообщения. Однако этот сигнал, как правило, предварительно усиливается и лишь затем подается на выходной преобразователь или оконечный прибор, воспроизводящий сообщение.

Блок-схема простейшего радиоприемного устройства показана на рис. 12-3.

Совокупность элементов, осуществляющих преобразование высокочастотных электрических колебаний, принятых антенной, в

---

[1] В состав радиопередатчика входят также цепи питания.

сообщения, называется радиоприемником. На рис. 12-3 элементы радиоприемника выделены пунктиром.[1]

При передаче сообщений по радиоканалу на полезный сигнал накладываются различные помехи. В результате вредного влияния помех сигнал на выходе приемного устройства будет в какой-то мере отличаться от управляющего сигнала, а воспроизведенное сообщение — от исходного.

Работу радиоканала при наличии помех можно характеризовать тем, насколько воспроизведенное сообщение в точке приема соответствует заданному. Чем выше степень этого соответствия, тем лучше и надежнее в условиях помех работает система связи. Повышение

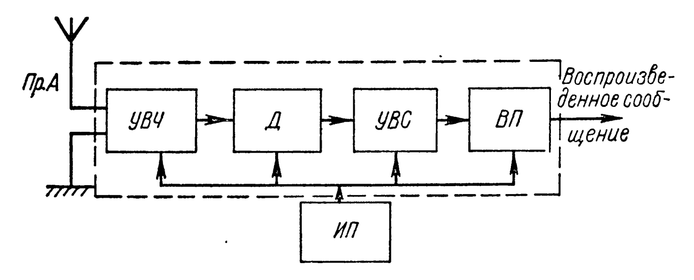


Рис. 12-3. Блок-схема радиоприемного устройства. *Пр.А* — приемная антенна; *УВЧ* — усилитель высокой частоты; *Д* — детектор; *УВС* — усилитель выходного сигнала; *ВП* — выходной преобразователь; *ИП* — источник питания.

помехоустойчивости радиоканала, т. е. способности его противостоять вредному действию помех, представляет собой одну из основных задач современной радиотехники.

В настоящее время разработаны различные методы повышения помехоустойчивости радиотехнических систем.

Одним из действенных методов ослабления влияния внешних помех является направленный прием радиоволн. Достигается он за счет применения антенн, обладающих способностью эффективно принимать радиоволны в пределах достаточно малых пространственных углов.

Если подобную антенну направить на нужное радиопередающее устройство, она будет «улавливать» преимущественно полезные сигналы, а мешающие электромагнитные колебания, приходящие с других направлений, в радиоприемнике оказываются ослабленными.

Что касается внутренних флюктуационных шумов, возникающих в цепях радиоприемного устройства, то избавиться от них полностью, конечно, нельзя. Однако рациональный выбор схемы и конструкции приемника позволяет добиться заметного снижения уровня таких помех.

---

[1] В радиоприемнике имеются также цепи питания.

Наряду с направленным приемом на практике используется и направленное излучение радиоволн. Применение передающих антенн, излучающих волны в пределах малых пространственных углов, дает возможность при заданной мощности передатчика увеличивать напряженность полезного электромагнитного поля в точке приема.

12-3. Управляющие сигналы и их основные характеристики

Современная радиотехника имеет дело с многими видами управляющих сигналов. В соответствии с характером передаваемых сообщений различают сигналы: телеграфные, телефонные (передача звуковых сообщений), телевизионные и фототелеграфные (передача изображений), телеметрические (передача показаний измерительных приборов) и т. д.

Любой из этих сигналов может быть представлен какой-то случайной относительно получателя функцией времени. Эти функции, естественно, будут обладать различными аналитическими свойствами.

Чтобы иметь возможность сравнивать отдельные виды управляющих сигналов, исходя из условий их передачи, необходимо ввести некоторые общие для них параметры. В качестве таких параметров целесообразно использовать две величины: ширину спектра сигнала и динамический диапазон.

Ширина спектра является важной характеристикой сигнала; она определяет полосу пропускания цепей, по которым передается сигнал (подробнее об этом см. в § 13-1).

При изучении спектральных свойств различных функций было установлено, что многие из них обладают бесконечно широким спектром. Однако реальные управляющие сигналы имеют энергетические спектры конечной ширины. Даже в тех случаях, когда спектр функции, аппроксимирующей сигнал, продолжается в бесконечность, для удовлетворительного воспроизведения сигнала достаточно ограничиться гармоническими составляющими, несущими главную часть энергии колебаний. Именно эти составляющие и определяют в конечном итоге реальную ширину спектра.

Динамическим диапазоном сигнала называется отношение наибольшей мгновенной мощности колебаний к минимальной мощности. Последняя величина зависит от уровня помех. Допустимая минимальная мощность сигнала должна, очевидно, несколько превышать среднюю мощность шумов в цепи.

Легко видеть, что динамический диапазон существенно влияет на режим работы усилительных каскадов, в частности усилителей управляющих сигналов. Увеличение динамического диапазона сигнала влечет за собой необходимость расширения пределов, в которых амплитудная характеристика усилителя (т. е. зависимость амплитуды выходного напряжения от амплитуды входного)

должна быть линейной. Только при выполнении этого условия усиление колебаний будет происходить без искажений (см. главу четырнадцатую).

Рассмотрим особенности спектров типовых управляющих сигналов.

Телеграфные сигналы, применяемые при передаче буквенных и цифровых сообщений, представляют собой различные комбинации прямоугольных импульсов тока (или напряжения). В современной практике радиотелеграфии для обозначения букв и цифр чаще всего используют так называемые код Морзе и равномерный пятизначный

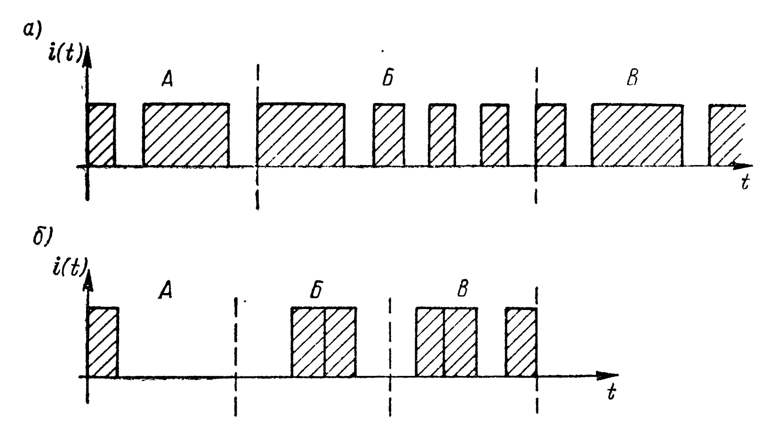


Рис. 12-4. Простейшие кодовые комбинации импульсов тока, соответствующие буквам А, Б и В.

код. В первом случае буквы и цифры образуют комбинации коротких и длинных импульсов («точек» и «тире»), а во втором — комбинации импульсов равной продолжительности, число которых в каждой группе должно быть меньше или равно пяти. На рис. 12-4 показаны импульсы тока, соответствующие буквам А, Б и В русского алфавита в обозначениях кода Морзе (рис. 12-4, *а*) и равномерного пятизначного кода (рис. 12-4, *б*).

Ширина спектра телеграфного сигнала зависит от скорости передачи знаков, т. е. от продолжительности импульсов и характера их чередования. Наиболее широкий спектр подобный сигнал будет, очевидно, иметь при периодическом чередовании коротких импульсов и пауз равной продолжительности. Поэтому для определения ширины спектра сигнала можно ограничиться рассмотрением периодической функции, изображенной на рис. 12-5.

Известно, что функция такого типа имеет бесконечно широкий частотный спектр. Однако для удовлетворительного воспроизведения ее достаточно сохранить лишь несколько начальных ее гармонических составляющих, например, первую и третью гармоники

(см. рис. 7-13). Таким образом, ширина спектра телеграфного сигнала будет

$$\Delta F_s \approx \frac{3}{T} = 3F,$$

где $F = \frac{1}{T}$ — частота следования импульсов (так называемая частота манипуляции).

Величина F зависит от скорости телеграфирования: она может меняться от нескольких герц (при ручной передаче) до нескольких сот герц (при автоматическом быстродействующем телеграфировании). В соответствии с этим ширина спектра телеграфного сигнала лежит в пределах от нескольких десятков герц до тысячи-полутора тысяч герц.

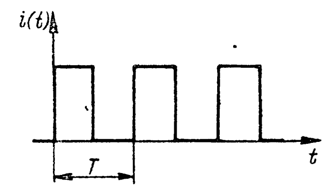


Рис. 12-5. К определению ширины спектра телеграфного сигнала.

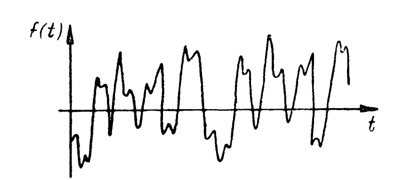


Рис. 12-6. Звуковые колебания скрипичной струны.

Телефонные сигналы по своей структуре значительно сложнее телеграфных. На рис. 12-6 в качестве примера приводится график звуковых колебаний $f(t)$, создаваемых струной скрипки под воздействием смычка. Из рисунка видно, что даже в таком простом случае кривая $f(t)$ имеет весьма сложный вид.

Известно, что человеческое ухо способно воспринимать звуковые колебания, частота которых занимает полосу от 10—20 *гц* до 12—15 *кгц*. Однако в реальных условиях для передачи звуковых сообщений применяют сигналы, обладающие более узким спектром. Так, в современном радиовещании обычно используется полоса частот 50—8000 *гц*. Передача сигналов с такой полосой, как показывает практика, обеспечивает достаточно хорошее качество воспроизведения сообщений. Радиотелефонные каналы служебного назначения ограничиваются еще более узкой полосой (200—3000 *гц*).

На ультракоротких волнах для радиовещания в настоящее время используются телефонные сигналы с полосой 30—10 000 *гц*.

Применение сигналов с более широким спектром, приближающимся к спектру естественных звуковых колебаний, несомненно, способствует улучшению качества воспроизведения передаваемых сообщений. Следовательно, качество передачи на УКВ должно быть выше, чем на других волнах.

Определим, наконец, ширину спектра телевизионных сигналов. Напомним, что они возникают в результате преобразования свето-

вых колебаний в электрические специальным прибором — передающей телевизионной трубкой.

Принцип работы передающей трубки состоит в том, что отдельные элементы поверхности ее экрана при падении световых лучей заряжаются подобно конденсаторам благодаря возникающему фотоэффекту. Потенциалы таких элементарных конденсаторов будут, очевидно, пропорциональны яркости падающих на них световых лучей.

Если передаваемое изображение при помощи оптической системы спроектировать на экран передающей трубки, на нем создается своего рода потенциальный рельеф, эквивалентный яркостному рельефу данного изображения.

По экрану трубки с большой скоростью перемещается электронный луч, вызывая последовательный разряд элементарных конденсаторов. В итоге через электроды трубки течет электрический ток, величина которого зависит от яркости освещения соответствующих участков экрана.

При движении электронного луча проекция передаваемого изображения на экране трубки как бы раскладывается на множество малых участков — элементов. Число таких элементов зависит от количества строк, которые луч «чертит» на экране. Чем больше количество строк, тем больше число элементов и, следовательно, тем выше четкость воспроизведения изображения.

В Советском Союзе телевизионная передача осуществляется на 625 строках. Это значит, что при передаче изображения по одной стороне экрана трубки располагается 625 строк. Число элементарных участков на каждой строке должно быть примерно таким же. Значит, общее количество элементов разложения приблизительно равно $625 \times 625 \approx 400\,000$.

Характер изменения тока в передающей трубке определяется изменением яркости освещения различных элементов экрана. Резкий переход от слабо освещенного или просто черного элемента к белому вызывает резкое изменение тока.

Предположим, что передаваемое изображение есть совокупность черных и белых полей одинаковых размеров (типа шахматных клеток), причем проекция каждого поля на экране соответствует по размерам элементу разложения. В этом случае телевизионный сигнал будет представлять собой последовательность прямоугольных импульсов тока, разделенных паузами такой же продолжительности (см. рис. 12-5).

Для того чтобы человеческий глаз воспринимал изображение слитно, все элементы, образующие так называемый телевизионный кадр, должны передаваться не реже, чем 25 раз в секунду. Следовательно, частота повторения импульсов, показанных на рис. 12-5, будет

$$F = 25 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^5 = 5\,\text{Мгц}.$$

Ориентировочно ее можно рассматривать как верхнюю границу частотного спектра телевизионного сигнала.

Изложенное показывает, что спектры управляющих сигналов в большей своей части занимают область низких частот. Поэтому непосредственное излучение таких сигналов в виде радиоволн без предварительного «наложения» их на высокочастотные колебания практически осуществить невозможно.

12-4. Радиосигналы

Радиосигналами, как уже отмечалось, называют высокочастотные модулированные колебания.

Известно, что синусоидальная функция

$$u(t) = U \cos(\omega t + \psi)$$

характеризуется тремя независимыми параметрами: амплитудой, частотой и начальной фазой. Следовательно, модуляцию гармонических колебаний в принципе можно осуществить изменением во времени любой из этих трех величин.

Процесс, при котором амплитуда высокочастотных колебаний изменяется по закону управляющего сигнала, носит название *амплитудной модуляции* (АМ). Если по закону управляющего сигнала меняется начальная фаза или частота, то модуляция называется соответственно *фазовой* (ФМ) или *частотной* (ЧМ). Таким образом, радиосигналы могут быть модулированными по амплитуде, фазе и частоте.

Познакомимся вначале с принципами амплитудной модуляции.

Предположим, что управляющий сигнал описывается функцией $e(t)$. В процессе модуляции амплитуда высокочастотных колебаний должна изменяться по закону

$$U(t) = U_{н} + k_{A} e(t),$$

где $U_{н}$ — амплитуда в отсутствие модуляции;

k_{A} — коэффициент пропорциональности.

Поэтому АМ радиосигнал будет иметь вид

$$u(t) = [U_{н} + k_{A} e(t)] \cos(\omega_{н} t + \psi_{0}); \qquad (12\text{-}1)$$

здесь $\omega_{н}$ — угловая частота и ψ_{0} — начальная фаза колебаний.

Если функция $U(t)$ при любых t не принимает отрицательных значений, то огибающая $|U(t)| = |U_{н} + k_{A} e(t)|$ амплитудно-модулированного сигнала меняется во времени (с точностью до постоянных величин) аналогично управляющему сигналу (рис. 12-7).

В общем случае функция $e(t)$, как известно, имеет случайный характер. Однако для упрощения рассуждений будем полагать,

что управляющие колебания представляются детермированной функцией времени.[1] Можно, например, считать, что

$$e(t) = E \cos \Omega t, \qquad (12\text{-}2)$$

где Ω — частота модулирующих колебаний.

Конечно, такое допущение исключает возможность рассматривать сигнал как носитель информации, но взамен этого оно позволяет весьма просто изучить физические свойства модулированных колебаний.

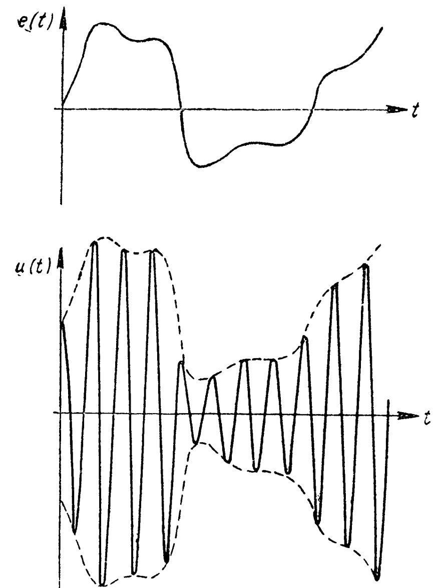


Рис. 12-7. Амплитудно-модулированные колебания.

Итак, в соответствии с условием (12-2) напишем

$$u(t) = (U_н + \Delta U_m \cos \Omega t) \cos(\omega_н t + \psi_0) = U_н (1 + m \cos \Omega t) \cos(\omega_н t + \psi_0), \qquad (12\text{-}3)$$

где

$$\Delta U_m = k_A E$$

и

$$m = k_A \frac{E}{U_н} = \frac{\Delta U_m}{U_н}. \qquad (12\text{-}4)$$

Коэффициент m, равный отношению максимального приращения ΔU_m амплитуды колебаний к среднему ее значению $U_н$, называют **коэффициентом модуляции**, или **глубиной модуляции**. Согласно (12-4) глубина модуляции пропорциональна амплитуде управляющих колебаний. Чем больше интенсивность управляющего напряжения, тем больше величина m и, следовательно, тем шире пределы изменения амплитуды модулированного сигнала.

При $m > 1$ значения $U(t) = U_н (1 + m \cos \Omega t)$ на некоторых интервалах времени становятся отрицательными. В результате будет иметь место так называемая **перемодуляция**, искажающая огибающую модулированных колебаний. Во избежание подобных искажений коэффициент модуляции на практике выбирают меньше или в крайнем случае равным единице.

На рис. 12-8 показаны амплитудно-модулированные колебания, рассчитанные для двух значений m. Здесь же изображены кривая $e(t)$ и огибающие сигналов. Из графиков видно, что при $m < 1$

[1] Подобные колебания будем также называть сигналами, хотя это название, конечно, имеет условный характер.

огибающая с точностью до постоянной повторяет модулирующую функцию (рис. 12-8, *а*), а при $m > 1$ существенно отличается от нее (рис. 12-8, *б*).

Рассмотрим принцип фазовой модуляции. Теперь управляющее напряжение должно изменять начальную фазу высокочастотных

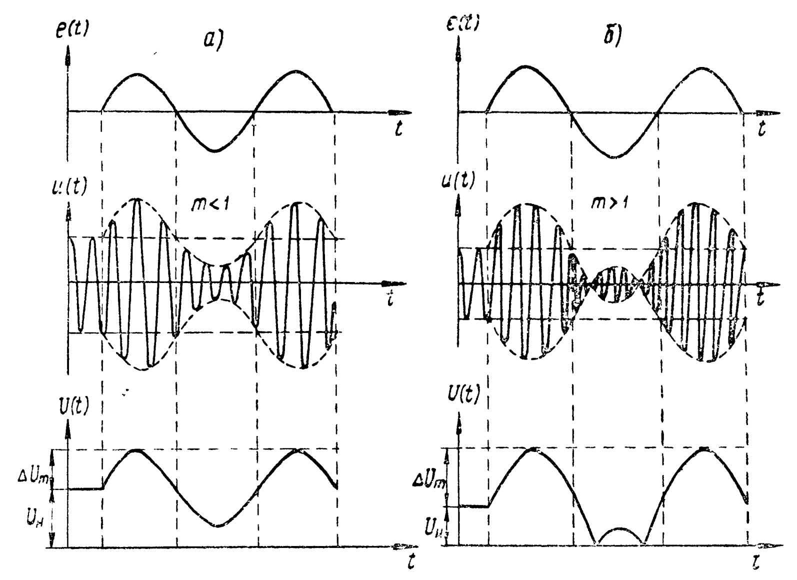


Рис. 12-8. Амплитудно-модулированные колебания с различной глубиной модуляции.

колебаний, амплитуда же остается во времени постоянной. В соответствии с этим можно написать, что

$$\psi(t) = \psi_0 + k_ф e(t), \qquad (12\text{-}5)$$

следовательно,

$$u(t) = U_н \cos[\omega_н t + k_ф e(t) + \psi_0]. \qquad (12\text{-}6)$$

Здесь $k_ф$ — коэффициент пропорциональности, связывающий изменение фазы с управляющим сигналом;

ψ_0 — начальная фаза при $e(t) = 0$ (в дальнейшем ψ_0 будем считать равной нулю).

Покажем, что модуляция по фазе всегда сопровождается изменением частоты колебаний. Для этого (12-6) представим в виде

$$u(t) = U_н \cos\theta(t), \qquad (12\text{-}7)$$

где $\theta(t) = \omega_н t + k_ф e(t)$ — текущая фаза.

Угловая частота колебаний [см. (12-7)] определяется как скорость изменения угла $\theta(t)$ во времени, т. е.

$$\omega = \frac{d\theta(t)}{dt}. \qquad (12\text{-}8)$$

В общем случае величина ω оказывается переменной и называется мгновенной частотой.

Подставляя в выражение (12-8) известное значение $\theta(t)$, будем иметь

$$\omega(t) = \omega_н + k_ф \frac{de}{dt}. \qquad (12\text{-}8а)$$

Таким образом, изменение начальной фазы ψ в соответствии с (12-5) действительно приводит к изменению частоты на величину

$$\Delta\omega = k_ф \frac{de}{dt}.$$

На рис. 12-9 приведены графики колебаний, модулированных по фазе, при управляющем сигнале треугольной формы. Из рисунка видно, что начальная фаза $\psi(t)$ меняется во времени аналогично управляющему сигналу, а частота в точках t_1, t_2 и т. д. совершает скачки.

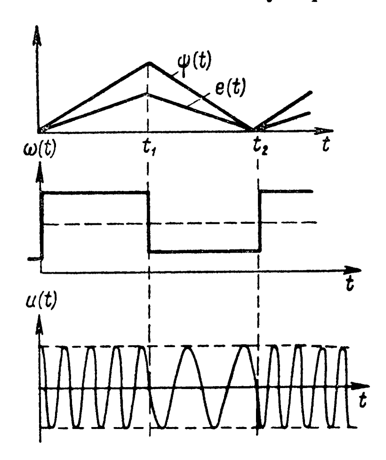


Рис. 12-9. К определению фазовой модуляции.

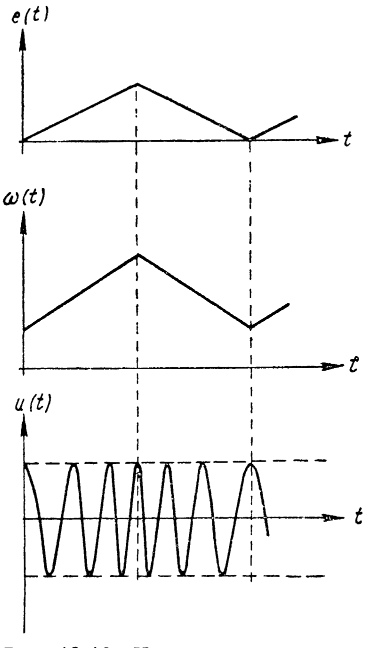


Рис. 12-10. К определению частотной модуляции.

Если управляющий сигнал имеет гармонический характер ($e = E\cos\Omega t$), то из выражения (12-6) нетрудно получить

$$u(t) = U_н \cos(\omega_н t + m_f \cos\Omega t), \qquad (12\text{-}9)$$

где

$$m_f = k_ф E \text{ и } \psi_0 \equiv 0.$$

Коэффициент m_f, пропорциональный амплитуде управляющего сигнала, носит название **индекса модуляции**. Величина его равна максимальному отклонению фазы высокочастотных колебаний от первоначального значения.

При частотной модуляции переменным параметром, изменяющимся по закону управляющего сигнала, является частота, т. е.

$$\omega(t) = \omega_н + k_ч e(t), \qquad (12\text{-}10)$$

где $k_ч$ — коэффициент пропорциональности, связывающий управляющий сигнал с частотой.

Графики, характеризующие частотно-модулированные колебания, показаны на рис. 12-10. Здесь, как и на рис. 12-9, управляющий сигнал имеет треугольную форму.

Чтобы написать аналитическое выражение для ЧМ сигнала, необходимо снова воспользоваться выражением (12-7). Только теперь нам задана мгновенная частота $\omega(t)$, а найти нужно аргумент $\theta(t)$. Согласно (12-8) имеем

$$\theta(t) = \int \omega(t)\,dt$$

или с учетом (12-10)

$$\theta(t) = \omega_н t + k_ч \int e(t)\,dt.$$

Следовательно,

$$u(t) = U_н \cos\theta = U_н \cos\left[\omega_н t + k_ч \int e(t)\,dt\right]. \qquad (12\text{-}11)$$

Отсюда вытекает, что при частотной модуляции начальная фаза колебаний $\psi(t)$ также является величиной переменной:

$$\psi(t) = k_ч \int e(t)\,dt.$$

Для управляющего сигнала гармонического типа равенство (12-10) принимает вид

$$\omega(t) = \omega_н + k_ч E \cos\Omega t = \omega_н + \Delta\omega_m \cos\Omega t.$$

Величина $\Delta\omega_m = k_ч E$, пропорциональная амплитуде E, называется *девиацией частоты*. Она определяет максимальное отклонение частоты от исходного ее значения $\omega_н$.

Соответственно этому

$$\theta(t) = \int (\omega_н + \Delta\omega_m \cos\Omega t)\,dt = \omega_н t + \frac{\Delta\omega_m}{\Omega}\sin\Omega t + \psi_0,$$

и при $\psi_0 \equiv 0$

$$u(t) = U_н \cos\left(\omega_н t + \frac{\Delta\omega_m}{\Omega}\sin\Omega t\right). \qquad (12\text{-}12)$$

Последнее выражение по своему характеру аналогично равенству (12-9), описывающему ФМ колебание подобного же типа, так как замена $\cos\Omega t$ в выражении (12-9) на $\sin\Omega t$ в (12-12) принципиального значения не имеет. Следует только иметь в виду, что в (12-12) индекс модуляции

$$m_f = \frac{\Delta\omega_m}{\Omega} \qquad (12\text{-}13)$$

зависит от частоты управляющих колебаний.

Изложенное показывает, что фазовая и частотная модуляции имеют между собой много общего: и в той и в другой наблюдаются взаимосвязанные изменения фазы и частоты. Очевидно, оба этих процесса можно рассматривать как две разновидности модуляции, при которой по закону, определяемому управляющим сигналом, меняется угол θ (угловая модуляция).

12-5. Спектры радиосигналов

Исследуем спектры радиосигналов при различных видах модуляции.

а) Амплитудная модуляция

Пусть управляющий сигнал, как обычно, задан равенством (12-2). Тогда для колебаний, модулированных по амплитуде, будем иметь

$$u(t) = U_н (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_н t = \\ = U_н \cos \omega_н t + mU_н \cos \Omega t \cos \omega_н t.$$

Так как

$$\cos \Omega t \cos \omega_н t = \frac{1}{2} \cos (\omega_н + \Omega) t + \frac{1}{2} \cos (\omega_н - \Omega) t,$$

то

$$u(t) = U_н \cos \omega_н t + \frac{1}{2} mU_н \cos (\omega_н + \Omega) t + \\ + \frac{1}{2} mU_н \cos (\omega_н - \Omega) t. \quad (12\text{-}14)$$

Из выражения (12-14) следует, что простейшее АМ колебание, огибающая которого меняется во времени по гармоническому закону, можно представить в виде суммы трех гармонических составляющих. Первое слагаемое определяет гармоническую составляющую с частотой $\omega_н$, равной частоте колебаний ВЧ генератора и называемой **несущей частотой**. Второе, а также третье слагаемые представляют гармонические колебания с частотами $\omega_н + \Omega$ и $\omega_н - \Omega$. Последние называют **верхней и нижней боковыми частотами**.

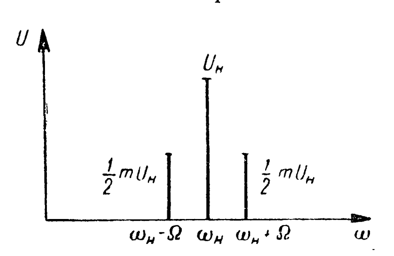


Рис. 12-11. Спектральная диаграмма радиосигнала с синусоидальной огибающей.

Амплитуда колебания несущей частоты, как видно из (12-14), равна величине $U_н$, а амплитуды двух других гармоник равны $^1/_2\, mU_н$ и, следовательно, зависят от глубины модуляции. Чем больше коэффициент m, тем больше интенсивность колебаний боковых частот (боковых колебаний).

Спектральная диаграмма радиосигнала (12-14) изображена на рис. 12-11.

Весьма наглядное представление о таком радиосигнале дает векторная диаграмма (рис. 12-12). В рассматриваемом случае вектор модулированного сигнала равен сумме вектора $U_н$ колебаний несущей частоты и векторов $U_{верхн}$ и $U_{нижн}$ боковых колебаний. Первый вектор имеет модуль $U_н$ и вращается с угловой скоростью $\omega_н$. Векторы $U_{верхн}$ и $U_{нижн}$ вращаются со скоростями $\omega_н + \Omega$ и $\omega_н - \Omega$ и имеют одинаковую длину $\frac{1}{2} mU_н$.

Если при построении диаграммы вектор несущей частоты принять за неподвижный, то векторы боковых частот должны вращаться

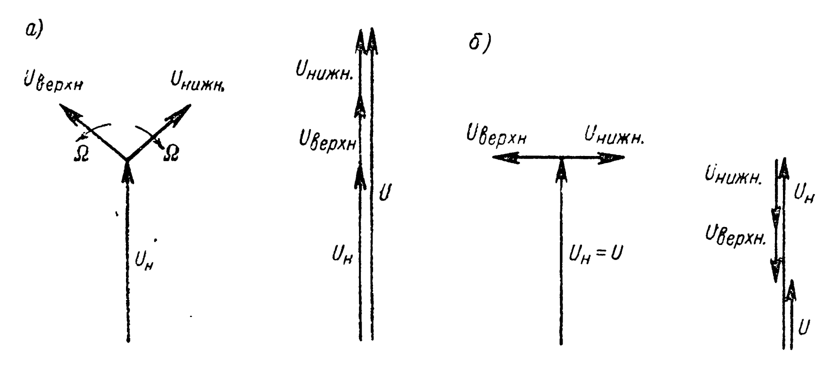


Рис. 12-12. Векторная диаграмма АМ колебания с синусоидальной огибающей.

относительно $U_н$ в противоположных направлениях с угловой скоростью Ω (рис. 12-12, *а*). В результате длина суммарного вектора U будет непрерывно изменяться во времени, а направление его для любого t остается неизменным (рис. 12-12, *б*).

Допустим, что управляющее колебание представляет собой периодическую функцию сложной формы

$$e(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t - \psi_n), \qquad (12\text{-}15)$$

где A_n — коэффициенты ряда Фурье (постоянная составляющая полагается равной нулю). В этом случае выражение (12-1) для амплитудно-модулированных колебаний принимает вид

$$u(t) = \left[U_н + k_A \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t - \psi_n\right] \cos \omega_н t =$$

$$= U_н \cos \omega_н t + k_A \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t - \psi_n) \cos \omega_н t.$$

Величину ψ_0 в (12-1) полагаем равной нулю.

После несложных тригонометрических преобразований получим

$$u(t) = U_н \cos \omega_н t + k_A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_n \cos[(\omega_н + n\Omega)t - \psi_n] +$$

$$+ k_A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_n \cos[(\omega_н - n\Omega)t + \psi_n]. \qquad (12\text{-}16)$$

Выражение (12-16) показывает, что в состав сложного АМ колебания входят: во-первых, колебание несущей частоты и, во-вторых, множество дополнительных гармонических колебаний

$$\frac{1}{2} k_A A_n \cos[(\omega_н + n\Omega)t - \psi_n] \text{ и } \frac{1}{2} k_A A_n \cos[(\omega_н - n\Omega)t + \psi_n]$$

с частотами $\omega_н + n\Omega$ и $\omega_н - n\Omega$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

Совокупность последних образует верхнюю и нижнюю полосы боковых частот, или, просто, верхнюю и нижнюю боковые полосы.

Интересно сравнить спектры управляющего и соответствующего ему амплитудно-модулированного колебаний. Из равенств (12-15) и (12-16) можно сделать вывод, что спектр верхней боковой полосы модулированного колебания подобен спектру управляющего сигнала. Разница между ними заключается лишь в том, что «начало координат» в спектре боковой полосы смещается по шкале частот в точку $\omega = \omega_н$. Спектр нижних боковых колебаний симметричен (относительно несущей частоты $\omega_н$) спектру верхней полосы (рис. 12-13).

Отсюда вытекает, что если полоса частот управляющего колебания ограничена сверху максимальной частотой $\Omega_{макс} = 2\pi F_{макс}$, то аналогичный радиосигнал, модулированный по амплитуде, будет иметь спектр шириной $\Delta\omega_s = 2\Omega_{макс}$. Этот результат, конечно, справедлив не только для периодических колебаний, но и для реальных АМ сигналов.

Пусть, например, мы имеем телефонный сигнал с максимальной частотой спектра $F_{макс} = 10$ *кгц*. Тогда на основании изложенного можно утверждать, что ширина спектра соответствующего радиосигнала $\Delta f_s = 2F_{макс} = 20$ *кгц*.

Для телевизионных сигналов $F_{макс} \approx 5$ *Мгц* и $\Delta f_s \approx 10$ *Мгц*.

При одновременной работе нескольких радиопередающих устройств спектры излучаемых ими сигналов во избежание появления помех при приеме не должны перекрывать друг друга. Для этого необходимо, чтобы несущие частоты ближайших (по шкале частот) станций отличались одна от другой не менее, чем на $2F_{макс}$.

Учитывая последнее требование, рассчитаем количество радиоканалов N, которое можно разместить в заданном диапазоне волн.

Очевидно,

$$N \leqslant \frac{f_{\text{макс}} - f_{\text{мин}}}{\Delta f_s} = \frac{f_{\text{макс}} - f_{\text{мин}}}{2F_{\text{макс}}}, \qquad (12\text{-}17)$$

где $f_{\text{макс}}$ и $f_{\text{мин}}$ — частоты, ограничивающие рассматриваемый диапазон. Формула справедлива в предположении, что все сигналы в точке приема имеют достаточную интенсивность.

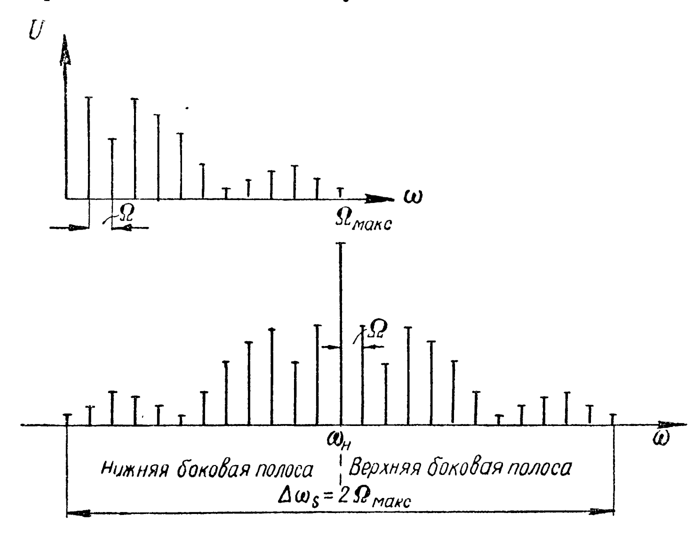


Рис. 12-13. Спектральные диаграммы управляющего и амплитудно-модулированного колебаний.

Предположим, что $\Delta f_s = 20$ *кгц*, а $\lambda = 200—3000$ *м*. Для такого диапазона волн $f_{\text{мин}} = 100$ *кгц*, $f_{\text{макс}} = 1500$ *кгц*; следовательно,

$$N \leqslant \frac{1500 - 100}{20} = 70.$$

Чтобы увеличить число радиостанций, работающих на средних волнах, приходится сужать ширину спектра управляющих сигналов. Вот почему радиотелефонные станции этого диапазона используют сигналы с шириной спектра 8 или даже 5 *кгц*.

Значительно больший «простор» радиотехника имеет в диапазоне ультракоротких волн. Так, только на метровых волнах ($\lambda = 1—10$ *м*) можно, например, разместить более 10 000 радиотелефонных каналов с разносом несущих частот в 25 *кгц*.

Что же касается телевизионных сигналов, занимающих очень широкую полосу частот, то для их передачи пригодны лишь УКВ.

Приведенные рассуждения показывают, что положение спектра АМ сигнала на шкале частот определяется несущей частотой $\omega_{\text{н}}$. При работе радиопередающего устройства эта величина не должна

подвергаться случайным изменениям, ибо всякое отклонение ее от первоначального значения вызывает смещение всего спектра излучаемого сигнала. В результате могут появиться помехи соседним радиоканалам, а приемные устройства, настроенные на заданную несущую частоту, оказываются расстроенными.

Таким образом, высокая стабильность несущей частоты есть одно из важных требований, предъявляемых к радиопередающему устройству.

б) Частотная (фазовая) модуляция

Здесь мы ограничимся рассмотрением простейшего радиосигнала, модулированного по гармоническому закону

$$u(t) = U_н \cos(\omega_н t + m_f \sin \Omega t). \qquad (12\text{-}18)$$

Чтобы найти спектральное разложение функции (12-18), воспользуемся известными из теории бесселевых функций соотношениями:

$$\cos(x \sin \varphi) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos 2n\varphi,$$

$$\sin(x \sin \varphi) = 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x) \sin[(2n-1)\varphi],$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя n-го порядка аргумента x.

Полагая $\varphi = \Omega t$ и $x = m_f$, получим

$$u(t) = U_н \cos \omega_н t \cos(m_f \sin \Omega t) - U_н \sin \omega_н t \sin(m_f \sin \Omega t) =$$

$$= U_н J_0(m_f) \cos \omega_н t + 2U_н \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(m_f) \cos 2n\Omega t \cos \omega_н t -$$

$$- 2U_н \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(m_f) \sin[(2n-1)\Omega t] \sin \omega_н t,$$

или после несложных тригонометрических преобразований

$$u(t) = U_н J_0(m_f) \cos \omega_н t + U_н \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(m_f) \cos(\omega_н + 2n\Omega) t +$$

$$+ U_н \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(m_f) \cos(\omega_н - 2n\Omega) t +$$

$$+ U_н \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(m_f) \cos[\omega_н + (2n-1)\Omega] t -$$

$$- U_н \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(m_f) \cos[\omega_н - (2n-1)\Omega] t.$$

Объединяя в этом равенстве суммы во втором и четвертом, а также в третьем и пятом членах, окончательно получим

$$u(t) = U_н J_0(m_f) \cos \omega_н t + U_н \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m_f) \cos(\omega_н + n\Omega) t +$$
$$+ U_н \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n(m_f) \cos(\omega_н - n\Omega) t. \qquad (12\text{-}19)$$

Отсюда видно, что спектр частотно-модулированного колебания даже в том случае, когда управляющее напряжение меняется во времени по гармоническому закону, имеет множество гармоник, образующих верхнюю и нижнюю боковые полосы частот. Амплитуда n-ой боковой составляющей, как вытекает из выражения (12-19), равна $U_н |J_n(m_f)|$ и, следовательно, при заданном индексе модуляции m_f пропорциональна $|J_n(m_f)|$.

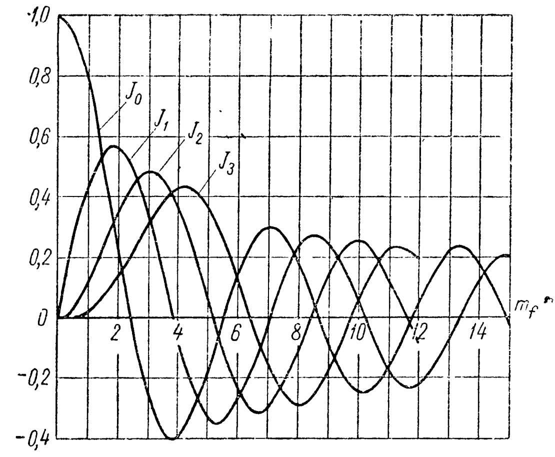


Рис. 12-14. Функции Бесселя.

С теоретической точки зрения спектр (12-19) является бесконечным, однако в действительности его можно считать ограниченным. Дело в том, что величина $J_n(m_f)$ при значительном увеличении n и неизменном m_f быстро уменьшаются. Из графиков функции $J_n(m_f)$, приведенных на рис. 12-14, видно, что начиная с $n \geqslant m_f + 1$ значения J_n становятся весьма малыми. Поэтому гармоническими составляющими с порядковым номером $n > m_f + 1$ в разложении (12-19) практически можно пренебречь.

Обозначим максимальный порядковый номер гармоники, которую нужно учитывать при суммировании рядов в (12-19), $n_{макс}$. Тогда ширина спектра ЧМ сигнала будет

$$\Delta\omega_s = 2n_{макс}\Omega \approx 2(m_f + 1)\Omega.$$

Так как в данном случае $m_f = \frac{\Delta\omega_m}{\Omega}$, то

$$\Delta\omega_s \approx 2(\Delta\omega_m + \Omega).$$

Для больших значений m_f

$$\Delta\omega_s \approx 2m_f\Omega = 2\Delta\omega_m, \qquad (12\text{-}20)$$

т. е. ширина спектра простейшего ЧМ колебания равна удвоенной девиации частоты.

Предположим далее, что $m_f \ll 1$. В этом случае в разложении (12-19), кроме колебаний несущей частоты, следует учитывать только первую пару боковых гармоник ($n_{\text{макс}} = 1$). Принимая во

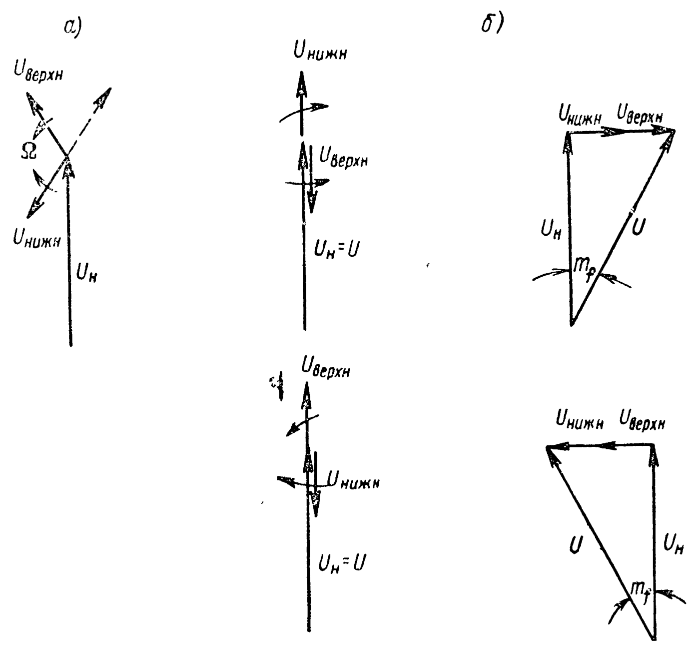


Рис. 12-15. Примерный вид векторной диаграммы ЧМ колебаний.

внимание соотношения: $J_0(x) \approx 1$, $J_1(x) \approx \frac{x}{2}$, справедливые для $x \ll 1$, получим

$$u(t) = U_н \cos \omega_н t + \frac{1}{2} m_f U_н \cos(\omega_н + \Omega) t - \\ - \frac{1}{2} m_f U_н \cos(\omega_н - \Omega) t. \qquad (12\text{-}21)$$

Тот же результат можно получить непосредственно из равенства (12-18), если воспользоваться приближенными выражениями для тригонометрических функций при малых аргументах. Действительно

$$u(t) = U_н \cos(\omega_н t + m_f \sin \Omega t) =$$
$$= U_н \cos \omega_н t \cos(m_f \sin \Omega t) - U_н \sin \omega_н t \sin(m_f \sin \Omega t) \approx$$
$$\approx U_н \cos \omega_н t \cdot 1 - U_н \sin \omega_н t \cdot m_f \sin \Omega t =$$
$$= U_н \cos \omega_н t + \frac{1}{2} m_f U_н \cos(\omega_н + \Omega) t - \frac{1}{2} m_f U \cos(\omega_н - \Omega) t.$$

Равенство (12-21) по своему виду аналогично формуле (12-14), определяющей спектр простейшего амплитудно-модулированного колебания. Единственное отличие (12-21) от (12-14) заключается в том, что нижнее боковое колебание в равенстве (12-21) сдвинуто по фазе относительно такого же колебания в (12-14) на 180°.

Это отличие наглядно иллюстрируется векторной диаграммой, изображенной на рис. 12-15, *а*. Здесь же показано сложение векторов несущего и боковых колебаний в различные моменты (рис. 12-15, *б*). Из рисунка видно, что вектор модулированного напряжения $\boldsymbol{U}$ непрерывно меняет свое направление, причем угол максимального отклонения его от первоначального положения равен m_f.

На диаграмме получается, что в процессе модуляции изменяется и длина вектора $\boldsymbol{U}$. Правда, при $m_f \ll 1$ это изменение невелико, и можно полагать, что $U \approx U_н$. Однако такое утверждение на самом деле несправедливо. Из выражения (12-18) следует, что в действительности вектор $\boldsymbol{U}$ качается относительно своего первоначального положения с переменной угловой скоростью, а длина его в любой момент остается неизменной, равной $U_н$ (рис. 12-16).

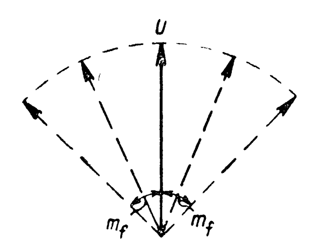


Рис. 12-16. Качание вектора ЧМ колебаний с произвольным индексом модуляции.

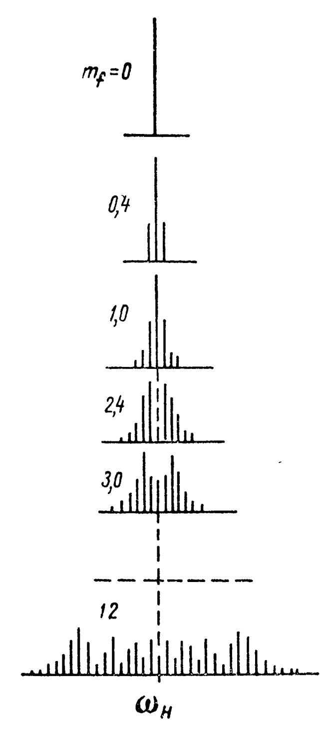


Рис. 12-17. Спектральные диаграммы ЧМ колебаний при различных индексах модуляции.

Аналогичный результат, очевидно, мог бы получиться и на рис. 12-15, если бы при построении векторной диаграммы учитывались все боковые колебания в соответствии с разложением (12-19).

На рис. 12-17 изображены спектры ЧМ колебания (12-18), рассчитанные для различных значений девиации частоты $\Delta\omega_m$

и неизменной Ω, т. е. для различных m_f. Любопытно отметить, что амплитуда колебаний несущей частоты в данном случае зависит от величины m_f. Более того, при значениях m_f, удовлетворяющих уравнению $J_0(m_f) = 0$ (т. е. при $m_f = 2{,}41$; $5{,}52$; ...), амплитуда несущих колебаний вообще оказывается равной нулю и вся энергия сигнала распределяется между колебаниями боковых частот.

Приведенные результаты справедливы не только для частотной, но также и для фазовой модуляции. Следует только помнить, что в последнем случае величина m_f не зависит от частоты модулирующего напряжения. В соответствии с этим ширина спектра ФМ колебания будет

$$\Delta\omega_s \approx 2(m_f + 1)\,\Omega, \tag{12-22}$$

где m_f — максимальное отклонение фазы;

Ω — частота управляющих колебаний.

Спектральные диаграммы колебаний, модулированных по фазе, по своему виду аналогичны диаграммам рис. 12-17.

в) Сравнение результатов

Проведенный анализ показывает, что колебания, модулированные по фазе или частоте, обычно имеют более сложный частотный спектр, нежели аналогичные амплитудно-модулированные сигналы. Разница в спектрах соответствующих сигналов становится особенно заметной при больших значениях индекса модуляции m_f (широкополосная модуляция).

В радиовещательных устройствах с частотной модуляцией девиация частоты обычно выбирается равной 75 *кгц*. Если положить, например, что частота управляющих колебаний составляет 1 *кгц*, то индекс модуляции принимает значение $m_f = \frac{75}{1} = 75$. В этом случае спектр ЧМ сигнала согласно (12-20) будет иметь ширину 150 *кгц*. При амплитудной же модуляции ширина спектра оказывается равной всего лишь 2 *кгц*.

Совершенно ясно, что передача широкополосных сигналов, модулированных по частоте или фазе, практически возможна только в диапазоне ультракоротких волн. Действительно, из формулы (12-17) следует, что на волнах от 1 до 10 *м* размещается (вплотную) почти 2000 ЧМ или ФМ станций с полосой 150 *кгц*. Что же касается диапазона более длинных, например, средних волн, то говорить о размещении в нем аналогичных радиоканалов просто не имеет смысла.

Сравним поведение спектров различных модулированных колебаний при изменении параметров управляющего сигнала.

Предположим, что амплитуда управляющего напряжения увеличивается. В этом случае ширина спектра АМ колебания согласно (12-14) остается неизменной. Никаких новых боковых частот в спек-

тре сигнала не возникает, происходит лишь увеличение амплитуд боковых колебаний вследствие роста коэффициента модуляции.

В случае угловой модуляции увеличение амплитуды управляющего колебания приводит к росту величины m_f и, следовательно, к расширению частотного спектра.

Рассмотрим теперь зависимость спектра модулированных колебаний от частоты управляющего напряжения.

Если Ω увеличивается, полоса частот АМ сигнала, равная 2Ω, также возрастает.

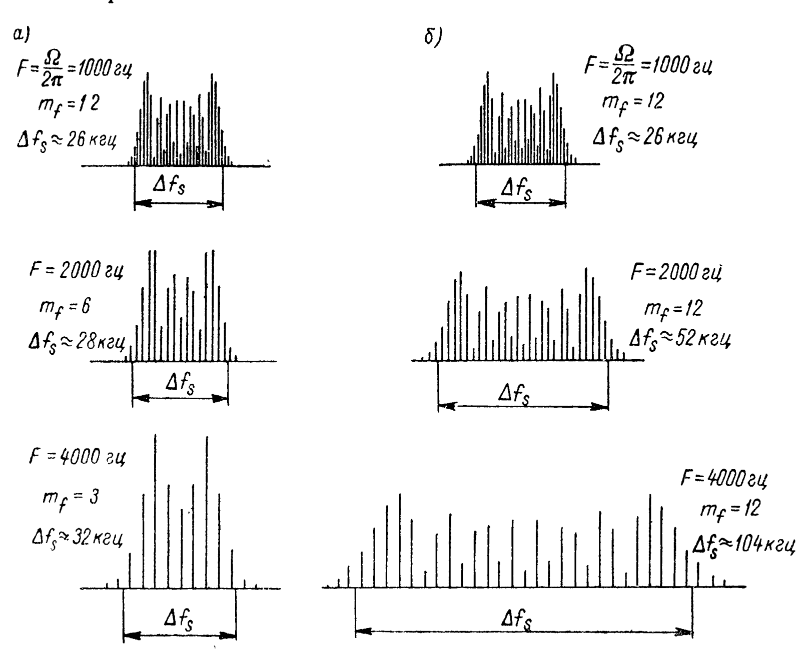


Рис. 12-18. Спектральные диаграммы ЧМ и ФМ колебаний при различных значениях частоты модулирующего сигнала.

При частотной модуляции рост частоты управляющего напряжения приводит к уменьшению индекса модуляции. Казалось бы, ширина спектра в этом случае должна уменьшаться. Однако увеличение частоты модуляции сопровождается увеличением интервала между соседними боковыми гармониками. В результате ширина спектра ЧМ сигнала при $m_f > 1$ остается почти неизменной. Аналогичный вывод следует также непосредственно из формулы (12-20).

В случае фазовой модуляции величина m_f не зависит от частоты колебаний и число боковых гармоник в реальном спектре сигнала при различных значениях Ω остается неизменным. Поэтому полоса частот, занимаемая ФМ колебанием, по мере роста частоты Ω увеличивается [см. (12-22)].

Таким образом, частотная модуляция, в отличие от фазовой, характеризуется бо́льшим постоянством спектров сигналов. В этом состоит одна из причин предпочтительного применения частотной модуляции на практике.

Спектральные диаграммы ЧМ и ФМ колебаний при различных значениях модулирующей частоты показаны на рис. 12-18, *а* и *б* соответственно.

Если индекс модуляции мал ($m_f \ll 1$), то спектры колебаний, модулированных по фазе или частоте, с точностью до фаз будут приближаться к спектру АМ колебания.

12-6. Понятие об импульсной модуляции. Теорема Котельникова

Пусть дана последовательность кратковременных импульсов напряжения одинаковой формы с амплитудами U_0, продолжительностью $t_и$ и частотой следования $F_и$ (рис. 12-19). Совокупность таких импульсов, оказывается, можно использовать подобно гармоническим колебаниям в качестве «носителей» электрических (управляющих) сигналов. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы какой-либо параметр последовательности изменялся во времени по закону управляющих колебаний. Аналогичный процесс в радиотехнике получил наименование импульсной модуляции.

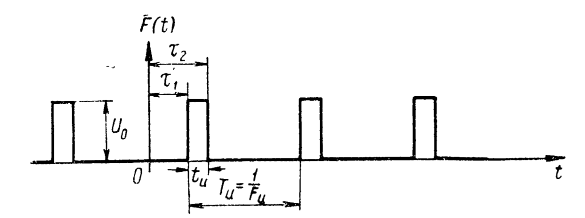


Рис. 12-19. Периодическая последовательность идентичных импульсов.

Существуют по меньшей мере три основных типа модуляции периодической последовательности импульсов:

1) амплитудно-импульсная модуляция (АИМ);
2) модуляция по длительности импульсов (ДИМ);
3) временная импульсная модуляция (ВИМ).

При амплитудно-импульсной модуляции по закону управляющего сигнала (рис. 12-20, *а*) изменяется высота (амплитуда) импульсов. График импульсов, амплитуда которых меняется по гармоническому закону, показан на рис. 12-20, *б*. Здесь мы рассматриваем лишь так называемую амплитудно-импульсную модуляцию первого рода, при которой интенсивность сигнала в пределах каждого импульса изменяется пропорционально управляющему колебанию.

Если величина напряжения в пределах импульса не меняется, имеет место амплитудно-импульсная модуляция второго рода.

В случае модуляции по длительности управляющий сигнал изменяет продолжительность импульсов, причем это изменение может быть как двусторонним (рис. 12-21, *а*), так и односторонним (рис. 12-21, *б*).

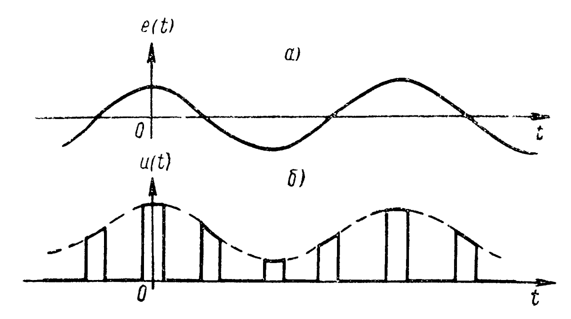


Рис. 12-20. К определению АИМ: *а* — управляющий сигнал; *б* — последовательность импульсов, модулированных по амплитуде.

Временная импульсная модуляция осуществляется путем смещения импульсов из первоначального положения во времени.

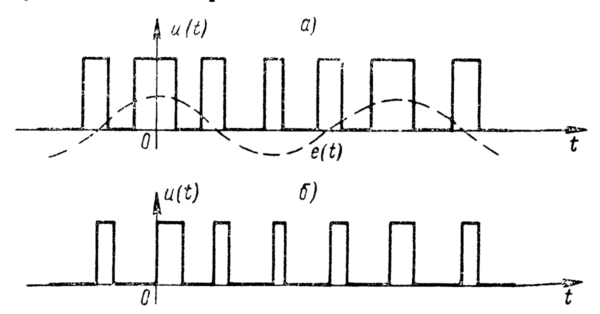


Рис. 12-21. К определению ДИМ.

Разновидностями ВИМ являются фазово-импульсная и частотно-импульсная модуляция (ФИМ и ЧИМ). В случае ФИМ по закону управляющего сигнала меняется величина смещения импульсов, а в случае ЧИМ — частота их следования. При ФИМ временная девиация, т. е. максимальное смещение импульсов, пропорциональна амплитуде модулирующего сигнала и не зависит от частоты, а при ЧИМ величина девиации пропорциональна амплитуде и обратно пропорциональна частоте управляющих колебаний. Таким образом, разница между ФИМ и ЧИМ в какой-то мере аналогична различию между фазовой и частотной модуляциями синусоидальных колебаний.

Графики, иллюстрирующие ВИМ (а точнее ФИМ), изображены на рис. 12-22.

В настоящее время, помимо перечисленных выше типов импульсной модуляции, широкое применение нашла так называемая кодово-импульсная модуляция (КИМ). Сущность КИМ заключается в том, что весь диапазон значений управляющего сигнала разбивается на ряд участков — уровней и каждому уровню присваивается определенная кодовая комбинация импульсов. В результате мгновенные

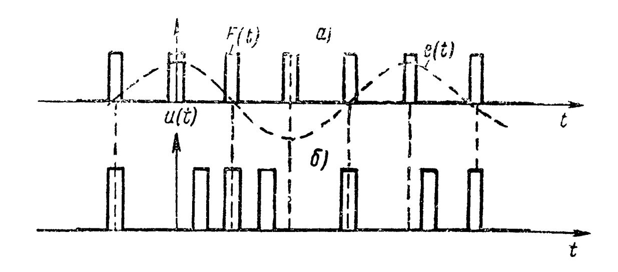


Рис. 12-22. К определению ФИМ: *а* — последовательность немодулированных импульсов и управляющее колебание; *б* — последовательность импульсов, смещенных во времени.

значения модулирующего напряжения в каждый момент могут отображаться определенными комбинациями импульсных напряжений.

Внедрение методов импульсной модуляции в радиотехнику повлекло за собой быстрое развитие теории импульсной связи.

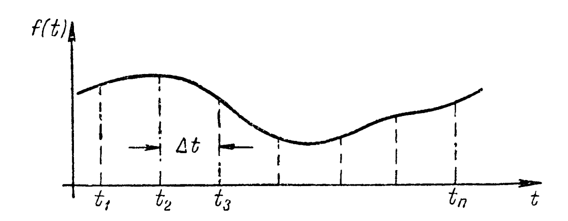


Рис. 12-23. К формулировке теоремы В. А. Котельникова.

В ее создание большой вклад внесли советские ученые В. А. Котельников, В. И. Сифоров, Я. Д. Ширман и др.

При изучении особенностей импульсной модуляции весьма важно установить, каким образом следует переходить от непрерывных электрических сигналов к сигналам импульсным, имеющим дискретный характер. В частности, необходимо знать, как нужно выбирать частоту чередования исходных импульсов.

Ответ на эти вопросы дает теорема В. А. Котельникова. Последняя утверждает, что если функция $f(t)$ имеет частотный спектр конечной ширины, то она полностью определяется значениями ординат в дискретных точках t_1, $t_2, \ldots,$ t_n (рис. 12-23), интервал между которыми

$$\Delta t = \frac{1}{2F_{\text{макс}}} = \frac{\pi}{\Omega_{\text{макс}}},$$

где $F_{\text{макс}}$ — максимальная частота, или верхняя граница, спектра.

Физически теорема Котельникова основывается на том, что функция $f(t)$ с конечным спектром за время Δt, равное половине периода колебаний с частотой $F_{\text{макс}}$, не может измениться сколь-нибудь заметным образом. Поэтому для полной характеристики такой функции достаточно иметь ее значения в отдельных опорных точках.

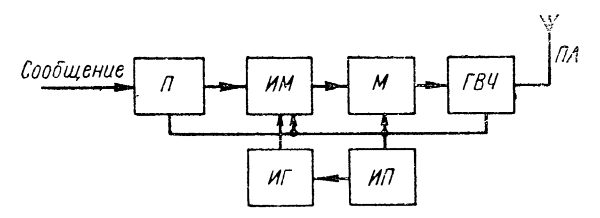


Рис. 12-24. Блок-схема радиопередающего устройства с импульсной модуляцией.

Отсюда следует, что непрерывный электрический сигнал с ограниченным частотным спектром можно заменить последовательностью дискретных его значений и ограничиться передачей этой последовательности. Совокупность таких значений на приемном конце канала связи позволяет однозначно восстановить весь сигнал, если частота дискретных посылок $F_{\text{и}} \geqslant F_{\text{макс}}$. Заметим, что подобное восстановление возможно, если уровень помех в радиоканале мал.

Для излучения импульсных сигналов в виде радиоволн, их, как обычно, нужно превратить в соответствующие высокочастотные колебания. Значит, передающее устройство системы импульсной радиосвязи должно содержать два модулятора: первый — для модуляции импульсов первичным управляющим сигналом (*ИМ*), и второй — для модуляции высокочастотного генератора (*М*). Блок-схема такого передающего устройства изображена на рис. 12-24. В ее состав входит также генератор электрических импульсов *ИГ*.

Блок-схема импульсного радиоприемного устройства в принципе не отличается от схемы, приведенной на рис. 12-3. Только после детектора нужно иметь специальное устройство, превращающее последовательность модулированных импульсов в непрерывный сигнал.

12-7. Спектры сигналов при импульсной модуляции

Значительный теоретический и практический интерес представляют спектры сигналов при импульсной модуляции. Наиболее полное исследование таких спектров было проведено советским ученым Я. Д. Ширманом.

Ниже рассматриваются спектральные характеристики импульсов, модулированных по амплитуде и длительности.

а) Амплитудно-импульсная модуляция

Предположим, что амплитуды импульсов изменяются во времени по гармоническому закону, т. е. управляющий сигнал имеет вид:

$$e(t) = E\cos\Omega t.$$

Одиночный импульс, расположенный в окрестностях точки $t = 0$, обозначим $f(t)$ (рис. 12-25, *а*). Тогда последовательность

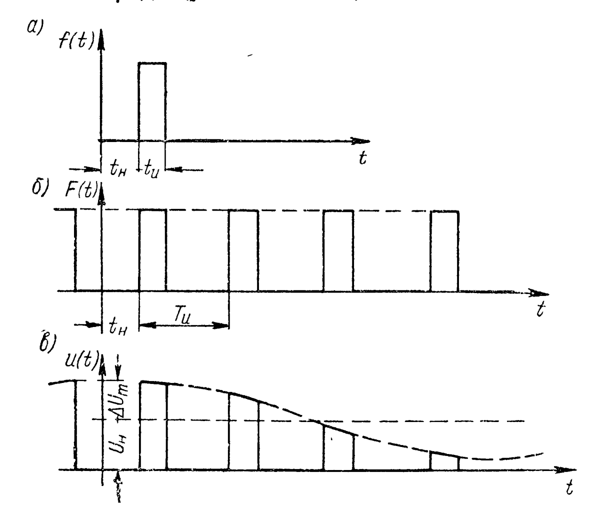


Рис. 12-25. К расчету спектра импульсов, модулированных по амплитуде.

немодулированных импульсов $F(t)$ с периодом следования $T_{\text{и}}$ (рис. 12-25, *б*) аналитически можно записать так:

$$F(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t - t_k),$$

где $t_k = kT_{\text{и}} + t_{\text{н}}$ — смещение k-го импульса;

$t_{\text{н}}$ — величина, характеризующая положение начального импульса.

Легко убедиться, что последовательность импульсов, амплитуды которых изменяются по гармоническому закону (рис. 12-25, *в*), будет определяться выражением

$$u(t) = (1 + m\cos\Omega t)F(t) = (1 + m\cos\Omega t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t - t_k); \qquad (12\text{-}23)$$

здесь $m = \frac{\Delta U_m}{U_н}$ — глубина модуляции импульсов.

Так как по условию функция $F(t)$ периодическая, ее можно разложить в ряд Фурье

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_и t - \psi_n),$$

где

$$\Omega_и = \frac{2\pi}{T_и}.$$

Подставляя это разложение в равенство (12-23), получим

$$u(t) = (1 + m\cos\Omega t)\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_и t - \psi_n)(1 + m\cos\Omega t),$$

или после обычных преобразований

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}ma_0\cos\Omega t + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\Omega_и t - \psi_n) +$$
$$+ \frac{1}{2}m\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos[(n\Omega_и + \Omega)t - \psi_n] +$$
$$+ \frac{1}{2}m\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos[(n\Omega_и - \Omega)t - \psi_n]. \qquad (12\text{-}24)$$

Отсюда вытекает, что при амплитудно-импульсной модуляции в спектре сигнала около каждой гармонической составляющей исходной периодической последовательности появляются как бы боковые колебания с частотами $n\Omega_и + \Omega$ и $n\Omega_и - \Omega$. Помимо этих гармоник, спектр, естественно, содержит колебание с частотой модуляции Ω, а также постоянную составляющую.

Спектральная диаграмма рассмотренного сигнала изображена на рис. 12-26.

В тех случаях, когда управляющий сигнал характеризуется спектром с полосой частот $[0, \Omega_{макс}]$, спектральная диаграмма импульсов, модулированных по амплитуде, разумеется, будет иметь

более сложный вид. Теперь вместо отдельных пар боковых колебаний в окрестностях частот $n\ \Omega_и$ (где $n = 1, 2, 3,\ldots$), очевидно, будут наблюдаться боковые полосы (рис. 12-27).

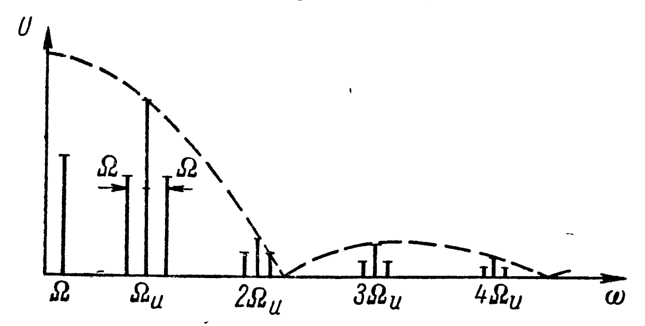


Рис. 12-26. Спектральная диаграмма импульсов с синусоидальной огибающей.

Как было установлено в § 12-6, частота следования импульсов $\Omega_и$ (в импульсной модуляции она называется тактовой частотой) должна быть по крайней мере в два раза больше максимальной

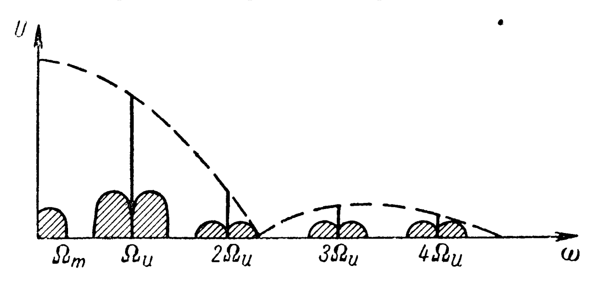


Рис. 12-27. Спектральная диаграмма сигнала при АИМ.

частоты спектра управляющих сигналов. Если это условие не выполняется, соседние боковые полосы, как вытекает из рис. 12-27, будут перекрываться, и передача сигналов в системе связи сопровождается искажениями.

б) Модуляция по длительности импульсов

Введем в рассмотрение немодулированную (периодическую) последовательность прямоугольных импульсов (см. рис. 12-19). Аналитически эту последовательность запишем так:

$$F(t) = \begin{cases} U, \text{ если } \tau_1 + kT_и \leqslant t \leqslant \tau_2 + kT_и; \\ 0, \text{ если } \tau_2 + kT_и < t < \tau_1 + (k+1)\,T_и. \end{cases} \qquad (12\text{-}25)$$

Здесь k — номер импульса, а τ_1 и τ_2 — моменты, соответствующие началу и концу импульса при $k = 0$.

Используя соотношения, приведенные в главе седьмой, функцию (12-23) нетрудно разложить в ряд Фурье. В самом деле, согласно (7-4) и (7-10) будем иметь:

$$a_n = \frac{2}{T_и}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} U\cos n\Omega_и t\,dt =$$

$$= \frac{2U}{n\pi}\sin\left(n\Omega_и\frac{\tau_2-\tau_1}{2}\right)\cos\left(n\Omega_и\frac{\tau_2+\tau_1}{2}\right),$$

$$b_n = \frac{2}{T_и}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} U\sin n\Omega_и t\,dt =$$

$$= \frac{2U}{n\pi}\sin\left(n\Omega_и\frac{\tau_2-\tau_1}{2}\right)\sin\left(n\Omega_и\frac{\tau_2+\tau_1}{2}\right),$$

$$F(t) = U\frac{\tau_2-\tau_1}{T_и} + U\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\times$$

$$\times\sin\left(n\Omega_и\frac{\tau_2-\tau_1}{2}\right)\cos\left[n\Omega_и\left(t-\frac{\tau_2+\tau_1}{2}\right)\right]. \qquad (12\text{-}26)$$

Предположим далее, что значения τ_1 и τ_2 изменяются во времени. При таком условии равенство (12-25) будет определять уже какую-то новую, в общем случае непериодическую функцию. Обозначим ее символом $F_1(t)$ и запишем в виде

$$F_1(t) = \begin{cases} U, & \text{если } \tau_1(t) + kT_и \leqslant t \leqslant \tau_2(t) + kT_и; \\ 0, & \text{если } \tau_2(t) + kT_и < t < \tau_1(t) + (k+1)T_и. \end{cases} \qquad (12\text{-}27)$$

Нетрудно заметить, что изменение во времени величины τ_1 характеризует смещение переднего фронта импульса, а изменение τ_2 — смещение заднего фронта по оси t. Следовательно, при соответствующем подборе функций $\tau_1(t)$ и $\tau_2(t)$ равенство (12-27) может представлять последовательность импульсов, модулированных по длительности.

Применим разложение типа (12-26) к функции $F_1(t)$. Совершенно ясно, что $F_1(t)$ с неизменными $\tau_1(t_1)$ и $\tau_2(t_1)$, т. е. функция $F_1(t, t_1)$, где $t_1 = \text{const}$, может быть записана в виде, аналогичном (12-26),

$$F_1(t,\ t_1) = U\frac{\tau_2(t_1)-\tau_1(t_1)}{T_и} +$$

$$+ U\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\left[n\Omega_и\frac{\tau_2(t_1)-\tau_1(t_1)}{2}\right]\cos\left\{n\Omega_и\left[t-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\tau_2(t_1)+\tau_1(t_1)}{2}\right]\right\}. \qquad (12\text{-}28)$$

При другом аргументе, например $t = t_2$, величины $\tau_1(t_2)$ и $\tau_2(t_2)$ будут иметь иные значения, поэтому коэффициенты разложения $F_1(t, t_2)$ соответственно изменятся.

Отсюда следует, что для функции $F_1(t)$ при переменных $\tau_1(t)$ и $\tau_2(t)$ справедливо равенство

$$F_1(t) = U\frac{\tau_2(t)-\tau_1(t)}{T_и} + U\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\left[n\Omega_и\frac{\tau_2(t)-\tau_1(t)}{2}\right]\cos\left\{n\Omega_и\left[t-\frac{\tau_2(t)+\tau_1(t)}{2}\right]\right\}. \qquad (12\text{-}29)$$

Выражение (12-29) есть некоторый тригонометрический ряд функции $F_1(t)$, коэффициенты которого изменяются во времени.

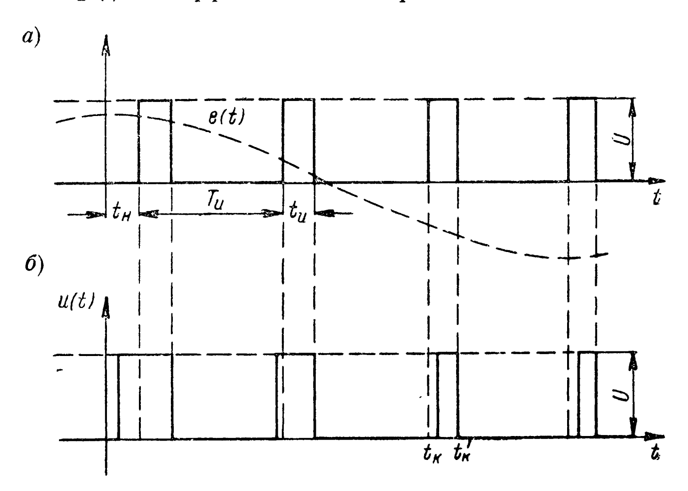


Рис. 12-28. К расчету спектра импульсов, модулированных по длительности.

А это значит, что разложение (12-29) не является рядом Фурье и, стало быть, еще не дает представления о спектре данной функции.

Чтобы найти интересующий нас спектр, равенство (12-29) необходимо преобразовать в новый тригонометрический ряд с постоянными коэффициентами.

Пусть управляющий сигнал, как обычно, имеет вид $e(t) = E\cos\Omega t$, а модуляция осуществляется смещением во времени переднего фронта импульса. Последовательность модулированных таким образом импульсов (односторонняя ДИМ) показана на рис. 12-28, *б*. Здесь же изображены совокупность немодулированных импульсов и управляющее колебание (рис. 12-28, *а*).

Обозначим момент, соответствующий переднему фронту k-го импульса, t_k, а момент, определяющий задний фронт того же им-

пульса, — t'_k. Тогда совокупность модулированных импульсов аналитически можно записать так:

$$u(t)=\begin{cases} U, & \text{если } t_k \leqslant t \leqslant t'_k; \\ 0, & \text{если } t'_k < t < t_{k+1}. \end{cases} \qquad (12\text{-}30)$$

В соответствии с изложенным будем считать, что величина t'_k остается неизменной:

$$t'_k = kT_и + t_н + t_и, \qquad (12\text{-}31)$$

а значение t_k изменяется по закону

$$t_k = kT_и + t_н - \Delta t_m \cos \Omega t_k; \qquad (12\text{-}32)$$

здесь Δt_m — максимальное отклонение переднего фронта импульса от первоначального положения;

$t_н$ — величина, определяющая положение «нулевого» импульса относительно точки $t = 0$ (рис. 12-28);

$t_и$ — продолжительность импульсов в отсутствие модуляции.

Равенство (12-30) написано в предположении, что положительному значению функции управляющего сигнала ($\cos \Omega t_k > 0$) соответствует смещение переднего фронта импульса по оси времени влево, а отрицательному значению — смещение вправо (рис. 12-28).

Теперь нам необходимо определить функцию $F_1(t)$ так, чтобы она совпадала с функцией (12-30). Для этого нужно правильно выбрать зависимости $\tau_1(t)$ и $\tau_2(t)$.

Из сравнения выражений (12-30) и (12-27) вытекает, что требуемое совпадение будет иметь место, если

$$\tau_1(t_k) + kT_и = t_k \quad \text{и} \quad \tau_2(t'_k) + kT_и = t'_k.$$

Подставляя сюда значения t_k и t'_k из формулы (12-31) и (12-32), получим:

$$\tau_1(t_k) = t_k - kT_и = t_н - \Delta t_m \cos \Omega t_k,$$
$$\tau_2(t'_k) = t'_k - kT_и = t_н + t_и.$$

Очевидно, эти соотношения будут выполняться, если

$$\left.\begin{aligned} \tau_1(t) &= t_н - \Delta t_m \cos \Omega t \\ \text{и} \quad \tau_2(t) &= t_н + t_и = \text{const}. \end{aligned}\right\} \qquad (12\text{-}33)$$

Подстановка значений $\tau_1(t)$ и $\tau_2(t)$ из (12-33) в разложение (12-29) дает следующий результат:

$$u(t) = F_1(t) = U\frac{t_и + \Delta t_m \cos \Omega t}{T_и} +$$
$$+ U\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\left[n\Omega_и\frac{t_и + \Delta t_m \cos \Omega t}{2}\right]\cos\left[n\Omega_и\left(t - \frac{2t_н + t_и - \Delta t_m \cos \Omega t}{2}\right)\right].$$

После обычных тригонометрических преобразований последнее равенство приводится к виду

$$u(t) = U\frac{t_{и} + \Delta t_m \cos\Omega t}{T_{и}} +$$

$$+ U\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\{\sin[n\Omega_{и}(t + \Delta t_m\cos\Omega t - t_{н})] -$$

$$- \sin[n\Omega_{и}(t - t_{и} - t_{н}]\}. \qquad (12\text{-}34)$$

Используем далее известное из теории бесселевых функций разложение

$$\sin(\alpha + \beta\cos\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(\beta)\sin\left(\alpha + \frac{m\pi}{2} + m\varphi\right),$$

где $J_m(\beta)$ — функция Бесселя.

Полагая $\alpha = n\Omega_{и}(t - t_{и})$; $\beta = n\Omega_{и}\Delta t_m$; $\varphi = \Omega t$, получим

$$\sin[n\Omega_{и}(t - t_{н}) + n\Omega_{и}\Delta t_m\cos\Omega t] =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(n\Omega_{и}\Delta t_m)\sin\left[n\Omega_{и}(t - t_{н}) + \frac{m\pi}{2} + m\Omega t\right] =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(n\Omega_{и}\Delta t_m)\sin\left[(n\Omega_{и} + m\Omega)t + \frac{m\pi}{2} - n\Omega_{и}t_{н}\right].$$

Подставляя приведенное выражение в (12-34), окончательно будем иметь

$$u(t) = U\frac{t_{и} + \Delta t_m\cos\Omega t}{T_{и}} - U\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin[n\Omega_{и}(t - t_{и} - t_{н})]}{n\pi} +$$

$$+ U\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{n\pi}J_m(n\Omega_{и}\Delta t_m) \times$$

$$\times \sin\left[(n\Omega_{и} + m\Omega)t + \frac{m\pi}{2} - n\Omega_{и}t_{н}\right]. \qquad (12\text{-}35)$$

Из равенства (12-35) видно, что спектр исследуемого сигнала содержит постоянную составляющую $U\frac{t_{и}}{T_{и}}$, составляющую $U\frac{\Delta t_m}{T_{и}}\cos\Omega t$ с частотой модуляции Ω, а также множество гармонических составляющих, частоты которых равны частотам гармоник периодической последовательности импульсов. Эти составляющие определяются членами ряда

$$U\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\sin[n\Omega_{и}(t - t_{и} - t_{н})].$$

Кроме того, в спектре сигнала около каждой гармоники с частотой $n\Omega_и$ имеется множество боковых колебаний с частотами $n\Omega_и + \Omega$, $n\Omega_и - \Omega$, $n\Omega_и + 2\Omega$, $n\Omega_и - 2\Omega$, ..., $n\Omega_и + m\Omega$, $n\Omega_и - m\Omega$ и т. д.

Амплитуды последних гармоник при фиксированных значениях n определяются величинами $J_m\,(n\Omega_и\Delta t_m)$. Произведение $\Omega_и\Delta t_m = 2\pi\frac{\Delta t_m}{T_и}$ здесь играет роль своеобразного индекса модуляции. Чем больше эта величина, тем больше боковых составляющих появляется вблизи колебания с частотой $n\Omega_и$ и, следовательно, тем сложнее спектр сигнала.

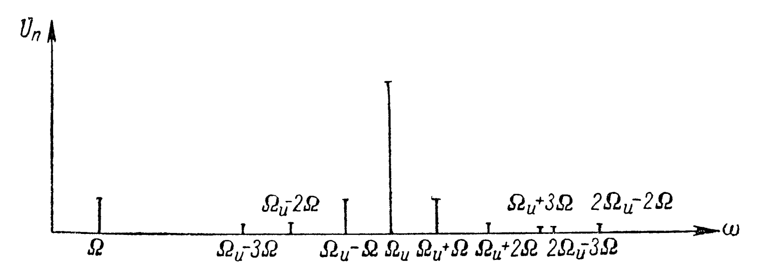


Рис. 12-29. Спектральная диаграмма импульсов с переменной длительностью.

Теоретически около каждой составляющей с частотой $n\Omega_и$ имеется множество боковых колебаний. Однако при $m > n\Omega_и\Delta t_m$ величины $J_m\,(n\Omega_и\Delta t_m)$, как уже отмечалось в § 12-5, становятся весьма малыми. Поэтому гармоники, начиная с $m = n\Omega_и\Delta t_m + 1$, практически можно не учитывать.

Спектральная диаграмма последовательных импульсов, модулированных по длительности (для односторонней ДИМ), показана на рис. 12-29.

Изложенный анализ проведен при условии, что продолжительность k-ого импульса, равная $t'_k - t_k$, определяется значением модулирующего напряжения в момент t_k. В самом деле, из выражений (12-31) и (12-32) видно, что $t'_k - t_k = \Delta t_m \cos\Omega\, t_k$.

Аналогично можно рассчитать спектр импульсов при временной модуляции.

ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ

ПРОХОЖДЕНИЕ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

13-1. Введение

В любом радиоканале передача сигналов должна осуществляться так, чтобы содержащаяся в них информация не подвергалась изменениям. Это требование может, очевидно, выполняться в том случае, когда сигнал при передаче не испытывает сильных искажений, и его можно отличить от помех.

Как было установлено в главе девятой, отклик линейной цепи при произвольном воздействии будет иметь такой же вид, как и сигнал на входе, если цепь обладает равномерной частотной и линейной фазовой характеристиками в бесконечной полосе частот. Реальные электрические системы, конечно, не могут иметь подобных характеристик, поэтому колебания сложной формы на выходе физически осуществимой цепи всегда в какой-то мере отличаются по форме от внешнего воздействия.

Нетрудно видеть, что отклик будет достаточно близок по виду к воздействию в том случае, когда передаточная функция цепи в полосе частот, превышающей ширину спектра, близка к передаточной функции идеального (неискажающего) четырехполюсника. Если же это условие не выполняется, в четырехполюснике происходит так называемое линейное преобразование спектра, сопровождающееся искажением выходного сигнала.

Изменение формы выходных колебаний, обусловленное отклонением частотной характеристики цепи от равномерной, носит название *частотных искажений*. Аналогично искажения, вызываемые нелинейностью фазовой характеристики, называются *фазовыми*. Оба вида искажений при передаче сигналов, как уже отмечалось, играют вредную роль. Следует, однако, отметить, что в некоторых специальных случаях преобразование спектров колебаний в линейных цепях оказывается полезным и находит практическое применение. Примером такого преобразования может служить дифференцирование или интегрирование напряжения и т. д.

При анализе частотных и фазовых искажений сигналы придется представлять неслучайными, детерминированными функциями времени. Такое представление позволит выявить конкретный характер изменения электрических колебаний и определить условия, при которых искажения имеют допустимые пределы.

13-2. Частотные искажения в цепи с ограниченной полосой пропускания

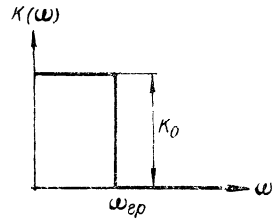
Приведенные соображения указывают на то, что форма отклика при заданном воздействии в конечном счете определяется соотношением между шириной спектра входного сигнала и полосой пропускания цепи, в пределах которой частотная и фазовая характеристики близки к идеальным.

Предположим, что цепь в полосе частот $0 \leqslant \omega \leqslant \omega_{гр}$ обладает равномерной частотной и линейной фазовой характеристиками (рис. 13-1), т. е.

$$K(\omega) = \begin{cases} K_0 \text{ при } 0 \leqslant \omega \leqslant \omega_{гр}, \\ 0 \text{ при } \omega > \omega_{гр} \end{cases} \quad (13\text{-}1)$$

и

$$\varphi_K(\omega) = \omega t_0, \quad (13\text{-}2)$$



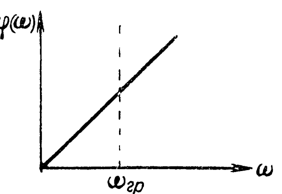


Рис. 13-1. П-образная частотная и линейная фазовые характеристики (идеальный фильтр нижних частот).

где t_0 — коэффициент с размерностью времени, определяющий наклон фазовой характеристики. Такая цепь, очевидно, представляет собой идеальный фильтр нижних частот с полосой пропускания (прозрачности) $\Delta\omega = \omega_{гр}$.

К сожалению, электрический фильтр с прямоугольной частотной и линейной фазовой характеристиками не может быть реализован практически, так как функции (13-1) и (13-2) не удовлетворяют условию физической осуществимости цепи [см. равенство (9-49)].

В самом деле, вещественная и мнимая составляющие передаточной функции $K(j\omega)$ в данном случае имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} M(\omega) &= K(\omega)\cos\varphi_K = K_0\cos\omega t_0, \\ N(\omega) &= K(\omega)\sin\varphi_K = K_0\sin\omega t_0; \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant \omega \leqslant \omega_{гр},$$

поэтому при произвольных $t > 0$

$$\int_0^{\omega_{гр}} K_0\cos\omega t_0\cos\omega t\,d\omega \neq \int_0^{\omega_{гр}} K_0\sin\omega t_0\sin\omega t\,d\omega.$$

Отсюда вытекает, что выражения (13-1) и (13-2) фактически можно рассматривать только как приближенные представления реальных характеристик фильтра.

Для анализа частотных искажений в качестве пробного воздействия желательно выбрать сигнал, который при передаче по цепи с конечной полосой пропускания будет обязательно подвергаться каким-то изменениям. Таким пробным сигналом может служить, например, скачок напряжения. Последний, как известно, имеет

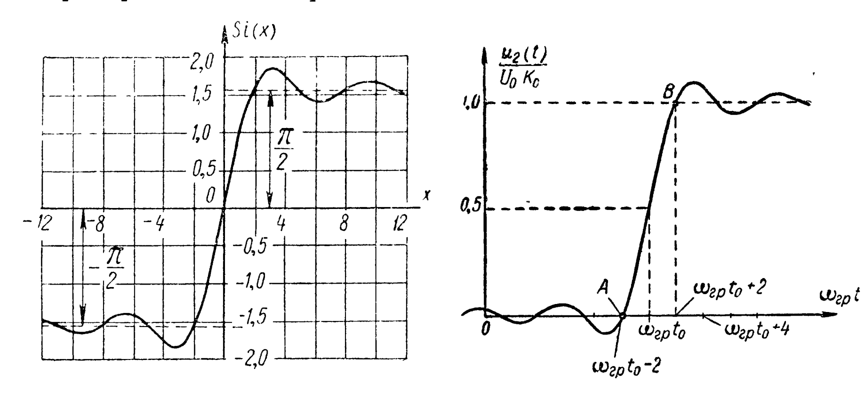


Рис. 13-2. Функция Si (x).

Рис. 13-3. К расчету отклика идеального фильтра нижних частот при воздействии скачка напряжения.

бесконечный спектр и, следовательно, всегда будет испытывать определенные искажения.

Итак, пусть $u_1(t) = U_0 \cdot 1(t)$. Напряжение на выходе фильтра при воздействии аналогичного скачка согласно (9-45) принимает вид

$$u_2(t) = U_0 a(t) = U_0 K_0 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\omega_{гр}} \frac{\sin \omega (t - t_0)}{\omega} d\omega\right]. \qquad (13\text{-}3)$$

Введем функцию

$$\mathrm{Si}(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin x}{x} dx,$$

называемую интегральным синусом аргумента x (рис. 13-2). Тогда, используя подстановку $\omega (t - t_0) = x$, получим

$$u_2(t) = U_0 K_0 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\omega_{гр}(t - t_0)} \frac{\sin x}{x} dx\right] =$$

$$= U_0 K_0 \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \mathrm{Si}\left[\omega_{гр}(t - t_0)\right]\right\}. \qquad (13\text{-}4)$$

График изменения нормированного выходного напряжения $u_2(t)/U_0K_0$ построен на рис. 13-3. По оси абсцисс отложена величина $\omega_{\text{гр}}t$, выраженная через параметр $\omega_{\text{гр}}t_0$. Как видно из рисунка, кривая $u_2(t)/U_0K_0$ аналогична кривой $Si\,(x)$, она лишь смещена из начала координат.

Необходимо указать, что выражение (13-4), а вместе с ним и график, приведенный на рис. 13-3, в сущности лишены физического смысла. Действительно, согласно (13-4) напряжение $u_2(t)$ при $t < 0$ оказывается отличным от нуля, хотя входное напряжение на этом интервале времени по условию отсутствует. Другими словами, получается, что отклик на выходе цепи возникает раньше, чем появляется внешнее воздействие. Подобный ошибочный результат, очевидно, является следствием произвольного выбора частотной и фазовой характеристик фильтра, без учета взаимосвязи между ними.

Из рис. 13-3 также видно, что на интервале от 0 до точки A функция $u_2(t)/U_0K_0$ осциллирует (имеет колебательный характер), хотя в действительности подобные осцилляции отклика при воздействии скачка напряжения не наблюдаются.

Несмотря на отмеченные недостатки, аппроксимации (13-1) и (13-2) все же можно использовать для оценки искажений выходного сигнала, ибо функция $u_2(t)/U_0K_0$, как показывает практика, на участке AB (рис. 13-3) достаточно хорошо отображает действительный закон изменения отклика. В соответствии с этим начало координат на рис. 13-3 при дальнейших рассуждениях следует поместить в точку A и считать, что слева от точки A отклик равен нулю.

Учитывая последние замечания, применим формулу (13-4) для вычисления продолжительности нарастания выходного напряжения. Эту продолжительность можно определить как разность $\Delta t = t_B - t_A$, где t_A и t_B — моменты времени, соответствующие точкам A и B.

Из рис. 13-3 видно, что при $t = t_A$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\text{Si}\,[(\omega_{\text{гр}}(t_A - t_0)] = 0,$$

а при $t = t_B$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\text{Si}\,[\omega_{\text{гр}}(t_B - t_0)] = 1.$$

Следовательно,

$$\text{Si}\left[\omega_{\text{гр}}(t_A - t_0)\right] = -\frac{\pi}{2},$$

а

$$\text{Si}\left[\omega_{\text{гр}}(t_B - t_0)\right] = \frac{\pi}{2}.$$

Используя график функции Si (x) или соответствующие таблицы (см. приложение 3), получим

$$\omega_{гр}(t_A - t_0) = -1{,}92 \quad и \quad \omega_{гр}(t_B - t_0) = 1{,}92,$$

откуда будем иметь

$$\Delta t = t_B - t_A = \frac{3{,}84}{\omega_{гр}} = \frac{0{,}611}{f_{гр}}. \qquad (13\text{-}5)$$

Таким образом, искажения рассматриваемого сигнала проявляются главным образом в уменьшении скорости нарастания отклика. Чем шире полоса пропускания фильтра, тем быстрее нарастает выходное напряжение.

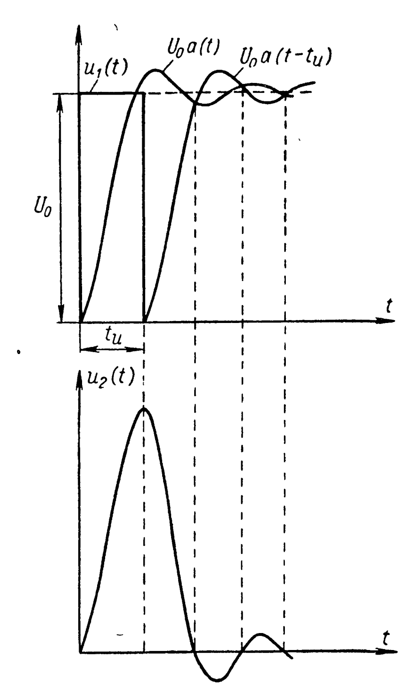


Рис. 13-4. К определению отклика идеального фильтра нижних частот при воздействии прямоугольного импульса напряжения.

Если $\Delta f = f_{гр} \to \infty$, то $\Delta t \to 0$. В этом случае $u_2(t)$ совпадает по виду с воздействием, однако имеет место запаздывание выходного эффекта на величину t_0.

Предположим теперь, что на вход фильтра подается импульс напряжения прямоугольной формы

$$u_1(t) = U_0[1(t) - 1(t - t_и)], \qquad (13\text{-}6)$$

где $t_и$ — продолжительность импульса.

При таком воздействии выходное напряжение

$$u_2(t) = U_0[a(t) - a(t - t_и)] = U_0 K_0 \frac{1}{\pi}\{\mathrm{Si}[\omega_{гр}(t - t_0)] - \mathrm{Si}[\omega_{гр}(t - t_0 - t_и)]\}. \qquad (13\text{-}7)$$

График изменения напряжения u_2 во времени нетрудно получить из графиков функций $U_0 a(t)$ и $U_0 a(t - t_и)$. Необходимо только учитывать, что в качестве переходной характеристики следует брать ту часть кривой $a(t)$, которая определена на интервале $\omega_{гр} t_A \leqslant \omega_{гр} t < \infty$ (т. е. начало отсчета времени, как уже говорилось, нужно поместить в точку t_A).

Построение функции выходного напряжения показано на рис. 13-4. Из рисунка видно, что входной импульс в результате прохождения через фильтр искажается. Уровень частотных искажений по мере уменьшения полосы пропускания и уменьшения продолжительности импульса растет.

В самом деле, при воздействии скачков напряжения сужение полосы пропускания фильтра влечет за собой уменьшение скорости нарастания (или, точнее, скорости изменения) отклика. В результате передний и задний фронты выходного импульса получаются все более и более пологими. Вместе с тем уменьшение длительности импульса на входе фильтра может привести к тому, что за промежуток времени, равный $t_и$, выходное напряжение вообще не успеет нарасти до величины, сравнимой с амплитудой воздействия. Минимально допустимая продолжительность импульса $(t_и)_{мин}$ должна быть больше времени нарастания отклика при скачкообразном воздействии:

$$(t_и)_{мин} > \Delta t = \frac{0{,}611}{\Delta f},$$

ибо только при этом условии амплитуда выходного напряжения может достигать значений, близких к максимальной величине воздействия.

Расчет функции $u_2(t)$ для различных $t_и$ и $f_{гр}$ показывает, что удовлетворительное воспроизведение выходного импульса наблюдается в том случае, когда полоса пропускания цепи

$$\Delta f = f_{гр} \geqslant \frac{1}{t_и}. \qquad (13\text{-}8)$$

Другими словами, импульс будет подвергаться сравнительно малым искажениям, если его продолжительность

$$t_и \geqslant \frac{1}{\Delta f} > (t_и)_{мин}.$$

Из спектральной диаграммы (см. рис. 9-14) видно, что при условии (13-8) фильтр пропускает главную часть спектра, несущую основную энергию колебаний. Этим и объясняется малый уровень искажений выходного напряжения.

Приведенные рассуждения позволяют определить реальную ширину спектра ΔF_s импульса прямоугольной формы. Она, очевидно, равна полосе пропускания фильтра, при которой обеспечивается хорошее воспроизведение сигнала, т. е.

$$\Delta F_s = f_{гр} = \frac{a}{t_и};\ a \geqslant 1.$$

Для приближенных расчетов можно полагать

$$\Delta F_s = \frac{1}{t_и}. \qquad (13\text{-}9)$$

Последнее соотношение приближенно применимо и к импульсам других типов.

Таким образом, реальная ширина спектра импульсного сигнала определяется его продолжительностью: чем короче импульс, тем больше ΔF_s. Например, при $t_и = 100$ *мксек* ширина спектра ΔF_s составляет 0,01 *Мгц*, а при $t_и = 1$ *мксек* $\Delta F_s = 1$ *Мгц*.

13-3. Прохождение амплитудно-модулированных сигналов через колебательные системы

Рассмотрим особенности прохождения амплитудно-модулированных сигналов через колебательные системы.

Пусть простейшее АМ напряжение $u = U_н(1 + m\cos\Omega t)\cos\omega_н t$, где m — глубина модуляции, приложено к последовательному контуру (рис. 13-5).

Чтобы рассчитать отклик в цепи, представим функцию $u(t)$, как обычно, в виде совокупности трех гармонических колебаний:

$$u(t) = U_н\cos\omega_н t + \frac{1}{2}mU_н\cos(\omega_н + \Omega)t + \frac{1}{2}mU_н\cos(\omega_н - \Omega)t.$$

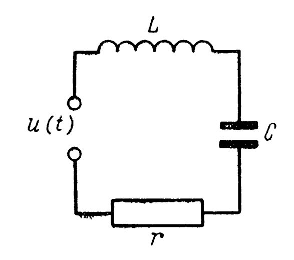


Рис. 13-5. Последовательный контур при воздействии простейшего АМ напряжения.

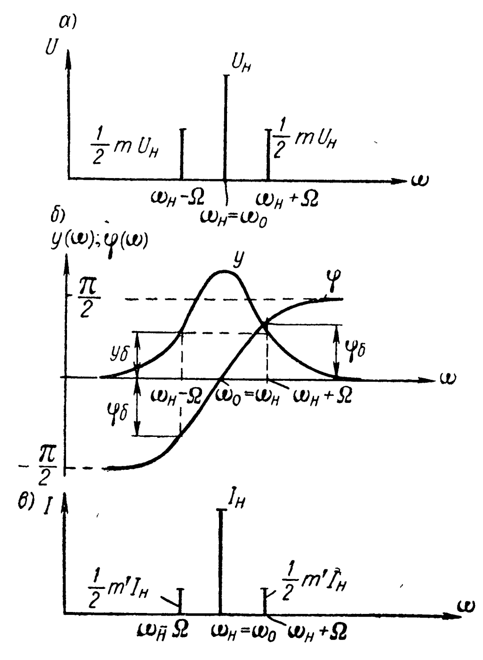


Рис. 13-6. К определению тока в контуре при воздействии АМ напряжения; $m' < m$.

Спектральная диаграмма входного напряжения, а также частотные зависимости модуля $y(\omega)$ и аргумента $\varphi(\omega)$ входной проводимости контура при условии, что несущая частота колебаний совпадает с резонансной частотой, изображены на рис. 13-6, *а* и *б*.

Поскольку контур является системой линейной, возникающий в цепи ток будет тоже иметь три гармонические составляющие с частотами $\omega_н$, $\omega_н + \Omega$ и $\omega_н - \Omega$. Амплитуда тока несущей частоты равна $I_н = U_н y(\omega_н) = U_н y_н$, а его мгновенное значение $i_н = U_н y_н \cos\omega_н t$.

Если частотная характеристика $y(\omega)$ симметрична, то для боковых гармоник тока можно написать

$$I_{верхн} = I_{нижн} = \frac{1}{2}mU_н y_б;$$

здесь

$$y_б = \frac{y_н}{\sqrt{1+\left(2Q\frac{\Omega}{\omega_н}\right)^2}}$$

— модуль входной проводимости при расстройке $\Delta\omega = \pm\Omega$.

Фазовые сдвиги между боковыми гармониками напряжения и тока

$$\varphi_{верхн} = \operatorname{arctg}\left(2Q\frac{\Omega}{\omega_н}\right) = \varphi_б,$$

$$\varphi_{нижн} = -\operatorname{arctg}\left(2Q\frac{\Omega}{\omega_н}\right) = -\varphi_б.$$

Поэтому

$$i_{верхн} = \frac{1}{2}mU_н y_б \cos[(\omega_н + \Omega)t - \varphi_б]$$

и

$$i_{нижн} = \frac{1}{2}mU_н y_б \cos[(\omega_н - \Omega)t + \varphi_б].$$

Суммируя полученные выражения, будем иметь

$$i = I_н \cos\omega_н t + \frac{1}{2}m'I_н \cos[(\omega_н + \Omega)t - \varphi_б] + $$
$$+ \frac{1}{2}m'I_н \cos[(\omega_н - \Omega)t + \varphi_б] =$$
$$= I_н[1 + m'\cos(\Omega t - \varphi_б)]\cos\omega_н t, \qquad (13\text{-}10)$$

откуда следует, что огибающая тока изменяется по гармоническому закону. Коэффициент

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1+\left(2Q\frac{\Omega}{\omega_н}\right)^2}} \qquad (13\text{-}11)$$

в равенстве (13-10) представляет собой глубину модуляции тока в контуре. Из формулы (13-11) видно, что $m' < m$, т. е. глубина модуляции тока оказывается меньше глубины модуляции приложенного напряжения. Чем выше избирательность контура, тем меньше m' по сравнению с m.

Рассматриваемое явление носит название **демодуляции**.

Необходимо также отметить, что огибающая тока сдвинута по фазе относительно огибающей напряжения на угол $\varphi_б$. Этот сдвиг по мере увеличения частоты управляющих колебаний стремится к $\pi/2$.

Графики мгновенных значений напряжения $u(t)$ и тока $i(t)$ приведены на рис. 13-7, а спектральная диаграмма отклика — на рис. 13-6,*в*.

Изложенное показывает, что при воздействии напряжения с синусоидальной огибающей огибающая тока в настроенном контуре не

искажается. Если же резонансная частота ω_0 колебательной системы с несущей частотой $\omega_н$ не совпадает ($\omega_0 \neq \omega_н$), характер явлений меняется.

Преобразование спектра простейшего воздействия в расстроенном контуре показано на рис. 13-8.

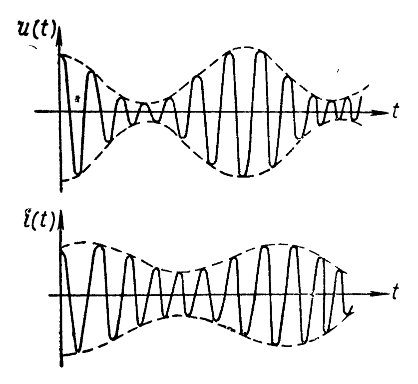


Рис. 13-7. Входное АМ напряжение и ток в контуре.

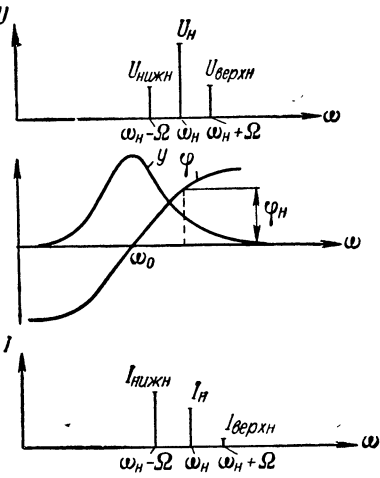


Рис. 13-8. Преобразование спектра АМ колебания в расстроенном контуре.

Чтобы получить представление об особенностях процессов в контуре при расстройке, построим векторную диаграмму (рис. 13-9).

Предположим, что несущая частота больше резонансной частоты. Тогда вектор составляющей тока несущей частоты будет отставать от вектора приложенного напряжения на угол $\varphi_н$, так как на частоте $\omega_н > \omega_0$ контур обладает индуктивным сопротивлением. Векторы боковых составляющих также имеют соответствующие фазовые сдвиги, и, кроме того, амплитуда тока нижней боковой частоты согласно рис. 13-8 получается значительно больше амплитуды тока верхней частоты. Вращение векторов боковых частот во времени относительно вектора несущего колебания приводит к тому, что модуль суммарного вектора **I** будет непрерывно меняться как по величине, так и по направлению. В результате огибающая тока в цепи искажается.

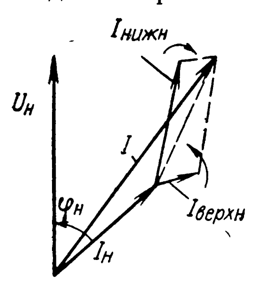


Рис. 13-9. Векторная диаграмма токов при воздействии АМ напряжения на расстроенный контур.

Если управляющие колебания имеют более сложный частотный спектр, огибающая тока подвергается искажениям даже при условии, что колебательная система точно настроена на несущую частоту радиосигнала.

Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим установление тока в контуре при воздействии импульса высокочастотного напряжения с прямоугольной огибающей.

Последнее представим в виде

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = \\ = U_0 \sin \omega_н t \cdot 1(t) - U_0 \sin \omega_н (t - t_и) \cdot 1(t - t_и); \quad (13\text{-}12)$$

здесь полагается, что

$$t_и = nT_н = n \frac{2\pi}{\omega_н}; \quad (13\text{-}13)$$

n — целое число. Тогда на основании принципа суперпозиции можно написать

$$i = i_1(t) + i_2(t),$$

где $i_1(t)$ и $i_2(t)$ — токи, возбуждаемые напряжениями $u_1(t)$ и $u_2(t)$.

Используя выражение (8-61), будем иметь

$$i_1(t) = \frac{U_0}{r}(1 - e^{-\alpha t}) \sin \omega_н t \cdot 1(t); \quad \omega_н = \omega_0.$$

Аналогично

$$i_2(t) = -\frac{U_0}{r}[1 - e^{-\alpha(t - t_и)}] \sin \omega_н (t - t_и) \cdot 1(t - t_и).$$

Так как в данном случае

$$\sin \omega_н (t - t_и) = \sin(\omega_н t - 2n\pi) = \sin \omega_н t,$$

то при $t \geqslant t_и$

$$i(t) = \frac{U_0}{r}(e^{\alpha t_и} - 1) e^{-\alpha t} \sin \omega_н t.$$

Таким образом, огибающая тока определяется выражением

$$I(t) = \begin{cases} \frac{U_0}{r}(1 - e^{-\alpha t}) & \text{при} \quad t \leqslant t_и, \\ \frac{U_0}{r}(e^{\alpha t_и} - 1) e^{-\alpha t} & \text{при} \quad t \geqslant t_и. \end{cases} \quad (13\text{-}14)$$

Можно показать, что условие (13-13), наложенное на величину $t_и$, не ограничивает общности полученных результатов, поэтому выражение (13-14) справедливо для любой продолжительности импульса.

Графики изменения входного напряжения и тока в контуре изображены на рис. 13-10. Из рисунка видно, что между огибающей приложенного напряжения и огибающей тока имеется различие. Оно становится все более заметным по мере уменьшения коэффициента затухания α, т. е. по мере сужения полосы пропускания контура. Это различие, очевидно, есть следствие преобразования спектра входных колебаний, осуществляемого контуром.

При передаче АМ колебаний с ограниченным спектром (что и имеет место в действительности) искажения отклика будут незначи-

тельны, если полоса пропускания контура превышает удвоенную максимальную частоту спектра огибающей воздействия: $\Delta\omega_к \geqslant 2\Omega_{макс}$.

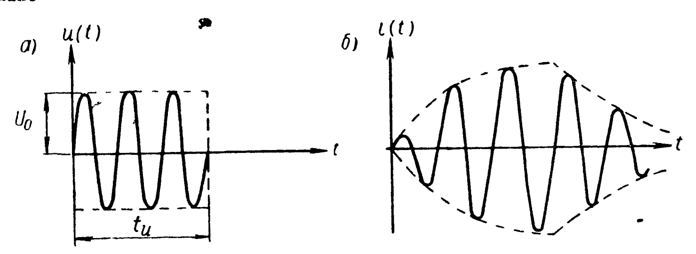


Рис. 13-10. Изменение тока в контуре при воздействии высокочастотного импульса напряжения с прямоугольной огибающей.

Изложенные соображения касаются искажений, которые испытывает ток. На практике в качестве отклика часто используется напряжение на реактивных элементах колебательной системы.

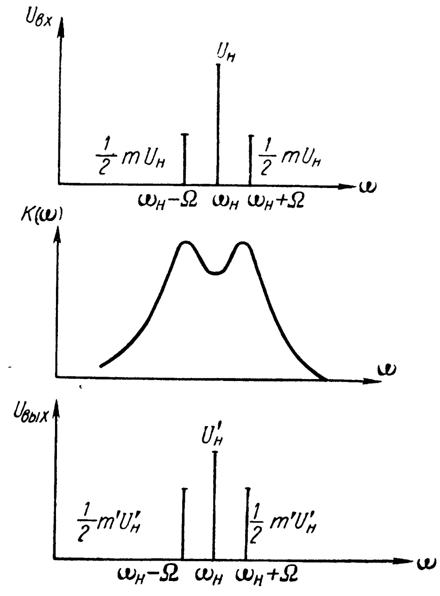


Рис. 13-11. Преобразование спектра АМ колебаний в системе связанных контуров.

$U_н$ — амплитуда колебаний несущей частоты воздействия; $U'_н$ — амплитуда колебаний несущей частоты отклика; m и m' — коэффициенты модуляции воздействия и отклика; $m' > m$.

Спектральные характеристики напряжения на индуктивности или емкости связаны с аналогичной характеристикой тока соотношениями:

$$U_L(j\omega) = j\omega L I(j\omega)$$

и

$$U_C(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} I(j\omega).$$

Отсюда следует, что огибающая напряжения $u_L(t)$ или $u_C(t)$ в принципе будет отличаться от огибающей тока $i(t)$. Однако, если входное воздействие имеет сравнительно узкий спектр, этими различиями можно пренебречь, ибо множители ωL и $1/\omega C$ в узкой полосе частот изменяются незначительно.

Обратимся теперь к системе связанных контуров. Допустим, что оба контура идентичны, а несущая частота сигнала равна резонансной частоте.

При слабой связи между контурами отклик будет испытывать искажения, аналогичные тем, которые мы наблюдали в одиночном контуре. В случае сильной связи характер искажений меняется. Так, при воздействии колебаний с синусоидальной огибающей выходное напряжение, если связь между контурами больше критической, может иметь даже бо́льшую глубину модуляции, нежели входное, а иногда появляется перемодуляция. Происходит это из-за наличия провала в частотной характеристике системы.

Модуль частотной характеристики (коэффициента передачи) связанных контуров, а также спектральные диаграммы входного и выходного напряжений показаны на рис. 13-11.

В заключение рассчитаем напряжение радиосигнала на выходе колебательной системы с симметричными частотной и фазовой характеристиками.

В соответствии с исходным условием будем полагать, что эти характеристики удовлетворяют следующим соотношениям:

$$K(\omega_0 - \Delta\omega) = K(\omega_0 + \Delta\omega);$$

$$\varphi_K(\omega_0) = 0; \qquad \left.\frac{d\varphi_K}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0} > 0;$$

$$\varphi_K(\omega_0 - \Delta\omega) = -\varphi_K(\omega_0 + \Delta\omega).$$

Пусть напряжение входного радиосигнала

$$u_1(t) = \left[U_н + \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos(n\Omega t - \psi_n)\right] \cos\omega_н t, \qquad (13\text{-}15)$$

т. е. огибающая представляется периодической функцией. Чтобы найти отклик $u_2(t)$ на выходе колебательной системы, перепишем (13-15) в виде

$$u_1(t) = U_н \cos\omega_н t + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos[(\omega_н + n\Omega)t - \psi_n] + $$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos[(\omega_н - n\Omega)t + \psi_n].$$

Полагая, что $\omega_н = \omega_0$ и $\Delta\omega = n\Omega$, на основании принципа суперпозиции будем иметь

$$u_2(t) = K(\omega_н) U_н \cos\omega_н t + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} K(\omega_н + n\Omega) U_n \times$$
$$\times \cos[\omega_н + n\Omega)t - \psi_n - \varphi_K(\omega_н + n\Omega)] +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} K(\omega_н + n\Omega) U_n \cos[(\omega_н - n\Omega)t + \psi_n + \psi_K(\omega_н + n\Omega)]$$

или после несложных тригонометрических преобразований

$$u_2(t)=\left\{K(\omega_н)U_н+\sum_{n=1}^{\infty}K(\omega_н+n\Omega)U_n\times\right.$$

$$\left.\times\cos\left[n\Omega t-\psi_n-\varphi_K(\omega_н+n\Omega)\right]\right\}\cos\omega_н t. \qquad (13\text{-}16)$$

Из сравнения полученного выражения с равенством (13-15) видно, что цепь осуществляет преобразование спектра огибающей сигнала: амплитуда n-й ее гармоники изменяется в $K(\omega_н+n\Omega)$ раз, а начальная фаза — на угол $\varphi_K(\omega_н+n\Omega)$. Отсюда следует, что для определения формы выходных колебаний достаточно рассмотреть прохождение сигнала типа огибающей через фильтр нижних частот, характеристики которого на интервале $[0,\infty]$ совпадают с частотной и фазовой характеристиками колебательной системы в области $\omega_0 \leqslant \omega < \infty$.

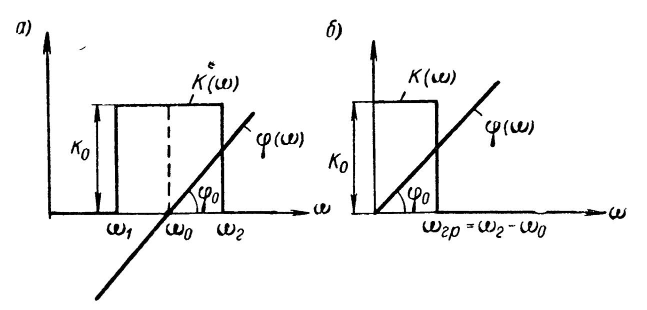


Рис. 13-12. К расчету отклика идеального полосового фильтра.

Полученные выводы, конечно, применимы и к сигналам с непериодическими огибающими. Если, например, нужно рассчитать огибающую напряжения на выходе идеального полосового фильтра (рис. 13-12, *а*) при воздействии радиоимпульса прямоугольной формы, то подобную систему можно заменить идеальным фильтром нижних частот (рис. 13-12, *б*) и воспользоваться результатами анализа, изложенными в § 13-2.

13-4. Прохождение частотно-модулированных сигналов через колебательную систему

Частотно-модулированные колебания и их спектры, как правило, имеют весьма сложную структуру. Поэтому при прохождении через колебательную систему они могут подвергаться бо́льшим изменениям по сравнению с АМ колебаниями.

Для расчета отклика цепи при воздействии ЧМ колебаний в принципе можно использовать обычный метод гармонического анализа подобно тому, как это делалось в предыдущем параграфе.

Однако этот метод оказывается эффективным лишь в том случае, когда входное колебание имеет узкий частотный спектр. Если же указанное условие не выполняется, приходится применять другие методы.

Весьма простым и вместе с тем широко распространенным способом расчета является так называемый метод мгновенных частот [Л. 4]. Он основан на допущении, что частота модулированного сигнала меняется во времени медленно и что вследствие этого искомые величины на выходе цепи мгновенно (без каких-либо переходных явлений) принимают стационарные значения.

Пусть частота колебания входного сигнала изменяется во времени по гармоническому закону:

$$\omega = \omega_{н} + \Delta\omega_m \cos \Omega t.$$

Условие применимости метода мгновенных частот в этом случае принимает вид

$$\Omega \ll \Delta\omega_{к}, \tag{13-17}$$

где $\Delta\omega_{к}$ — полоса пропускания колебательной системы. Действительно, при выполнении неравенства (13-17) переходные процессы в цепи будут иметь малую по сравнению с периодом модуляции продолжительность, и практически их можно не учитывать. Помимо этого условия метод мгновенных частот накладывает определенные ограничения и на величину $\Delta\omega_m$, ибо скорость изменения мгновенной частоты при заданной Ω, естественно, должна зависеть от девиации частоты. Установлено, что приближенные результаты будут вполне приемлемыми, если $\frac{\Delta\omega_m}{\Delta\omega_{к}} \leqslant 1$. На практике это условие обычно выполняется.

Введем в рассмотрение текущий комплекс $u_{к1}(t) = U_{н}e^{j\theta(t)}$, вещественная часть которого равна входному напряжению

$$u_1(t) = \operatorname{Re}[U_{н}e^{j\theta(t)}] = U_{н}\cos\theta(t) = \\ = U_{н}\cos\left(\omega_{н}t + \frac{\Delta\omega_m}{\Omega}\sin\Omega t\right)$$

[см. равенства (12-7) и (12-12)], а передаточную функцию колебательной системы обозначим $K(j\omega) = K(\omega)e^{-j\varphi_K(\omega)}$.

В соответствии с методом мгновенных частот напряжение на выходе цепи будет определяться выражением

$$u_2(t) = \operatorname{Re}[U_{н}e^{j\theta(t)}K(j\omega)] = U_{н}K(\omega)\cos[\theta(t) - \varphi_K(t)].$$

Отсюда следует, что амплитуда и мгновенная частота отклика

$$U_2 = U_{н}K(\omega) = U_{н}K(\omega_{н} + \Delta\omega_m\cos\Omega t); \tag{13-18}$$

$$\omega_{вых} = \frac{d\theta(t)}{dt} - \frac{d\varphi_K(t)}{dt} = \omega_{н} + \Delta\omega_m\cos\Omega t - \frac{d\varphi_K}{dt}. \tag{13-19}$$

Таким образом, ЧМ сигнал при прохождении через колебательную систему искажается: во-первых, нарушается исходный закон изменения частоты, и, во-вторых, появляется дополнительная амплитудная модуляция [см. (13-18)].

Из равенства (13-19) видно, что влияние колебательной системы на частоту отклика характеризуется величиной

$$S(t) = -\frac{d\varphi_K}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[\varphi_K(\omega_н + \Delta\omega_m \cos\Omega t)\right], \qquad (13\text{-}20)$$

которая зависит от вида фазовой характеристики цепи. Что касается изменения амплитуды, то она согласно (13-18) определяется частотной характеристикой.

Рассмотрим прохождение простейшего ЧМ колебания через последовательный контур, полагая, что выходное напряжение снимается с емкости. Передаточная функция цепи в этом случае имеет вид

$$K_C(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \approx -j\frac{Q}{1 + j2Q\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}},$$

где Q — добротность контура, а ω_0 — резонансная частота.

Если контур настроен на несущую частоту ($\omega_0 = \omega_н$), то

$$\omega - \omega_0 = \Delta\omega_m \cos\Omega t$$

и

$$K(j\omega) = Q\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{1 + j2Q\frac{\Delta\omega_m}{\omega_н}\cos\Omega t}.$$

Модуль последнего выражения

$$K(\omega) = \frac{Q}{\sqrt{1 + \left(2Q\frac{\Delta\omega_m}{\omega_н}\cos\Omega t\right)^2}},$$

а фазовый угол

$$\varphi_K = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(2Q\frac{\Delta\omega_m}{\omega_н}\cos\Omega t\right).$$

Подставляя значения $K(\omega)$ и φ_K в равенства (13-18) и (13-20) и учитывая, что ω_0/Q есть полоса пропускания $\Delta\omega_K$, будем иметь

$$U_2(t) = Q\frac{U_н}{\sqrt{1 + \left(2\frac{\Delta\omega_m}{\Delta\omega_K}\cos\Omega t\right)^2}}; \qquad (13\text{-}21)$$

$$S(t) = \frac{2\Delta\omega_m\frac{\Omega}{\Delta\omega_K}\sin\Omega t}{1 + \left(2\frac{\Delta\omega_m}{\Delta\omega_K}\cos\Omega t\right)^2}. \qquad (13\text{-}22)$$

График изменения амплитуды колебаний на выходе настроенного контура показан на рис. 13-13. Из рисунка видно, что амплитуда отклика изменяется во времени с двойной частотой по сравнению с Ω.

Дополнительное изменение частоты $S(t)$ выходного сигнала оказывается небольшим, так как по условию (13-17) отношение $\frac{\Omega}{\Delta\omega_K} \ll 1$, однако $S(t)$ имеет несинусоидальный характер.

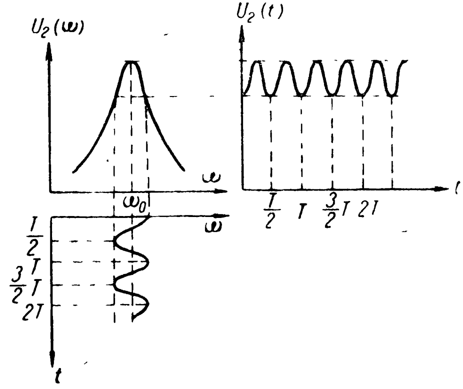


Рис. 13-13. К определению закона изменения амплитуды выходного напряжения при воздействии на контур простейшего ЧМ колебания.

$\omega_н = \omega_0$.

При прохождении ЧМ колебаний через расстроенный контур искажения выходного напряжения принимают иной вид. Так, если мгновенная частота сигнала $u_1(t)$ не выходит за пределы «линейного» участка резонансной кривой $K(\omega)$, амплитуда напряжения $u_2(t)$ будет изменяться во времени по закону, близкому к закону управляющего сигнала (рис. 13-14). Это явление используется в ряде случаев для преобразования частотно-модулированных колебаний в соответствующие колебания, модулированные по амплитуде.

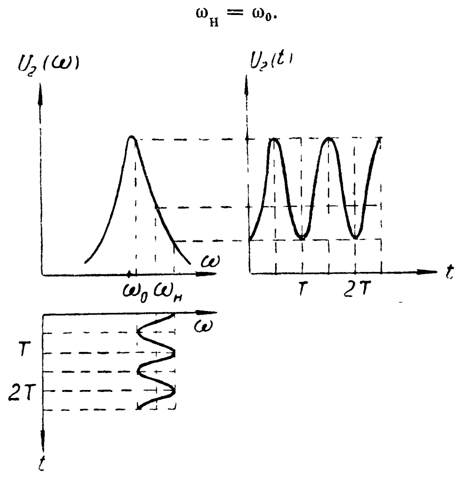


Рис. 13-14. К определению закона изменения амплитуды выходного напряжения при воздействии на контур простейшего ЧМ колебания.

$\omega_н > \omega_0$.

Аналогично можно проделать расчет отклика и в колебательных системах других типов. Детальное исследование всех этих вопросов было проведено И. С. Гоноровским.

13-5. Преобразование стационарного случайного процесса в линейной цепи

Как уже отмечалось, многие электрические колебания, с которыми имеет дело радиотехника, являются случайными. (Напомним, что сигналы, несущие информацию для получателя, также представляются случайными функциями времени). Поэтому изучение особенностей преобразо-

вания случайных процессов в линейных цепях представляет несомненный интерес.

Предположим, что на вход цепи с передаточной функцией $K(j\omega)$ и импульсной характеристикой $h(t)$ подается случайное воздействие $\xi_1(t)$ (рис. 13-15).

В результате линейного преобразования на выходе цепи будет наблюдаться новый случайный процесс $\xi_2(t)$, связанный с функцией $\xi_1(t)$ соотношением:

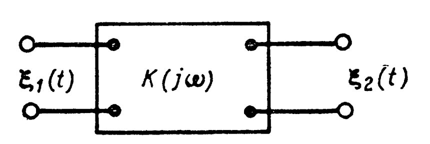


Рис. 13-15. К анализу преобразования случайного процесса в линейной цепи.

$$\xi_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_1(\theta) h(t-\theta)\, d\theta.$$

Здесь θ — переменная интегрирования.

Если процесс $\xi_1(t)$ стационарен, отклик $\xi_2(t)$, конечно, тоже будет стационарным.

Весьма важными статистическими характеристиками стационарного случайного процесса, как известно, являются корреляционная функция и спектральная плотность мощности. В соответствии с этим будем полагать, что функция $\xi_1(t)$ имеет спектральную плотность мощности $S_1(\omega)$ и корреляционную функцию $K_1(\theta)$.

Чтобы найти энергетический спектр отклика, введем в рассмотрение новую функцию

$$\xi_{1T}(t) = \begin{cases} \xi_1(t); & -T \leqslant t \leqslant +T; \\ 0; & -\infty < t < -T \quad \text{и} \quad +T < t < +\infty. \end{cases}$$

При воздействии $\xi_{1T}(t)$ на выходе цепи будет наблюдаться отклик $\xi_{2T}(t)$, спектр которого определяется функцией

$$F_{2T}(j\omega) = F_{1T}(j\omega) K(j\omega),$$

где $F_{1T}(j\omega)$ — спектральная плотность функции $\xi_{1T}(t)$.

Согласно формуле (11-11) спектральная плотность мощности отклика $\xi_2(t)$ будет

$$S_2(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} |F_{2T}(j\omega)|^2 =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} |F_{1T}(j\omega) K(j\omega)|^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} |F_{1T}(j\omega)|^2 K^2(\omega).$$

Так как

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} |F_{1T}(j\omega)|^2 = S_1(\omega),$$

то окончательно

$$S_2(\omega) = S_1(\omega) K^2(\omega). \qquad (13\text{-}23)$$

Отсюда следует, что *спектральная плотность мощности отклика при заданном стационарном случайном воздействии зависит только от вида частотной характеристики цепи. Фазовая характеристика цепи в энергетическом преобразовании сигнала непосредственного участия не принимает.*

По найденной спектральной плотности $S_2(\omega)$ можно вычислить корреляционную функцию $K_2(\theta)$. В самом деле, используя равенство (11-14), будем иметь

$$K_2(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_2(\omega) \cos \omega\theta \, d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_1(\omega) K^2(\omega) \cos \omega\theta \, d\omega. \qquad (13\text{-}24)$$

Применим полученные соотношения для конкретных расчетов. Рассмотрим, например, прохождение «белого шума» через идеальный полосовой фильтр с частотной характеристикой

$$K(\omega) = \begin{cases} K_0 & \text{при } \omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_2, \\ 0 & \text{при } 0 \leqslant \omega < \omega_1 \text{ и } \omega_2 < \omega < \infty \end{cases} \qquad (13\text{-}25)$$

(см. рис. 13-12, *а*).

«Белый шум», как известно, характеризуется равномерной спектральной плотностью в бесконечной полосе частот, т. е. $S_1(\omega) = S_0$; $0 \leqslant \omega < \infty$.

В природе, разумеется, не существует ни одного случайного процесса с подобным энергетическим спектром. Однако если спектральная плотность случайного воздействия равномерна в полосе частот, превышающей полосу пропускания цепи, то его можно рассматривать условно как «белый шум». Примерами таких воздействий являются шумы, вызываемые флюктуациями электронов.

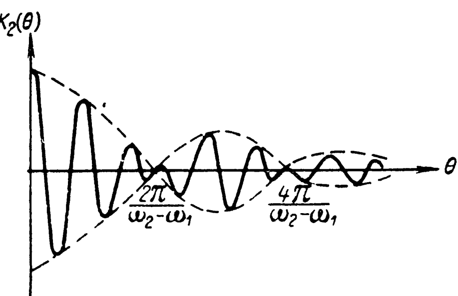


Рис. 13-16. Корреляционная функция шума на выходе идеального полосового фильтра.

Как следует из (13-23), спектральная плотность шумов на выходе полосового фильтра

$$S_2(\omega) = \begin{cases} S_0 K_0^2; & \omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_2, \\ 0; & 0 \leqslant \omega < \omega_1 \text{ и } \omega_2 < \omega < \infty. \end{cases} \qquad (13\text{-}26)$$

Полученной зависимости $S_2(\omega)$ соответствует корреляционная функция

$$K_2(\theta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} S_0K_0^2 \cos\omega\theta\, d\omega = \frac{1}{\pi} S_0K_0^2 \int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} \cos\omega\theta\, d\omega =$$
$$= \frac{2}{\pi\theta} S_0K_0^2 \cos\frac{\omega_2+\omega_1}{2}\theta \sin\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\theta.$$

Учитывая, что $\frac{\omega_2+\omega_1}{2} = \omega_0$, а $\frac{\omega_2-\omega_1}{2} = \frac{\Delta\omega}{2}$ (см. рис. 13-12, *а*), окончательно можно написать

$$K(\theta) = \frac{2}{\pi} S_0K_0^2 \cos\omega_0\theta \frac{\sin\frac{\Delta\omega}{2}\theta}{\theta}. \qquad (13\text{-}27)$$

График корреляционной функции (13-27) изображен на рис. 13-16. Здесь же пунктиром показана ее огибающая.

Средняя мощность шума на выходе цепи, как вытекает из формулы (10-15),

$$P_{ш} = K(0) = \frac{1}{\pi} S_0K_0^2\Delta\omega, \qquad (13\text{-}28)$$

т. е. *мощность шумов пропорциональна полосе пропускания полосового фильтра*. Этот вывод имеет большое значение в теории усиления слабых сигналов.

13-6. Задерживающие цепи

В радиотехнике весьма широкое применение нашли так называемые задерживающие цепи, предназначенные для передачи сигналов с задержкой во времени.

Если сигнал имеет ограниченный частотный спектр, роль идеальной задерживающей цепи, очевидно, может выполнять четырехполюсник с П-образной частотной характеристикой, ширина которой равна или превышает ширину спектра, и линейной фазовой характеристикой. В самом деле, пусть воздействие

$$u_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\omega_{макс}}^{+\omega_{макс}} F_1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

где $F_1(j\omega)$ — спектральная плотность и $\omega_{макс}$ — максимальная частота спектра, а передаточная функция четырехполюсника имеет вид (13-1) и (13-2), причем $\omega_{макс} < \omega_{гр}$.

Тогда на выходе такого четырехполюсника получим

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\omega_{макс}}^{+\omega_{макс}} K_0F_1(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = K_0u_1(t-t_0). \qquad (13\text{-}29)$$

Отсюда видно, что сигнал задерживается четырехполюсником на время $t_з = t_0$, не подвергаясь при этом каким-либо искажениям.

В действительности задержка сигнала, конечно, сопровождается некоторым изменением его формы, так как цепи не могут иметь характеристик, аналогичных (13-1) и (13-2).

Простейшей задерживающей цепью, с которой мы уже достаточно хорошо знакомы, является отрезок длинной линии с малыми потерями, работающей в режиме бегущих волн. Сигнал

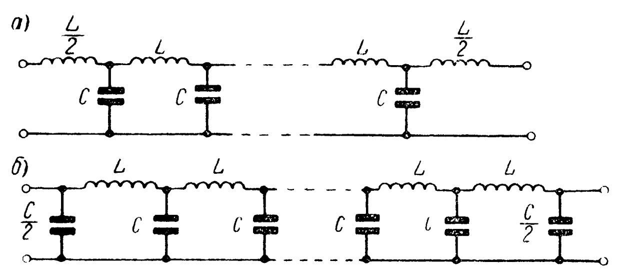


Рис. 13-17. Многозвенные фильтры нижних частот.

при распространении по такой линии, как известно, запаздывает во времени на величину

$$t_з \approx \frac{l}{v};$$

здесь v — скорость распространения электромагнитной волны и l — длина отрезка линии.

Однако задерживающие цепи с распределенными параметрами не применяются на практике, так как они даже для малых значений $t_з$ должны иметь весьма большие размеры. (Если положить, что скорость распространения волны равна $3 \cdot 10^8$ *м/сек*, то задержка в 1 *мксек* соответствует длине линии 300 *м*).

В реальных условиях задержка сигналов осуществляется при помощи схем с сосредоточенными параметрами.

Для управляющих колебаний в качестве задерживающих цепей часто применяют многозвенные фильтры нижних частот, образованные последовательным соединением Т- или П-образных ячеек (рис. 13-17, *а* и *б* соответственно).

Нетрудно заметить, что цепь, изображенная на рис. 13-17, *а* (или 13-17, *б*) по виду аналогична эквивалентной схеме длинной линии без потерь (рис. 13-18). На основании этого можно полагать, что явления, возникающие в подобной цепи при передаче сигнала, будут похожи на процессы в линии, т. е. цепь представляет собой как бы искусственную длинную линию. Если такую «линию» согласовать с нагрузкой, то ее, очевидно, можно использовать для задержки сигналов.

Конечно, указанная аналогия имеет формальный характер. На самом деле рассматриваемая цепь не является системой с распределенными параметрами, и, стало быть, волновые процессы в ней существовать не могут. Запаздывание выходного сигнала относительно

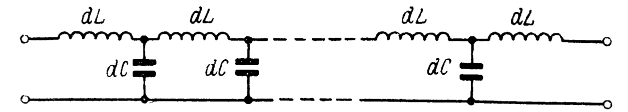


Рис. 13-18. Эквивалентная схема отрезка длинной линии.

входного в данном случае есть лишь следствие возникающих в цепи переходных явлений.

Перейдем к анализу процессов в схеме, изображенной на рис. 13-17. Для этого представим ее в виде последовательной цепочки n идентичных симметричных четырехполюсников, работающих в согласованном режиме (рис. 13-19).

Рис. 13-19. Последовательная цепочка n симметричных идентичных четырехполюсников.

Комплексную амплитуду напряжения на входе системы обозначим U_1, а на выходе — U_{n+1}. Тогда отношение этих амплитуд будет

$$K(j\omega) = \frac{U_{n+1}}{U_1} = \frac{U_2}{U_1} \cdot \frac{U_3}{U_2} \cdot \frac{U_4}{U_3} \cdots \frac{U_n}{U_{n-1}} \cdot \frac{U_{n+1}}{U_n}.$$

Так как для p-го четырехполюсника

$$\frac{U_{p+1}}{U_p} = e^{-\Gamma_p}; \quad p = 1,\ 2,\ 3, \ldots n,$$

где Γ_p — коэффициент распространения, то

$$K(j\omega) = e^{-\Gamma_1} e^{-\Gamma_2} e^{-\Gamma_3} \ldots e^{-\Gamma_n} = e^{-n\Gamma_0};$$
$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \ldots = \Gamma_n = \Gamma_0.$$

Постоянная Γ_0 для Т-образной ячейки фильтра нижних частот определяется известным выражением:

$$\operatorname{ch} \Gamma_0 = 1 - \frac{2\omega^2}{\omega_{гр}^2}, \qquad (13\text{-}30)$$

где
$$\omega_{гр} = \frac{2}{\sqrt{LC}}.$$

Из этого выражения видно, что в полосе прозрачности, т. е. при $\omega \leqslant \omega_{гр}$, Γ_0 есть мнимая величина $j\varphi_0$ (см. § 5-10).

Следовательно, на интервале $0 \leqslant \omega \leqslant \omega_{гр}$ модуль коэффициента передачи цепи

$$K(\omega) = 1,$$

а фазовая характеристика

$$\varphi_K(\omega) = n\varphi_0 = n \arccos\left(1 - \frac{2\omega^2}{\omega_{гр}^2}\right).$$

Последняя на начальном участке (см. рис. 13-20) достаточно близка к прямой линии.

Таким образом, схема, изображенная на рис. 13-17, *а*, может быть использована как задерживающая при условии, что ширина спектра сигнала меньше полосы прозрачности. Если сигнал имеет более широкий частотный спектр, передача его сопровождается значительными искажениями.

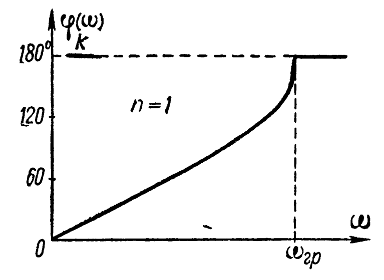


Рис. 13-20. Фазовая характеристика фильтра нижних частот.

Полученный вывод в равной мере относится и к схеме, показанной на рис. 13-17, *б*.

Вычислим время задержки $t_з$, полагая, что ширина спектра сигнала значительно меньше полосы прозрачности. Для этого входное напряжение $u_1(t)$ и выходное $u_2(t)$ представим в виде:

$$u_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{макс}}^{+\omega_{макс}} F_1(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega;$$

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{макс}}^{+\omega_{макс}} F_1(j\omega)\, K(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{макс}}^{+\omega_{макс}} F_1(j\omega)\, e^{-n\Gamma_0} e^{j\omega t}\, d\omega. \quad (13\text{-}31)$$

Здесь $\omega_{макс}$ — максимальная частота спектра сигнала, причем $\omega_{макс} \ll \omega_{гр}$.

Разложим функцию $\varphi_0(\omega)$ в окрестности точки $\omega = 0$ в степенной ряд

$$\varphi_0(\omega) = \varphi_0(0) + \left(\frac{d\varphi_0}{d\omega}\right)_{\omega=0} \omega + \ldots$$

Так как по условию ω мало и $\varphi_0(0) = 0$, приближенно можно полагать

$$\varphi_0(\omega) \approx \left(\frac{d\varphi_0}{d\omega}\right)_0 \omega \quad \text{и} \quad n\Gamma_0 = jn\left(\frac{d\varphi_0}{d\omega}\right)_0 \omega.$$

Подставляя последнее выражение в равенство (13-30), находим

$$u_2(t) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{\text{макс}}}^{+\omega_{\text{макс}}} F_1(j\omega)\, e^{j\omega\left[t - n\left(\frac{d\varphi_0}{d\omega}\right)_0\right]}\, d\omega,$$

откуда на основании теоремы запаздывания следует, что

$$u_2(t) \approx u_1\left[t - n\left(\frac{d\varphi_0}{d\omega}\right)_0\right].$$

Таким образом, время задержки сигнала

$$t_з \approx \left.\frac{d\varphi}{d\omega}\right|_{\omega=0} = n\left(\frac{d\varphi_0}{d\omega}\right)_0.$$

Для цепи, изображенной на рис. 13-17, *а*,

$$\frac{d\varphi_0}{d\omega} = \frac{2}{\omega_{\text{гр}}\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{\text{гр}}^2}}};$$

при $\omega = 0$

$$\left(\frac{d\varphi_0}{d\omega}\right)_0 = \frac{2}{\omega_{\text{гр}}} = \sqrt{LC}.$$

Следовательно,

$$t_з \approx n\sqrt{LC}.$$

Полученное выражение дает вполне удовлетворительный результат, если $\omega_{\text{макс}}/\omega_{\text{гр}}$ не превышает 0,5, т. е. $\frac{\omega_{\text{макс}}^2}{\omega_{\text{гр}}^2} \leqslant 0{,}25$.

Характеристическое сопротивление фильтра

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{\text{гр}}^2}}$$

в этом случае приближенно можно считать постоянным:

$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

ГЛАВА ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ

УСИЛЕНИЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ

14-1. Введение

Прохождение сигналов через электрические цепи неизбежно связано с изменением их формы. Пользуясь языком метода гармонического анализа, можно сказать, что спектральные функции воздействия (сигнала на входе системы) и отклика (сигнала на выходе) всегда отличаются друг от друга.

В предыдущей главе были рассмотрены преобразования сигналов в линейных цепях. Вспомним основные характерные особенности этих преобразований.

Если на вход линейного четырехполюсника (рис. 14-1) подан сигнал, модуль спектральной функции которого $F_1(\omega)$[1], а частотная характеристика коэффициента передачи $K(\omega)$ имеет, например, вид рис. 14-1, то спектральная функция выходного напряжения $F_2(\omega) = K(\omega)F_1(\omega)$. Она, как видно, существенно отличается от $F_1(\omega)$. В этом примере в спектре выходного сигнала остались только частóты, лежащие в диапазоне ω_1—ω_2, причем соотношение между отдельными составляющими в этом интервале иное, чем в функции $F_1(\omega)$. Остальные составляющие почти полностью подавлены.

В линейной цепи с постоянными (неизменными во времени) параметрами возможно лишь изменение удельного веса отдельных составляющих частот, которые уже имеются в составе входного сигнала. Возникновение колебаний новых частот, отсутствующих в составе воздействия, здесь принципиально невозможно.

Как показано в главе десятой иная картина наблюдается в нелинейных цепях. Подведя тот же сигнал $F_1(\omega)$ к нелинейному четырехполюснику (рис. 14-2), можем получить на его выходе напряжение, спектральная функция которого $F_2(\omega)$ содержит в зависимости от вида нелинейности те или иные новые частоты, являющиеся продуктом нелинейности (эта часть спектра $F_2(\omega)$ заштрихо-

[1] Здесь мы рассматриваем только амплитудно-частотные соотношения, не касаясь вопроса о фазово-частотных характеристиках.

вана). В данном случае в отличие от линейной цепи происходит о р г а н и ч е с к о е   п р е о б р а з о в а н и е спектра частот.

Если, далее, система содержит линейную частотно-избирательную (фильтрующую) цепь *Ф*, то в зависимости от вида ее частотной характеристики $K(\omega)$ из спектра $F_2(\omega)$ может быть выделена та или иная его часть. Так, на рис. 14-2 показана возможность выделения продукта нелинейности, содержащего частоты от ω' до ω''. Если же частотная характеристика имеет вид пунктирной кривой, спектральная функция выходного напряжения $F_{вых}(\omega)$ будет очищена от всех продуктов нелинейности.

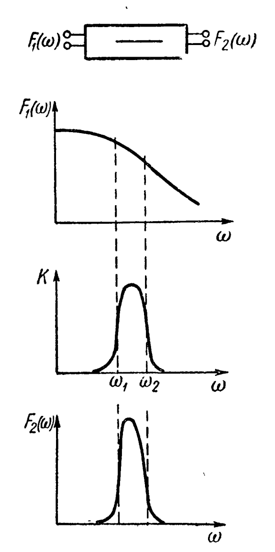


Рис. 14-1. Преобразование спектра в линейной системе.

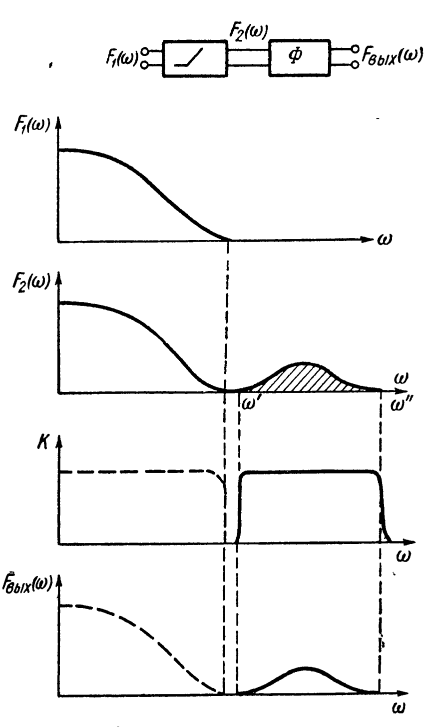


Рис. 14-2. Преобразование спектра в нелинейной системе.

Нелинейные цепи представляют богатые возможности для различного рода преобразований сигналов. Поэтому они находят многообразные применения в радиоэлектронной аппаратуре.

В некоторых случаях, как например, в усилителях, продукт нелинейности играет вредную роль. Возникающие в системе новые частоты вносят в форму сигнала нежелательные искажения, и с ними следует всеми возможными мерами бороться. В частности, с этой целью используется фильтр с соответствующей частотной характеристикой (пунктир на рис. 14-2).

Во многих других случаях органическое преобразование частотного спектра выполняет полезную роль. Соответственно выбрав

тип нелинейности, можно получить желательную форму продукта нелинейности и посредством линейной фильтрующей цепи выделить его из состава вторичного напряжения, как это показано (сплошными линиями) на рис. 14-2.

Рассмотрим сначала вопросы усиления сигналов. Принципиально усиление является линейным преобразованием, но, как правило, выполняется в цепях, содержащих нелинейные элементы.

Далее будут рассмотрены важнейшие виды преобразований сигналов, основанных на использовании нелинейных свойств цепей, т. е. такие преобразования, в которых нелинейность цепи играет полезную роль.

14-2. Общие сведения об усилителях

Усилителем называют четырехполюсник, обладающий тем свойством, что мощность, выделяемая в нагрузке превосходит мощность, подводимую к его

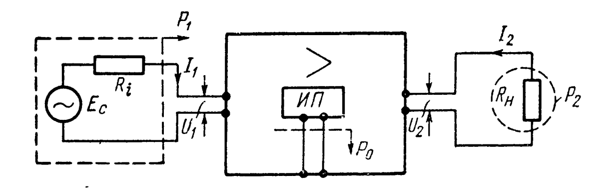


Рис. 14-3. Блок-схема усилителя.

входу, а форма колебаний (сигналов) остается неизменной. Усилитель принципиально отличается от многих других цепей, способных увеличивать амплитуду воздействующих на них колебаний. К числу таких цепей относится, например, трансформатор напряжения, вторичное напряжение которого в m раз превосходит (при холостом ходе) первичное напряжение (m — коэффициент трансформации). Другим аналогичным примером может служить настроенный последовательный колебательный контур, напряжение на реактивном элементе которого в Q раз больше подведенного напряжения, где Q — добротность контура. В этих (пассивных) четырехполюсниках в отличие от усилителей мощность, выделяемая в сопротивлении нагрузки, разумеется, всегда меньше подводимой к цепи мощности.

На рис. 14-3 изображена блок-схема усилителя. К входу его подведено напряжение от источника сигналов, который представлен на схеме в виде эквивалентного генератора, развивающего э. д. с. $E_с$ и имеющего внутреннее сопротивление R_i. От генератора к усилителю подводится мощность P_1. Нагрузкой усилителя, в которой выделяется мощность P_2, является сопротивление $R_н$.

Очевидно, что P_2 может превосходить P_1 только в том случае, если четырехполюсник содержит посторонний источник энергии *ИП* (обычно источник постоянного тока). Таким образом, усилитель является активным четырехполюсником. Роль первичного напряжения сводится к управлению поступлением энергии от источника питания *ИП* к нагрузке $R_н$. Это управление, как правило, должно происходить чрезвычайно быстро посредством входящего в состав усилителя безынерционного элемента. В качестве последнего в усилителях применяются нелинейные управляемые элементы (активные сопротивления или реактивности). По виду используемых в них управляемых элементов усилители можно классифицировать: ламповые, транзисторные, магнитные, диэлектрические.

Из сказанного видно, что мощность P_1, которую иногда называют мощностью возбуждения, может быть очень малой и даже равной нулю, так как полезная мощность P_2 получается за счет энергии первичного источника *ИП*.

Коэффициент

$$K_P = \frac{P_2}{P_1} \tag{14-1}$$

называется коэффициентом усиления мощности.

Если мощность, отдаваемая источником питания *ИП* равна P_0, коэффициент

$$\eta = \frac{P_2}{P_0} \tag{14-2}$$

является коэффициентом полезного действия усилителя.

Усилитель иногда называют генератором с посторонним возбуждением, так как он представляет собой преобразователь энергии источника *ИП* в энергию переменного тока, выделяемую в сопротивлении нагрузки, и требует для своей работы наличия постороннего, маломощного источника напряжения возбуждения U_1.

Хотя усилитель является нелинейным активным четырехполюсником, однако, как было показано в § 10-7, п. «а», при достаточно малых сигналах, т. е. в режиме малых колебаний, систему можно приближенно считать линейной и, стало быть, параметры ее не зависящими от величин токов и напряжений. Кроме того, для усиления сигналов использование нелинейных элементов не является принципиально обязательным.

Имея в виду эти соображения, мы вправе при исследовании усилителя считать систему линейной и, полагая, что подводимый сигнал имеет гармоническую форму, применять для количественной оценки явлений в цепи символический метод.

Передаточная функция

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \qquad (14\text{-}3)$$

носит название комплексного коэффициента усиления напряжения.

Модуль его, т. е. отношение амплитуд напряжения на выходе и на входе усилителя,

$$K = \frac{U_2}{U_1} \qquad (14\text{-}4)$$

называется коэффициентом усиления напряжения.

Аналогично введем понятия о комплексном коэффициенте усиления тока

$$\dot{K}_i(j\omega) = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \qquad (14\text{-}5)$$

и о коэффициенте усиления тока

$$K_i = \frac{I_2}{I_1}. \qquad (14\text{-}6)$$

Здесь I_2 — амплитуда выходного тока (тока, проходящего через сопротивление нагрузки);
I_1 — амплитуда тока на входе усилителя.

Мощность, подводимая к входу усилителя от генератора сигнала,

$$P_1 = \frac{1}{2} I_1^2 R_{вх}, \qquad (14\text{-}7)$$

где $R_{вх}$ — активная составляющая входного сопротивления усилителя.

Полагая, что входное сопротивление активно, т. е. $Z_{вх} = R_{вх}$, можем написать

$$P_1 = \frac{U_1 I_1}{2} = \frac{U_1^2}{2 R_{вх}}. \qquad (14\text{-}8)$$

Полезная мощность, выделяемая в сопротивлении нагрузки $R_н$, которое считаем активным,

$$P_2 = \frac{U_2^2}{2R_н} = \frac{1}{2} I_2^2 R_н = \frac{U_2 I_2}{2}. \qquad (14\text{-}9)$$

Имея в виду (14-8) и (14-9), получим, что коэффициент усиления мощности

$$K_P = \frac{U_2 I_2}{U_1 I_1} = K K_i. \qquad (14\text{-}10)$$

Коэффициент K_P, разумеется, не обязательно превышает единицу. Так, при холостом ходе ($K_i = 0$) и коротком замыкании

($K = 0$) коэффициент усиления мощности равен нулю. Отсюда следует, что имеется некоторое оптимальное сопротивление нагрузки $R_{н.опт}$, при котором коэффициент усиления мощности достигает максимального значения $K_{P\,макс}$ (рис. 14-4). При правильном выборе режима работы усилителя $K_{P макс} > 1$.

Если сопротивление нагрузки $R_н = R_{н.опт}$, то усилитель согласован на выходе.

Когда ставится цель отдачи наибольшей мощности от заданного источника сигнала, необходимо согласовать усилитель на входе, т. е. осуществить равенство $R_{вх} = R_i$.

Тогда к входу усилителя подводится мощность [см. (5-144)]

$$P_{1макс} = \frac{E_c^2}{8R_i}. \qquad (14\text{-}11)$$

Если, кроме того, усилитель согласован и на выходе, полезная мощность в сопротивлении $R_н$

Рис. 14-4. Зависимость K_P ($R_н$).

$$P_{2макс} = K_{P0}P_{1макс} = K_{P0}\frac{E_c^2}{8R_i}, \qquad (14\text{-}12)$$

где K_{P0} — максимальный коэффициент усиления мощности, при двустороннем согласовании.

Часто заданным является не входное напряжение, а э. д. с. сигнала E_c. Поэтому наряду с введенными выше параметрами усилителя удобно пользоваться коэффициентом усиления э. д. с.

$$K_E = \frac{U_2}{E_c}, \qquad (14\text{-}13)$$

определяемым как отношение напряжения на выходе к э. д. с. сигнала.

Нетрудно установить связь между коэффициентами K и K_E. Умножив и разделив (14-13) на U_1 и имея в виду, что $\frac{U_1}{E_c} = \frac{R_{вх}}{R_i + R_{вх}}$, получим

$$K_E = K\frac{R_{вх}}{R_i + R_{вх}} = K\frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_{вх}}}. \qquad (14\text{-}14)$$

Только при $R_{вх} \to \infty$ коэффициенты усиления э. д. с. и напряжения равны между собой: $K_E = K$. Вообще же всегда $K_E < K$. В частности, в режиме согласования на входе $K_E = 0{,}5K$. При малом входном сопротивлении усиление электродвижущей силы сиг-

нала может быть совсем незначительным. Малое входное сопротивление приводит также к тому, что при заданном U_1 велика мощность P_1 [см. (14-8)], а значит, мал коэффициент усиления мощности.

Отсюда должно быть ясным, что входное сопротивление является важнейшим параметром усилителя. Обычно желательно возможно большее значение $R_{вх}$, хотя согласование усилителя на входе при этом оказывается затруднительным.

Коэффициенты усиления K и K_i также связаны между собой. Умножив и разделив (14-6) на $U_1 U_2$ и учитывая, что $\frac{U_1}{I_1} = R_{вх}$ и $\frac{U_2}{I_2} = R_н$, найдем

$$K = K_i \frac{R_н}{R_{вх}}. \tag{14-15}$$

Во многих случаях перед усилителем ставится задача получения наибольшего выходного напряжения, т. е. достижения возможно большего коэффициента усиления напряжения. При этом энергетические соображения, в частности о согласовании на входе, о коэффициенте полезного действия, отодвигаются на задний план. Такие усилители называют условно усилителями напряжения. Надо, однако, иметь в виду, что и в усилителях напряжения, как правило, мощность, отдаваемая источником сигнала, ничтожно мала ($P_1 \to 0$) и коэффициент усиления мощности $K_P > 1$.

Если же главным назначением устройства является усиление мощности, его называют усилителем мощности. Здесь второстепенным становится вопрос о коэффициенте усиления напряжения, который может быть и меньшим единицы. Зато приобретают особое значение вопросы согласования и обеспечения возможно большего к. п. д.

14-3. Линейная теория усилителей (активных четырехполюсников)

Рассматривая усилитель как линейный четырехполюсник, мы можем связать между собой входные и выходные напряжения и токи системой линейных уравнений. Как было показано в § 5-2, выбирая ту или иную систему параметров четырехполюсника, его уравнения можно представить в различных формах.

Для исследования усилителей удобно воспользоваться Y-параметрами. Тогда уравнения четырехполюсника (рис. 14-5) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{I}_1 &= Y_{11}\boldsymbol{U}_1 + Y_{12}\boldsymbol{U}_2; \quad (14\text{-}16)\\ \boldsymbol{I}_2 &= Y_{21}\boldsymbol{U}_1 + Y_{22}\boldsymbol{U}_2. \quad (14\text{-}17) \end{aligned}\right\}$$

Здесь

$Y_{11}=\frac{I_1}{U_1}$ при $U_2=0$ — входная проводимость при короткозамкнутом выходе;

$Y_{12}=\frac{I_1}{U_2}$ при $U_1=0$ — обратная проходная проводимость при короткозамкнутом входе;

$Y_{22}=\frac{I_2}{U_2}$ при $U_1=0$ — выходная проводимость при короткозамкнутом входе;

$Y_{21}=\frac{I_2}{U_1}$ при $U_2=0$ — прямая проходная проводимость при короткозамкнутом выходе.

В пассивных четырехполюсниках в силу применимости к ним принципа взаимности проходные проводимости Y_{12} и Y_{21} равны между собой. Однако усилитель является активным несимметричным четырехполюсником; поэтому для него $Y_{12}\neq Y_{21}$.

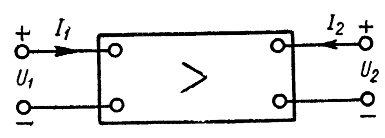


Рис. 14-5. Активный линейный четырехполюсник.

Будем искать эквивалентную схему, для которой справедливы уравнения (14-16) и (14-17).

Наиболее очевидной является схема, изображенная на рис. 14-6. Она содержит два пассивных элемента Y_{11} и Y_{22} и два генератора тока

$$I_{г1}=Y_{12}U_2$$

и

$$I_{г2}=Y_{21}U_1.$$

В справедливости этой схемы легко убедиться, если применить первый закон Кирхгофа сперва к узлу a — тогда получим урав-

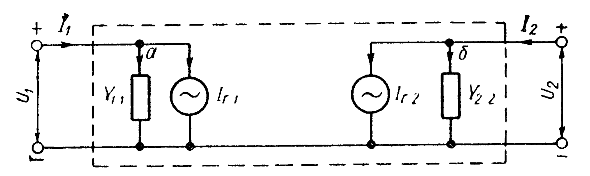


Рис. 14-6. Эквивалентная схема активного четырехполюсника с двумя генераторами.

нение (14-16), а затем к узлу $б$, для которого справедливо уравнение (14-17).

Схема рис. 14-6 не всегда удобна, так как она включает в себя два генератора. Покажем, что от нее можно перейти к эквивалентной ей схеме, изображенной на рис. 14-7 и содержащей три пассив-

ных элемента Y_1, Y_0, Y_2 и лишь один активный элемент — генератор тока $I_г = YU_1$.

Связав элементы новой схемы Y_1, Y_0, Y_2, Y с исходными параметрами Y_{11}, Y_{12}, Y_{22}, Y_{21}, докажем тем самым ее справедливость.

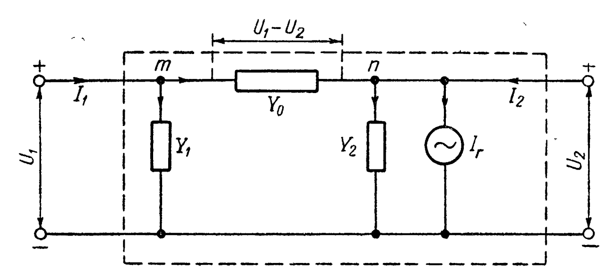


Рис. 14-7. Эквивалентная схема активного четырехполюсника с одним генератором.

Составляем уравнения первого закона Кирхгофа для узлов m и n схемы

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= Y_1U_1 + (U_1 - U_2)\,Y_0, \\ I_2 &= YU_1 + Y_2U_2 - Y_0\,(U_1 - U_2) \end{aligned}\right\}$$

или, иначе,

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= (Y_1 + Y_0)\,U_1 - Y_0U_2, \\ I_2 &= (Y - Y_0)\,U_1 + (Y_2 + Y_0)\,U_2. \end{aligned}\right\}$$

Сравнивая эти уравнения с (14-16) и (14-17), видим, что они имеют одинаковый вид и поэтому, приравнивая их коэффициенты, получаем:

$$Y_1 + Y_0 = Y_{11};\quad Y_0 = -Y_{12};\quad Y - Y_0 = Y_{21};\quad Y_2 + Y_0 = Y_{22}.$$

Отсюда находим значения параметров новой схемы (рис. 14-7):

$$Y_1 = Y_{11} + Y_{12}; \tag{14-18}$$

$$Y_0 = -Y_{12}; \tag{14-19}$$

$$Y_2 = Y_{22} + Y_{12}; \tag{14-20}$$

$$Y = Y_{21} - Y_{12}. \tag{14-21}$$

Участвующий в схеме рис. 14-7 генератор тока определяет усилительные свойства четырехполюсника. Ток этого генератора

$$I_г = YU_1 = (Y_{21} - Y_{12})\,U_1. \tag{14-22}$$

Если бы проходные проводимости Y_{21} и Y_{12} были равны между собой, ток $I_г$ равнялся бы нулю. Чем больше разница между Y_{21} и Y_{12}, тем ярче сказываются усилительные свойства четырехполюсника.

Уравнения (14-16) и (14-17) дают возможность установить общие выражения для основных параметров усилителя.

Воспользовавшись уравнением (14-17), найдем выражение для комплексного коэффициента усиления напряжения. Пусть четырехполюсник нагружен на комплексную нагрузку, проводимость

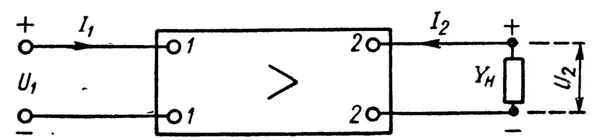


Рис. 14-8. Нагруженный четырехполюсник.

которой $Y_н$ (рис. 14-8). Тогда при выбранных на рисунке условно положительных направлениях тока I_2 и напряжения U_2 получим

$$I_2 = -U_2 Y_н;$$

подставив это значение I_2 в (14-17), найдем, что

$$Y_{21} U_1 + (Y_{22} + Y_н) U_2 = 0.$$

Отсюда комплексный коэффициент усиления

$$K(j\omega) = -\frac{Y_{21}}{Y_{22} + Y_н}. \tag{14-23}$$

Входную проводимость усилителя, на выходе которого включена нагрузка $Y_н$, найдем, воспользовавшись (14-16); имеем

$$Y_{вх} = \frac{I_1}{U_1} = Y_{11} + Y_{12}\frac{U_2}{U_1} = Y_{11} + K(j\omega) Y_{12}. \tag{14-24}$$

Подставив сюда значение $K(j\omega)$ из (14-23) и обозначив

$$Y_{2н} = Y_{22} + Y_н, \tag{14-25}$$

получим

$$Y_{вх} = Y_{11} - \frac{Y_{12} Y_{21}}{Y_{2н}} = \frac{Y_{11} Y_{2н} - Y_{12} Y_{21}}{Y_{2н}}. \tag{14-26}$$

Теперь нетрудно найти и общее выражение комплексного коэффициента усиления тока. Аналогично выводу формулы (14-15), приняв во внимание, что $\frac{I_2}{U_2} = -Y_н$, получим

$$K_i(j\omega) = -K(j\omega)\frac{Y_н}{Y_{вх}}, \tag{14-27}$$

а подставив сюда вместо $K(j\omega)$ и $Y_{вх}$ их значения из (14-23) и (14-26), придем к выражению

$$K_i(j\omega) = \frac{Y_н Y_{21}}{Y_{11} Y_{2н} - Y_{12} Y_{21}}. \tag{14-28}$$

Под выходной проводимостью усилителя $Y_{вых}$ мы должны понимать проводимость между его выходными зажимами при замкнутом накоротко генераторе э. д. с. сигнала, но при сохранении в схеме внутреннего сопротивления $Z_i = \frac{1}{Y_i}$ (рис. 14-9).

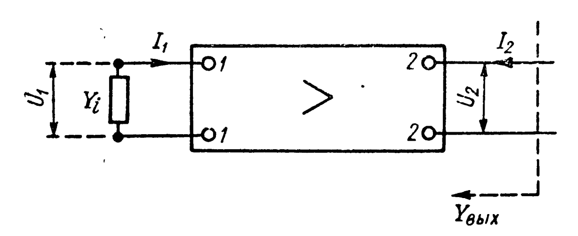


Рис. 14-9. К расчету выходного сопротивления.

Тогда, воспользовавшись уравнением (14-17), получим

$$Y_{вых} = \frac{I_2}{U_2} = Y_{22} + Y_{21}\frac{U_1}{U_2} = Y_{22} + K'(j\omega)\,Y_{21}. \qquad (14\text{-}29)$$

Здесь $K'(j\omega) = \frac{U_1}{U_2}$ — коэффициент усиления напряжения при питании схемы справа.

Идя тем же путем, каким мы шли при выводе формулы (14-23), нетрудно найти, что

$$K'(j\omega) = -\frac{Y_{12}}{Y_{11}+Y_i}, \qquad (14\text{-}30)$$

и, обозначив

$$Y_{1i} = Y_{11} + Y_i, \qquad (14\text{-}31)$$

получаем

$$Y_{вых} = Y_{22} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{1i}} = \frac{Y_{22}Y_{1i} - Y_{12}Y_{21}}{Y_{1i}}. \qquad (14\text{-}32)$$

Часто — при не слишком высоких частотах — элементы, составляющие эквивалентную схему усилителя, можно полагать чисто активными. Тогда Y-параметры обращаются в g-параметры. В схеме рис. 14-7 комплексные сопротивления заменяются активными, и мы приходим к эквивалентной схеме (рис. 14-10), в которой

$$g_1 = g_{11} + g_{12}; \qquad (14\text{-}33)$$

$$g_0 = -g_{12}; \qquad (14\text{-}34)$$

$$g_2 = g_{22} + g_{12}; \qquad (14\text{-}35)$$

$$I_г = (g_{21} - g_{12})\,U_1. \qquad (14\text{-}36)$$

Выражение (14-23) для комплексного коэффициента усиления напряжения приобретает теперь вид

$$K(j\omega) = -\frac{g'_{21}}{g_{22}+Y_н}, \qquad (14\text{-}37)$$

а если сопротивление нагрузки активно ($Y_н = g_н$), то

$$K(j\omega) = -\frac{g_{21}}{g_{22} + g_н}. \qquad (14\text{-}38)$$

Отсюда следует, что при активном характере нагрузки усилителя и отсутствии в его схеме реактивных сопротивлений выходное (усиленное) напряжение и напряжение возбуждения (входное) сдвинуты по фазе на 180°.

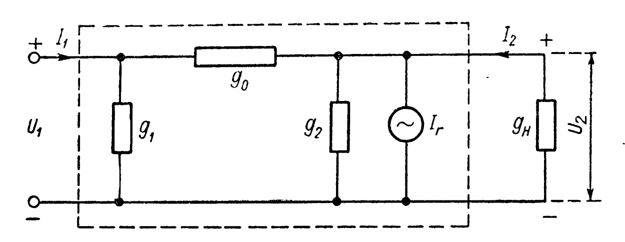


Рис. 14-10. Схема усилителя при умеренно высоких частотах.

В этом случае входная проводимость [см. (14-26)]

$$g_{вх} = \frac{g_{11} g_{2н} - g_{12} g_{21}}{g_{2н}}, \qquad (14\text{-}39)$$

где $g_{2н} = g_{22} + g_н$.

Для согласования усилителя на входе должно быть выполнено равенство

$$g_i = \frac{1}{R_i} = g_{вх}. \qquad (14\text{-}40)$$

Формула (14-28), определяющая коэффициент усиления тока, приводится теперь к виду:

$$K_i(j\omega) = \frac{g_н g_{21}}{g_{11} g_{2н} - g_{12} g_{21}}. \qquad (14\text{-}41)$$

Наконец, на основании (14-10), коэффициент усиления мощности

$$K_p = KK_i = \frac{g_н g_{21}^2}{g_{2н}(g_{11} g_{2н} - g_{12} g_{21})}. \qquad (14\text{-}42)$$

В эту формулу вместо K и K_i подставлены модули выражений (14-38) и (14-41).

Выходная проводимость теперь также будет активной и равной на основании (14-32)

$$g_{вых} = \frac{g_{22} g_{1i} - g_{21} g_{12}}{g_{1i}}, \qquad (14\text{-}43)$$

где $g_{1i} = g_{11} + g_i$.

Если необходимо осуществить согласование на выходе усилителя, т. е. получить максимальное значение K_p, следует выполнить условие

$$g_н = g_{вых}. \qquad (14\text{-}44)$$

Полученные общие выражения коэффициентов усиления, а также входной и выходной проводимостей усилителя дают возможность независимо от устройства усилителя и примененного в нем управляемого элемента оценить роль и значение отдельных параметров его эквивалентной схемы.

Прежде всего обращает на себя внимание, что важнейшим параметром усилительной схемы является прямая проходная проводимость $g_{2\,1}$. Действительно, как видно из (14-36), с увеличением $g_{2\,1}$ возрастает ток эквивалентного генератора, что должно привести к улучшению усилительных свойств системы. Об этом говорят формулы (14-38), (14-41) и (14-42): коэффициенты усиления напряжения и тока растут с увеличением $g_{2\,1}$, а коэффициент усиления мощности пропорционален $g_{2\,1}^2$. Поэтому всегда желательно иметь проводимость $g_{2\,1}$ возможно бо́льшей.

Что касается обратной проходной проводимости $g_{1\,2}$, то она играет отрицательную роль. Так как в реальных усилителях $g_{1\,2} < 0$ (стр. 644 и 652), наличие $g_{1\,2}$ приводит к увеличению входной проводимости [см. (14-39)], что, как отмечалось выше, нежелательно. Кроме того, уменьшается коэффициент усиления тока (14-41), а значит, и коэффициент усиления мощности (14-42).

От параметра $g_{1\,1}$ — входной проводимости при короткозамкнутом выходе — зависит величина входной проводимости усилителя. В частности, когда $g_{1\,2} = 0$, входная проводимость от нагрузки не зависит и тогда

$$g_{вх} = g_{1\,1}.$$

Как правило, желательно, чтобы проводимость $g_{1\,1}$ была возможно меньшей.

Наконец, от величины четвертого параметра $g_{2\,2}$ зависит выходная проводимость $g_{вых}$ [см. (14-43)]. Если речь идет об усилителе мощности, то в целях согласования на выходе [равенство (14-44)] желательно, чтобы $g_{2\,2}$ была одного порядка с $g_н$. Действительно, при малой $g_{1\,2}$, как видно из (14-43), $g_{вых} \approx g_{2\,2}$.

Если же система должна выполнять роль усилителя напряжения, то, как это следует из (14-38), желательно, чтобы проводимость $g_{2\,2}$ была возможно меньшей.

Из (14-38) также видно, что, стремясь получить возможно больший коэффициент усиления напряжения, следует при прочих равных условиях обеспечить достаточно малую проводимость (большое сопротивление) нагрузки.

14-4. Ламповый и транзисторный усилители

а) Ламповый усилитель

В электронном (ламповом) усилителе в качестве управляемого элемента используется трехэлектродная (или многоэлектродная) лампа. Ламповый триод имеет три электрода, к которым могут быть подключены элементы внешней цепи: катод, сетка и анод. Поэтому при использовании лампы в схеме четырехполюсника один из ее электродов является общим для входной и выходной цепей. В связи с этим различают три варианта включения лампы как четырехполюсника: с общим катодом (рис. 14-11, *а*); с общей сеткой (рис. 14-11, *б*); с общим анодом (рис. 14-11, *в*). Ограничимся рассмотрением первой из этих схем, имеющей наибольшее распространение.

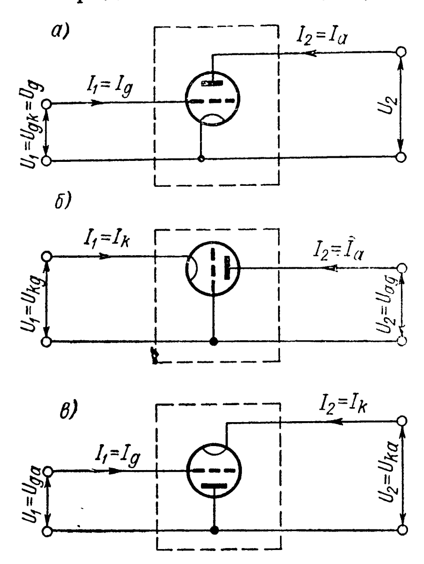


Рис. 14-11. Схемы включения лампового триода.

Напряжением и током на входе системы являются переменные слагающие напряжения сетка — катод и тока сетки: $U_1 = U_g$, $I_1 = I_g$. Вторичными (выходными) будут переменные слагающие напряжения анод — катод и анодного тока: $U_2 = U_a$, $I_2 = I_a$.

Применяя систему $g(Y)$-параметров, полагаем независимыми переменными напряжения, а искомыми величинами токи на входе и выходе цепи. Поэтому для полной характеристики триода как нелинейного элемента и для определения его параметров пользуемся четырьмя семействами кривых.

1. Входные характеристики представляют собой зависимости $i_g = f(u_g)$ при $u_a = \text{const}$ (рис. 14-12, *а*).

Из этих характеристик определяется дифференциальный параметр

$$g_{11} = \frac{\Delta i_g}{\Delta u_g} = \frac{I_g}{U_g} \quad \text{при } u_a = \text{const}. \qquad (14\text{-}45)$$

При малых сигналах рабочий участок характеристики можно принять за отрезок прямой и изменения тока Δi_g и напряжения Δu_g можно считать равными амплитудам гармонического тока I_g и гармонического напряжения U_g. Этими соотношениями мы будем

руководствоваться и в дальнейшем при определении остальных параметров лампы.

2. Прямые проходные характеристики $i_a = f(u_g)$ при $u_a = \text{const}$ (рис. 14-12, *б*) определяют связь между выходным (анодным) током и входным (сеточным) напряжением.

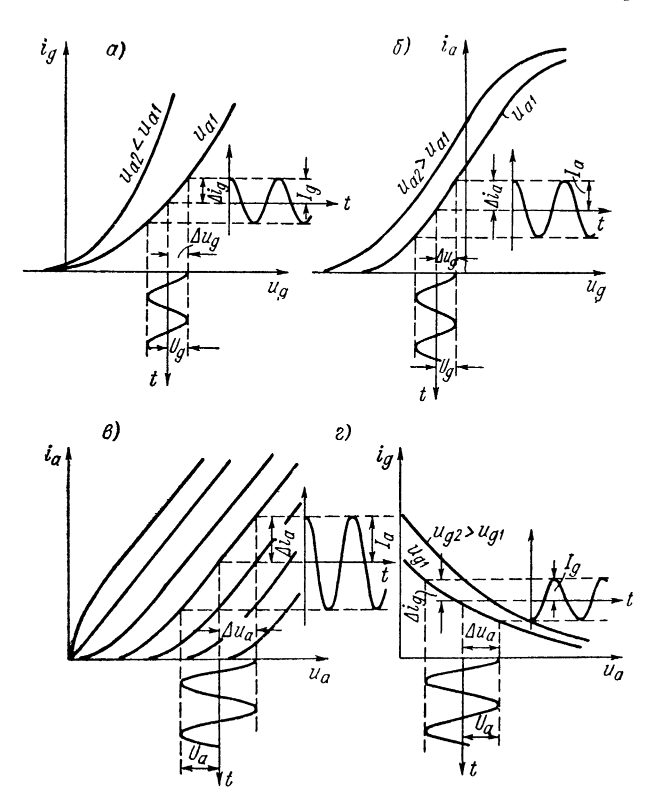


Рис. 14-12. Характеристики лампового триода.

Располагая этими характеристиками, легко найти дифференциальный параметр

$$g_{21} = \frac{\Delta i_a}{\Delta u_g} \approx \frac{I_a}{U_g} \quad \text{при } u_a = \text{const}. \tag{14-46}$$

Прямую проходную проводимость называют крутизной:

$$g_{21} = S. \tag{14-47}$$

3. Выходные характеристики $i_a = f(u_a)$ при $u_g = \text{const}$ (рис. 14-12, *в*) дают зависимость между выходными (анодными) напряжением и током.

Отсюда определяется дифференциальная выходная проводимость

$$g_{22}=\frac{\Delta i_a}{\Delta u_a}\approx\frac{I_a}{U_a} \quad \text{при } u_g=\text{const}. \qquad (14\text{-}48)$$

Величину, обратную g_{22}, называют **внутренним сопротивлением** триода

$$\frac{1}{g_{22}}=R_i. \qquad (14\text{-}49)$$

4. **Обратные проходные характеристики** $i_g=f(u_a)$ при $u_g=\text{const}$ (рис. 14-12, *г*) определяют обратное воздействие выходного напряжения на входной (сеточный) ток. Из этих характеристик находится обратная проходная проводимость

$$g_{12}=\frac{\Delta i_g}{\Delta u_a} \quad \text{при } u_g=\text{const}. \qquad (14\text{-}50)$$

Из рис. 14-12, *г* следует, что $g_{12}<0$.

Электронная лампа представляет собой прибор, в котором управление электронным потоком производится путем изменения напряжения на управляющем электроде (сетке). Значит, в цепи этого электрода ток может быть очень малым или полностью отсутствовать; режим работы лампы без сеточных токов возможен и часто практически используется. Для этого требуется, чтобы рабочая точка ни в какой момент времени не заходила в область положительных напряжений на сетке.

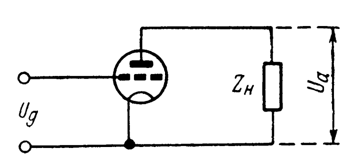


Рис. 14-13. Схема нагруженного лампового усилителя с общим катодом.

Полагая, что сеточный ток отсутствует, получим, что $g_{11}=0$ и $g_{12}=0$.

Ниже приведены средние числовые значения параметров типовых электронных ламп.

	Триоды	Пентоды
Крутизна S, *ма/в*	От 2 до 10	От 1 до 6
Внутреннее сопротивление R_i, *ком*	От 4 до 20	От 200 до 1800
Дифференциальная входная проводимость g_{11}, *ма/в*	От 0 до 1,0	От 0 до 0,7
Обратная проходная проводимость, g_{12}, *ма/в*	От 0 до —0,2	От 0 до — 0,01

Схема лампового усилителя, нагруженного на некоторое сопротивление $Z_н$, изображена на рис. 14-13.

Если пренебрегать реактивностями и считать, что работа происходит без сеточных токов ($g_{11}=0$ и $g_{12}=0$), то эквивалентная схема усилителя вместо рис. 14-10 примет вид рис. 14-14.

Источник возбуждения в этом режиме работает вхолостую ($I_g=0$). Поэтому мощность возбуждения $P_1=0$ и коэффициенты усиления тока и мощности равны бесконечности: $K_i=\infty$; $K_p=\infty$.

Так как $g_{12} = 0$, никакого обратного воздействия выходная (анодная) цепь на сеточную не оказывает.

По отношению к нагрузке $Z_н = \frac{1}{Y_н}$ усилитель эквивалентен источнику, схема которого содержит генератор тока $I_г = SU_g$ и внутреннее сопротивление $R_i = \frac{1}{g_{22}}$.

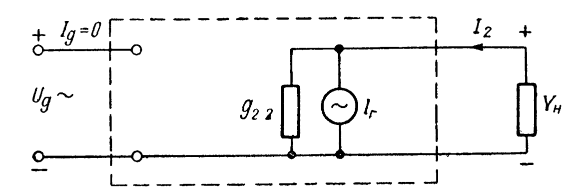


Рис. 14-14. Эквивалентная схема усилителя (с генератором тока).

От схемы с генератором тока можно перейти к схеме с генератором э. д. с. (рис. 14-15), в которой

$$E = I_г R_i = SR_i U_g = \mu U_g, \tag{14-51}$$

где μ — коэффициент усиления лампы.

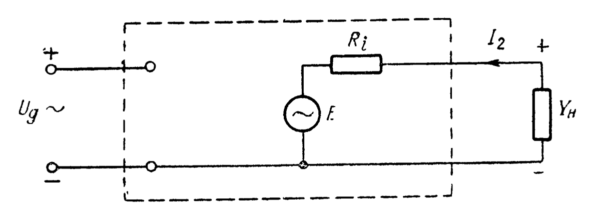


Рис. 14-15. Эквивалентная схема усилителя (с генератором э. д. с.).

Комплексный коэффициент усиления напряжения согласно (14-37)

$$K(j\omega) = -\frac{S}{\frac{1}{R_i} + \frac{1}{Z_н}} = -S_д Z_н, \tag{14-52}$$

где

$$S_д = \frac{S}{1 + \frac{Z_н}{R_i}} \tag{14-53}$$

— комплексная динамическая (рабочая) крутизна.

Имея в виду, что $SR_i = \mu$, выражение (14-52) можно представить в виде

$$K(j\omega) = -\frac{\mu}{1 + \frac{R_i}{Z_н}}. \tag{14-54}$$

Если внутреннее сопротивление лампы во много раз превышает сопротивление нагрузки ($R_i \gg z_н$), то

$$K(j\omega) \approx -SZ_н. \qquad (14\text{-}55)$$

В том частном случае, когда сопротивление нагрузки чисто активно ($Z_н = R_н$),

$$K(j\omega) = -\frac{S}{1+\frac{R_н}{R_i}} R_н = -S_д R_н = -\frac{\mu}{1+\frac{R_i}{R_н}}; \qquad (14\text{-}56)$$

если $R_i \gg R_н$, то

$$K(j\omega) \approx -SR_н. \qquad (14\text{-}57)$$

На рис. 14-16 нанесена кривая зависимости $K(\omega) = K = f\left(\frac{R_н}{R_i}\right)$, рассчитанная по формуле (14-56). Когда $\frac{R_н}{R_i} \ll 1$, эта кривая практически сливается с прямой $K = SR_н$.

Если ставится задача получения наибольшей мощности в сопротивлении нагрузки $R_н$, то усилитель должен быть согласован на выходе, т. е. $g_н = g_{вых}$.

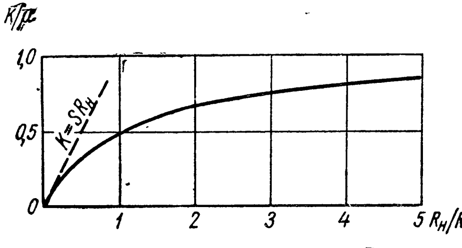


Рис. 14-16. Зависимость $\frac{K}{\mu}\left(\frac{R_н}{R_i}\right)$.

В рассматриваемом режиме выходная проводимость в соответствии с (14-43)

$$g_{вых} = g_{22} = \frac{1}{R_i},$$

поэтому условием согласования является равенство

$$R_н = R_i. \qquad (14\text{-}58)$$

До сих пор мы принимали во внимание только переменные слагающие напряжений и токов. Между тем в состав усилителя должны входить источники питания постоянного напряжения; поэтому напряжения и токи в цепях лампы содержат как переменные, так и постоянные составляющие.

Схема усилителя на ламповом триоде, включающая в себя источники, изображена на рис. 14-17. В этой схеме нагрузку, включенную в анодную цепь лампы, составляет активное сопротивление R_a.

Такой усилитель называют реостатным (или усилителем на сопротивлении).

Сопротивление R_a выполняет двоякую роль. Во-первых, оно входит в состав нагрузки усилителя по переменному току $Z_н$; во-вторых, через это сопротивление проходит постоянная слагающая анодного тока I_{a0}, которая создает на сопротивлении падение

напряжения $I_{a0}R_a$, так что постоянная слагающая напряжения на аноде

$$U_{a0} = E_a - I_{a0}R_a - I_{a0}R_k.$$

Включенное в анодную цепь сопротивление R_k, о котором пойдет речь, многим меньше, чем R_a, поэтому $I_{a0}R_k \ll I_{a0}R_a$ и

$$U_{a0} \approx E_a - I_{a0}R_a.$$

Для того чтобы на выходном сопротивлении R_2 получить напряжение, свободное от постоянной слагающей, в цепь включена разделительная емкость C_2, представляющая малое сопротивление

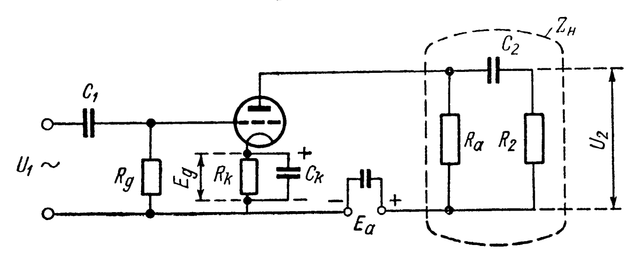


Рис. 14-17. Схема реостатного усилителя.

для переменного тока $\left(\frac{1}{\omega C_2} \ll R_2\right)$ и запирающая цепь для постоянного тока.

В цепь сетки должно быть введено отрицательное напряжение смещения E_g, величину которого следует выбирать так, чтобы работа происходила без сеточного тока, для чего максимальное мгновенное напряжение на сетке $u_{g\,\text{макс}} = U_g + E_g$ не должно быть положительным ($u_{g\,\text{макс}} \leqslant 0$) (рис. 14-18).

Для того чтобы не вводить в схему дополнительного источника питания, в качестве смещения используется падение напряжения, создаваемое на сопротивлении R_k анодным током лампы. Емкость C_k шунтирует сопротивление R_k по переменной слагающей анодного тока. Падение напряжения $E_g = I_{a0}R_k$ подается на сетку через сопротивление R_g. Емкость C_1 защищает цепь сетки от постоянной слагающей, которая может быть в составе подводимого напряжения.

Для расчета и выбора режима работы усилителя можно воспользоваться графическим приемом, описанным в § 10-5. В цепь источника анодного питания E_a последовательно включены два элемента: линейное сопротивление R_a и нелинейное сопротивление промежутка анод — катод лампы. Ток i_a определяется точкой пересечения выходной характеристики с прямой, проведенной из точки E_a под углом $\alpha = \operatorname{arcctg} R_a$ (рис. 14-19). Наклон этой прямой, т. е. величину сопротивления R_a, следует выбирать так, чтобы исходная рабочая точка m находилась на линейном участке характеристики $i_a =$

$= f(u_a)$ и чтобы изменения анодного тока около своего среднего значения, вызванные переменным напряжением на сетке, были одинаковыми в обе стороны от точки m ($\Delta i_a \approx \Delta i'_a$).

Значительное увеличение R_a (пунктирная прямая на рис. 14-19) хотя, казалось бы, способствует увеличению коэффициента усиления

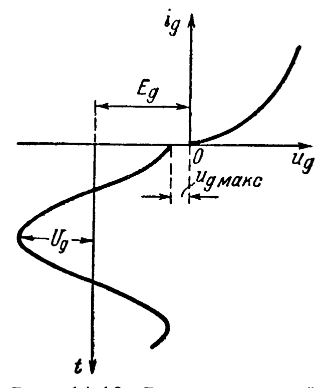


Рис. 14-18. Режим сеточной цепи усилителя.

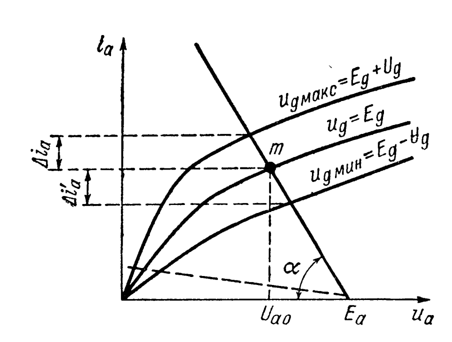


Рис. 14-19. Режим анодной цепи усилителя.

K, но приводит к работе на нелинейном участке характеристики, т. е. к значительным искажениям, и поэтому недопустимо.

На высоких и в особенности сверхвысоких частотах уже недопустимо считать параметры лампы активными. Причиной этому два основных обстоятельства: 1) наличие емкостей между электродами лампы и индуктивностей вводов; 2) влияние инерции электронов, вследствие которой параметры лампы становятся зависящими от времени, т. е. приобретают реактивную составляющую. В эквивалентной схеме мы поэтому принуждены пользоваться Y-параметрами.

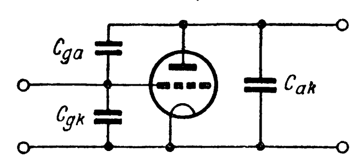


Рис. 14-20. Схема триода с указанием междуэлектродных емкостей.

В области умеренно высоких частот наибольшую роль играют междуэлектродные емкости (рис. 14-20). Влияние индуктивности выводов и инерции электронов приходится учитывать только на сверхвысоких частотах.

Найдем Y-параметры эквивалентной схемы усилителя с учетом междуэлектродных емкостей.

Если по-прежнему считать, что сеточные токи отсутствуют ($g_{1\,1} = 0$ и $g_{1\,2} = 0$), то для входной проводимости при короткозамкнутом выходе (см. рис. 14-21, *а*) найдем

$$Y_{1\,1} = \left[\frac{I_g}{U_g}\right]_{U_a=0} = j\omega\,(C_{gk} + C_{ga}). \tag{14-59}$$

Обратная проходная проводимость при короткозамкнутом входе (рис. 14-21, *б*)

$$Y_{1\,2} = \left[\frac{I_g}{U_a}\right]_{U_g=0} = -j\omega C_{ga}. \tag{14-60}$$

Знак минус получен здесь потому, что направление тока I_g обратно принятому за положительное.

Прямая проходная проводимость содержит активную составляющую, равную $g_{21} = S$, но, кроме того, появляется дополнительная реактивная проводимость, обязанная емкости C_{ga}. Поэтому (рис. 14-21, *в*)

$$Y_{21} = \left[\frac{I_a}{U_g}\right]_{U_a=0} = S - j\omega C_{gk}. \tag{14-61}$$

Обычно $S \gg \omega C_{gk}$; следовательно, на умеренно высоких частотах, так же, как и на низких, можно считать

$$Y_{21} \approx S.$$

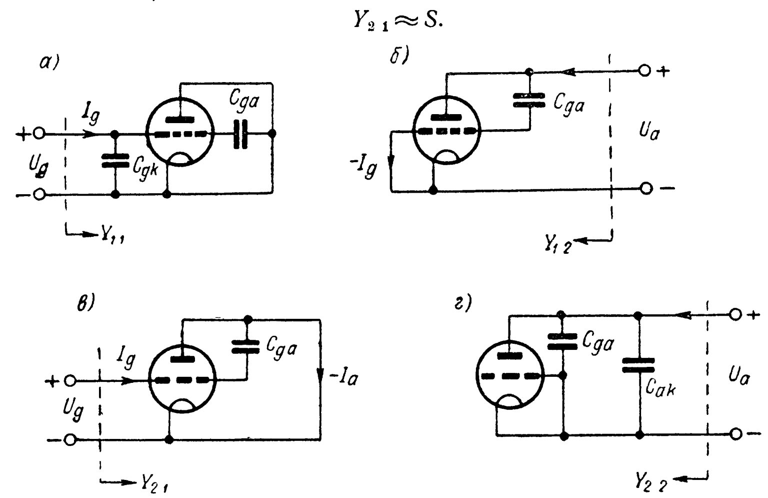


Рис. 14-21. К расчету параметров триода.

Наконец, выходная проводимость при короткозамкнутом входе, кроме активной составляющей g_{22}, содержит реактивную слагающую, связанную с наличием емкостей C_{ga} и C_{ak}. Тогда (рис. 14-21, *г*)

$$Y_{22} = \left[\frac{I_a}{U_a}\right]_{U_g=0} = g_{22} + j\omega\,(C_{ga} + C_{ak}). \tag{14-62}$$

Часто $g_{22} \gg \omega(C_{ga} + C_{ak})$. Тогда допустимо считать

$$Y_{22} \approx g_{22}.$$

Междуэлектродные емкости влияют главным образом на величину входной проводимости усилителя. Если в (14-24) подставим Y_{11} и Y_{12} из (14-59) и (14-60), получим

$$Y_{вх} = Y_{11} + K(j\omega)\,Y_{12} = j\omega\,\{C_{gk} + C_{ga}\,[1 - K(j\omega)]\}. \tag{14-63}$$

В зависимости от значения комплексного коэффициента усиления $K(j\omega)$ входная проводимость может иметь тот или иной характер и величину.

В частности, если сопротивление нагрузки чисто активно ($Z_н = R_н$) и если допустимо считать $Y_{21} \approx S$ и $Y_{22} \approx g_{22}$, то согласно (14-56)

$$K(j\omega) = -S_д R_н = -K,$$

где $K = S_д R_н$.

Тогда

$$Y_{вх} = j\omega\,[C_{gk} + (1 + K)\,C_{ga}], \tag{14-64}$$

т. е. в этом частном случае входная проводимость имеет реактивный (емкостный) характер и усилитель по отношению к источнику возбуждения ведет себя как емкость

$$C_{вх} = C_{g\,k} + (1 + K)\, C_{g\,a}. \qquad (14\text{-}65)$$

Вообще же при комплексном характере нагрузки $Y_н$ входная проводимость имеет также комплексный характер.

б) Транзисторный усилитель

В транзисторном усилителе управляемым элементом является полупроводниковый триод (транзистор). Так же, как и электронная лампа, транзистор включается в цепь тремя своими электродами: эмиттером, базой и коллектором. В соответствии с этим возможны три варианта включения транзистора в схему четырехполюсника: с общим эмиттером (рис. 14-22, *а*), с общей базой (рис. 14-22, *б*) и с общим коллектором (рис. 14-22, *в*). В дальнейшем изучении транзисторного усилителя мы ограничимся рассмотрением первой из этих схем. Имея в виду использование системы $Y(g)$-параметров, надо связать токи базы $i_б$ и коллектора $i_к$ с напряжениями $u_б$ и $u_к$. Эта связь устанавливается четырьмя семействами характеристик, из которых могут быть найдены дифференциальные («малосигнальные») параметры.

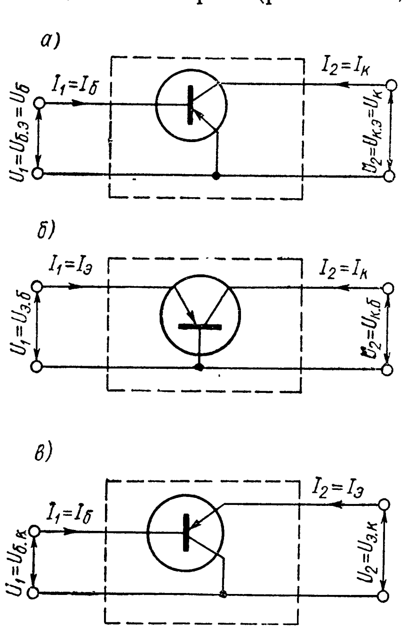


Рис. 14-22. Схемы включения транзистора.

1. Входными характеристиками являются кривые, выражающие зависимость $i_б = f(u_б)$ при $u_к = \text{const}$ (рис. 14-23, *а*).

Из этих характеристик находится дифференциальный параметр

$$g_{1\,1} = \frac{\Delta i_б}{\Delta u_б} \approx \frac{I_б}{U_б}. \qquad (14\text{-}66)$$

В отличие от лампового триода, для которого $g_{1\,1} \to 0$, входная проводимость транзистора имеет конечную величину. Действительно, транзистор представляет собой сочетание двух диодов, один из которых — эмиттерный — подключен к входу цепи, и напряжение к нему подводится в пропускном направлении.

Дырочная составляющая тока эмиттера в значительной мере отсасывается коллектором, так что значения токов коллектора $i_к$

и эмиттера $i_э$ близки друг к другу. В цепи же базы, т. е. на входе четырехполюсника, проходит ток $i_1 = i_б$, равный разности $i_э - i_к$.

Изменяя ток базы, мы управляем притоком дырок к коллекторному переходу, меняя тем самым величину коллекторного тока.

Таким образом, управление выходным током в транзисторе происходит путем изменения тока, а значит, его входная проводимость

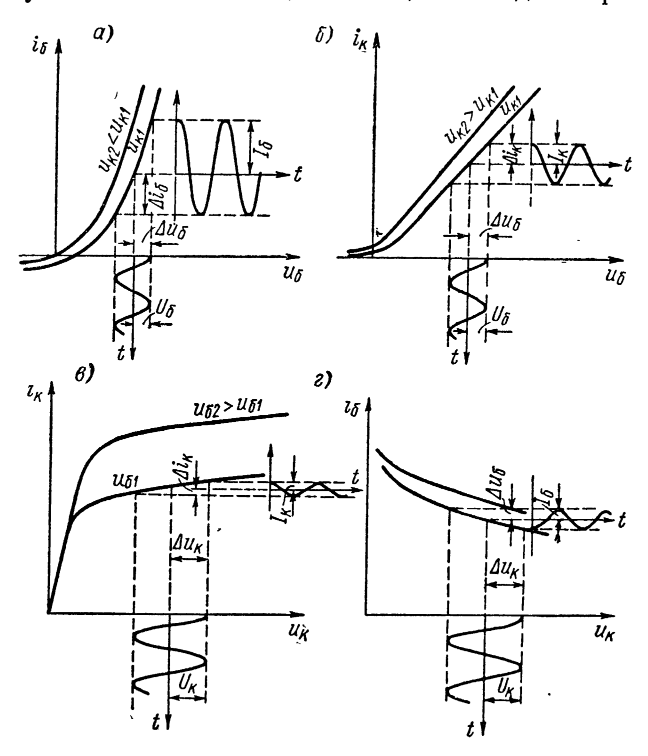


Рис. 14-23. Характеристики транзистора.

не равна нулю. В рассматриваемой схеме с общим эмиттером входная проводимость имеет величину порядка 1 *ма/в*, т. е. входное сопротивление $\sim$ 1000 *ом*.

Нетрудно понять, что в схеме с общей базой (рис. 14-22, *б*), где входным является ток эмиттера (значительно больший, чем базовый ток), входная проводимость $g_{1\,1}$ имеет значительно большую величину, чем в схеме с общим эмиттером.

2. Прямые проходные характеристики $i_к = f(u_б)$ при $u_к = \text{const}$ (рис. 14-23, *б*) связывают между собой выходной (коллекторный) ток и входное (базовое) напряжение.

Используя эти характеристики, находим дифференциальный параметр

$$g_{2\,1}=\frac{\Delta i_к}{\Delta u_б}\approx\frac{I_к}{U_б}\quad \text{при } u_к=\text{const}. \qquad (14\text{-}67)$$

Этот параметр играет ту же роль, что крутизна характеристики лампового триода. Поэтому иногда, применительно к транзистору, его также называют крутизной ($g_{2\,1}=S$).

3. Выходные характеристики $i_к=f(u_к)$ при $u_б=\text{const}$ (рис. 14-23, *в*) определяют связь между выходными (коллекторными) напряжением и током.

Из этих характеристик определяется дифференциальная выходная проводимость

$$g_{2\,2}=\frac{\Delta i_к}{\Delta u_к}\approx\frac{I_к}{U_к}\quad \text{при } u_б=\text{const}. \qquad (14\text{-}68)$$

Коллекторный диод, входящий в состав транзистора, питается напряжением непропускного (обратного) направления; ток коллектора обязан своим происхождением дырочной составляющей эмиттерного тока. Поэтому неудивительно, что на величину $i_к$ напряжение $u_к$ влияет мало, т. е. выходная проводимость $g_{2\,2}$ транзистора мала, и в этом смысле он подобен ламповому пентоду.

4. Обратные проходные характеристики $i_б=f(u_к)$ при $u_б=\text{const}$ определяют обратное воздействие выходного (коллекторного) напряжения на входной (базовый) ток.

Из характеристик $i_б=f(u_к)$ может быть найдена обратная проходная проводимость

$$g_{1\,2}=\frac{\Delta i_б}{\Delta u_к}\approx\frac{I_б}{U_к}\quad \text{при } u_б=\text{const}. \qquad (14\text{-}69)$$

Выше уже отмечалось, что напряжение коллектора мало сказывается на величине токов транзистора. Поэтому проводимость $g_{1\,2}$, будучи отрицательной, по абсолютной величине мала.

Ниже приведены средние числовые значения параметров плоскостных транзисторов.

Крутизна S, *ма/в*	От 30 до 100
Дифференциальная выходная проводимость $g_{2\,2}$, *ма/в*	От 0,005 до 0,02
Дифференциальное выходное сопротивление $1/g_{2\,2}$, *ком*	От 200 до 50
Дифференциальная входная проводимость $g_{1\,1}$, *ма/в*	От 0,5 до 2
Дифференциальное входное сопротивление $1/g_{1\,1}$ *ом*	От 2000 до 500
Обратная проходная проводимость $g_{1\,2}$, *ма/в*	От —0,001 до —0,01
Обратное проходное сопротивление $1/g_{1\,2}$, *ком*	От —1000 до —100

Если транзисторный усилитель нагружен на сопротивление $Z_н$, то упрощенная схема его (для переменных слагающих токов и напряжений) может быть представлена рис. 14-24.

Эквивалентная схема усилителя в предположении, что все параметры триода и нагрузки вещественны, имеет вид рис. 14-10. Однако, из приведенных выше данных следует, что для транзисторов, как правило,

$$|g_{12}| \ll |g_{21}|; \quad |g_{12}| \ll |g_{11}|; \quad |g_{12}| \ll |g_{22}|.$$

Рис. 14-24. Схема нагруженного транзисторного усилителя с общим эмиттером.

Поэтому с большой степенью точности можно не учитывать обратную реакцию выходной цепи на входную и тогда эквивалентная схема становится такой, как изображенная на рис. 14-25.

В соответствии с этой схемой:

коэффициент усиления напряжения [см. (14-37)]

$$K(j\omega) = -\frac{g_{21}}{g_{22} + g_{н}} = -\frac{S}{g_{22} + g_{н}} = -\frac{S}{g_{2н}}; \qquad (14\text{-}70)$$

коэффициент усиления тока [формула (14-41)]

$$K_i(j\omega) \approx \frac{g_{21} g_{н}}{g_{11} g_{2н}} = \frac{S g_{н}}{g_{11} g_{2н}}; \qquad (14\text{-}71)$$

коэффициент усиления мощности [см. (14-42)]

$$K_P = \frac{g_{н} g_{21}^2}{g_{11} g_{2н}^2} = \frac{S^2 g_{н}}{g_{11} g_{2н}^2}. \qquad (14\text{-}72)$$

В отличие от лампового усилителя, в транзисторном усилителе коэффициенты K_i и K_P не могут быть бесконечно большими.

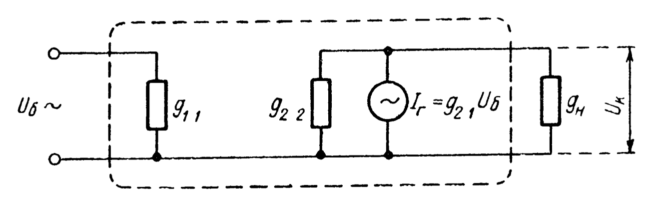


Рис. 14-25. Эквивалентная схема транзисторного усилителя.

Если выполняется условие $g_{22} \ll g_{н}$, то $g_{2н} \approx g_{н}$ и выражения (14-70), (14-71) и (14-72) приобретают вид:

$$K(j\omega) \approx -\frac{S}{g_{н}} = -\frac{g_{21}}{g_{н}} = -SR_{н}, \qquad (14\text{-}70а)$$

$$K_i(j\omega) \approx \frac{g_{21}}{g_{11}} = \frac{S}{g_{11}} = \alpha_{к.б}, \qquad (14\text{-}71а)$$

$$K_P = \frac{g_{21}^2}{g_{11} g_{н}} = \frac{S^2}{g_{11} g_{н}}, \qquad (14\text{-}72а)$$

где $\alpha_{к.б} = \frac{\Delta i_к}{\Delta i_б}$ — известный из теории транзисторов коэффициент усиления тока по цепи коллектор — база.

Согласование усилителя на выходе в схеме рис. 14-25 выполняется при условии $g_н = g_{2\,2}$. Тогда $g_{2н} = 2g_{2\,2}$ и для коэффициента усиления мощности получаем

$$K_{P макс} = \frac{g_{2\,1}^2}{4g_{1\,1}g_{2\,2}}. \qquad (14\text{-}73)$$

Если же, кроме того, усилитель согласован и на входе, то $g_{11} = \frac{1}{R_i}$, и мощность, выделяемая в нагрузке, достигает максимально возможной величины

$$P_{2макс} = \frac{g_{2\,1}^2}{32\,g_{2\,2}} E_с^2, \qquad (14\text{-}74)$$

где $E_с$ — э. д. с. источника сигнала.

На рис. 14-26 приведена схема реостатного транзисторного усилителя вместе с источниками питания. Особенностью питания

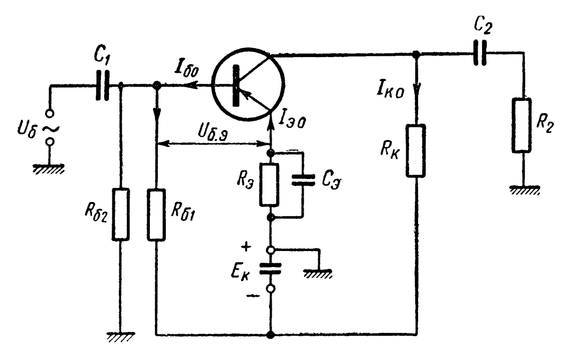


Рис. 14-26. Схема реостатного транзисторного усилителя.

транзистора является то, что как на коллектор, так и на базу должны быть поданы напряжения одного знака — отрицательные относительно эмиттера (в случае транзистора типа $p — n — p$). С этой целью можно использовать один источник постоянного напряжения $E_к$. На коллектор подается постоянное напряжение через сопротивление $R_к$ и последовательно с ним соединенное сопротивление $R_э \ll R_к$, так что постоянная слагающая коллекторного напряжения

$$U_{к0} = E_к - I_{к0}\,R_к - I_{э0}\,R_э \approx E_к - I_{к0}R_к, \qquad (14\text{-}75)$$

где $I_{к0}$ — постоянная составляющая коллекторного тока;

$I_{э0}$ — постоянная слагающая эмиттерного тока.

Пользуясь теоремой об эквивалентном генераторе, можно показать, что постоянное напряжение на базе

$$U_{б0} = E_{экв} - I_{б0} R_{iэкв} - I_{э0} R_{э}, \quad (14\text{-}76)$$

где

$$E_{экв} = E_{к} \frac{R_{б2}}{R_{б1} + R_{б2}}; \qquad R_{iэкв} = \frac{R_{б1} R_{б2}}{R_{б1} + R_{б2}}.$$

С помощью сопротивлений $R_{э}$, $R_{б1}$ и $R_{б2}$ осуществляется температурная стабилизация режима усилителя. Дело в том, что с изменением температуры происходит существенное изменение величины постоянного коллекторного тока, а также дифференциальных параметров транзистора.

Если начальный режим транзистора характеризуется точкой m (рис. 14-27), то с увеличением температуры характеристики смещаются (пунктирная кривая), исходная точка «сползает» и занимает положение m', что нежелательно, так как приводит к нелинейным искажениям.

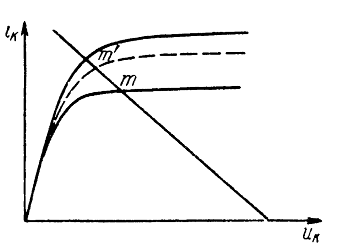


Рис. 14-27. Режим коллекторной цепи.

При наличии сопротивления $R_{э}$ с увеличением тока коллектора, а значит и эмиттерного тока $I_{э0}$, возрастает падение напряжения $I_{э0} R_{э}$ и согласно (14-76) напряжение $U_{б0}$ уменьшается, что способствует возвращению исходной точки в положение, близкое к m, т. е. стабилизации режима.

Если бы сопротивление $R_{э}$ не было шунтировано емкостью $C_{э}$, падение напряжения на нем создавалось бы не только постоянной, но и переменной слагающей коллекторного тока, что повлекло бы за собой уменьшение полезного напряжения сигнала между базой и эмиттером $U_{б.э}$.

Остальные детали схемы рис. 14-26 имеют то же назначение, что аналогичные элементы схемы лампового усилителя (см. рис. 14-17).

Параметры транзистора допустимо считать вещественными только при достаточно низких частотах. Уже на частотах порядка нескольких килогерц заметно проявляется комплексный характер дифференциальных проводимостей.

На процесс диффузии носителей через базу требуется известное время, что вызывает запаздывание по фазе тока коллектора относительно напряжения базы. Это можно трактовать как следствие индуктивного характера параметра Y_{21}.

Кроме того, на высоких частотах существенно сказывается емкость p-n переходов, в особенности емкость коллекторного p-n перехода.

Удовлетворительные результаты расчетов могут быть получены, если считать, что Y-параметры транзистора определяются эквивалентными схемами, изображенными на рис. 14-28.

В состав схемы проводимости Y_{11} (рис. 14-28, *а*) входит так называемое распределенное сопротивление базы $r_{б0}$, которое представляет собой сопротивление материала, из которого изготовлена база. В результате измерений получены следующие средние значения параметров схемы рис. 14-28:

$r_{б0} = 60 \div 250$ *ом*; $C_{11} = 5 \div 15 \cdot 10^3$ *пф*;

$C_{12} = 15 \div 35$ *пф*; $L_{21} = 10 \div 70$ *мкгн*; $C_{22} = 60 \div 200$ *пф*.

В соответствии со схемой рис. 14-28, *в* проходная прямая проводимость

$$Y_{21}=\frac{1}{\frac{1}{g_{21}}+j\omega L_{21}}. \qquad (14\text{-}77)$$

Как уже отмечалось, эквивалентная индуктивность L_{21} учитывает инерционность процесса диффузии дырок в базе. С возрастанием частоты модуль

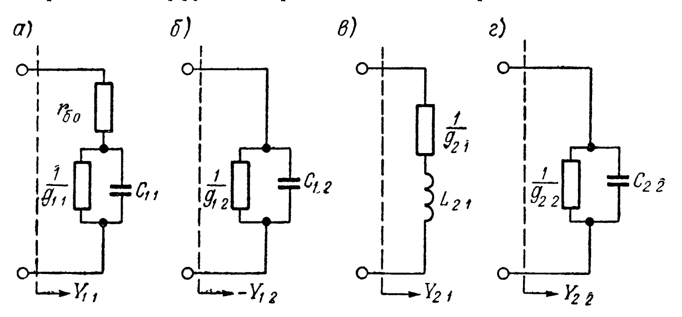


Рис. 14-28. Эквивалентные схемы для расчета Y-параметров.

y_{21} уменьшается и при некоторой (критической) частоте $f_к$ проводимость y_{21} становится настолько малой, что усилительные свойства схемы не могут быть реализованы.

Для разных типов плоскостных транзисторов величина $f_к$ колеблется в пределах 100—1000—100 000 *кгц*.

в) Частотные характеристики апериодических (реостатных) усилителей

Под частотной характеристикой усилителя обычно понимают зависимость от частоты комплексного коэффициента усиления напряжения: $K(j\omega)$.

Апериодическим называют такой усилитель, у которого частотная характеристика $K(\omega)$ сохраняет равномерность в широкой области частот, простирающейся от самых низких и до некоторой граничной частоты. Если считать внутренние параметры усилителя активными (частотнонезависимыми), то, как следует из (14-37), вид частотной характеристики $K(j\omega)$ определяется главным образом частотными свойствами нагрузки $Y_н(j\omega)$. Поэтому, желая осуществить апериодический усилитель, надо стремиться к тому, чтобы сопротивление нагрузки в минимальной степени зависело от частоты, т. е. использовать реостатный усилитель.

Сопоставление схем рис. 14-17 и 14-26 говорит о том, что как ламповый, так и транзисторный усилители на сопротивлении могут быть по выходной цепи представлены эквивалентной схемой, изображенной на рис. 14-29. В этой схеме $R = R_а$ (в случае лампового усилителя) или $R = R_к$ (в случае транзисторного усилителя).

Внешней нагрузкой усилителя является в общем случае комплексное сопротивление Z_2. Обычно это — входное сопротивление

следующего каскада усиления, которое в большинстве случаев может быть представлено параллельным соединением R_2, C_0, где R_2 и C_0 — входное сопротивление и емкость следующего каскада. В случае лампового усилителя $R_2 \gg R$, а для транзисторного усилителя часто $R_2 \ll R$.

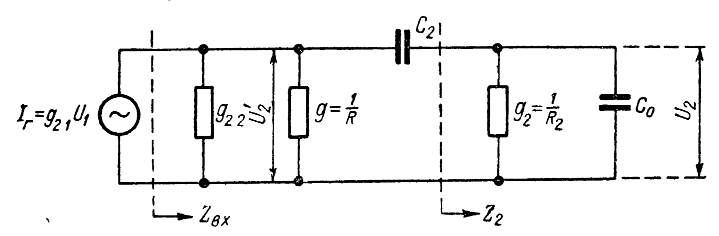


Рис. 14-29. Эквивалентная схема апериодического усилителя.

Усиленное напряжение U_2' подводится к потенциометру C_2, Z_2. Полезное напряжение U_2 снимается с части Z_2 потенциометра.

Найдем комплексный коэффициент усиления схемы рис. 14-29; имеем

$$K(j\omega)=\frac{U_2}{U_1}=\frac{U_2'}{U_1}\cdot\frac{U_2}{U_2'}=K'(j\omega)\frac{Z_2}{Z_2-j\frac{1}{\omega C_2}}. \qquad (14\text{-}78)$$

Здесь [см. 14-23)]

$$K'(j\omega)=\frac{U_2'}{U_1}=-\frac{g_{21}}{Y_{вх}}=-g_{21}Z_{вх}, \qquad (14\text{-}79)$$

где $Z_{вх}$ — входное сопротивление, на которое включен генератор тока $I_г$.

Емкость C_0 сказывается на высших частотах, когда $1/\omega_в C_0$ соизмеримо с R_2 или даже меньше, чем R_2. На низких и средних частотах $\frac{1}{\omega_н C_0} \gg R_2$ и тогда в схеме емкость C_0 можно вообще не учитывать.

Емкость C_2 играет существенную роль на низших частотах, когда $1/\omega_н C_2$ соизмеримо с R_2 или даже больше, чем R_2. На высших и средних частотах $\frac{1}{\omega_в C_2} \ll R_2$, и емкость C_2 в схеме можно не учитывать.

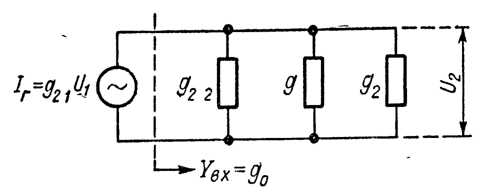


Рис. 14-30. Схема усилителя для средних частот.

Из сказанного следует, что для средних частот схема рис. 14-29 может быть заменена более простой схемой, изображенной на рис. 14-30, в которой емкости C_2 и C_0 отсутствуют.

Согласно этой схеме

$$Y_{вх}=g_0=g_{22}+g+g_2=\frac{1}{R_0}. \qquad (14\text{-}80)$$

Поэтому в соответствии с (14-79) для средних частот коэффициент усиления

$$K_0(j\omega) = -\frac{g_{21}}{g_0} = -g_{21}R_0, \quad (14\text{-}81)$$

т. е. $K_0(\omega) = g_{21}R_0$ и от частоты не зависит, как это показано на рис. 14-31 (область II).

Для области нижних частот сопротивление емкости C_2 оказывается недостаточно малым, и его приходится учитывать в схеме; однако C_0 из схемы можно исключить (рис. 14-32).

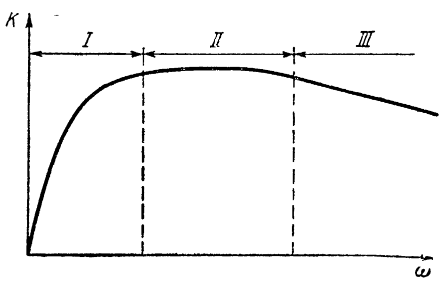


Рис. 14-31. Частотная характеристика апериодического усилителя.

Если обозначить

$$g_{22} + g = g_2' = \frac{1}{R_2'},$$

то в области нижних частот

$$Z_{вх.н} = \frac{R_2'\left(R_2 - j\frac{1}{\omega C_2}\right)}{R_2' + R_2 - j\frac{1}{\omega C_2}}$$

и

$$Z_{2н} = R_2.$$

Подставляя эти значения в (14-78), найдем

$$K_н(j\omega) = -g_{21}\frac{R_2'R_2}{R_2 + R_2' - j\frac{1}{\omega C_2}} = -g_{21}\frac{\frac{R_2'R_2}{R_2 + R_2'}}{1 - j\frac{1}{\omega C_2(R_2 + R_2')}}.$$

Так как

$$\frac{R_2'R_2}{R_2 + R_2'} = \frac{1}{g_2' + g_2} = \frac{1}{g_0} = R_0,$$

то

$$K_н(j\omega) = -g_{21}\frac{R_0}{1 - j\frac{1}{\omega C_2(R_2 + R_2')}} = \frac{K_0(j\omega)}{1 - j\frac{1}{\omega C_2(R_2 + R_2')}}. \quad (14\text{-}82)$$

Обозначив

$$C_2(R_2 + R_2') = \tau_2,$$

получим окончательно

$$K_н(j\omega) = \frac{K_0(j\omega)}{1 - j\frac{1}{\omega\tau_2}}. \quad (14\text{-}83)$$

Модуль коэффициента усиления в области нижних частот

$$K_н(\omega) = \frac{K_0(\omega)}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2\tau_2^2}}}. \quad (14\text{-}84)$$

По этой формуле рассчитан участок I частотной характеристики, показанной на рис. 14-31: с уменьшением частоты коэффициент усиления в этой области падает.

Выражение (14-83) можно представить в виде

$$K_{н}(j\omega) = K_{н}(\omega)\, e^{-j(\pi + \psi_{н})},$$

где $\psi_{н}$ находится из формулы

$$\operatorname{tg}\psi_{н} = -\frac{1}{\omega\tau_2}. \qquad (14\text{-}85)$$

В то время как в области средних частот сдвиг фаз между напряжениями на выходе и на входе равен π, при нижних частотах этот фазовый сдвиг отличается от π на угол $\psi_{н}$.

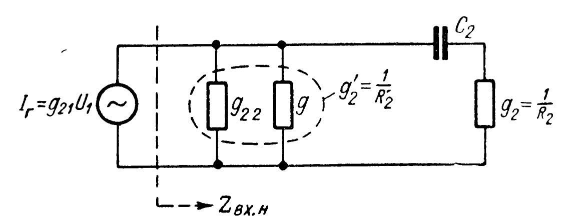


Рис. 14-32. Схема усилителя для нижних частот.

Переходя к области высших частот, отметим, что для этих частот в схеме должна быть оставлена емкость C_0, но может быть исключена емкость C_2 (рис. 14-33).

Для этой схемы

$$Y_{вх.в} = g_0 + j\omega C_0.$$

Коэффициент усиления

$$K_{в}(j\omega) = K'_{в}(j\omega) = -\frac{g_{21}}{g_0 + j\omega C_0}.$$

Имея в виду, что $K_0(j\omega) = -\frac{g_{21}}{g_0} = -g_{21}R_0$, получим

$$K_{в}(j\omega) = +\frac{K_0(j\omega)}{1 + j\omega C R_0}. \qquad (14\text{-}86)$$

Обозначив

$$CR_0 = \tau_0,$$

получим окончательно

$$K_{в}(j\omega) = \frac{K_0(j\omega)}{1 + j\omega\tau_0}. \qquad (14\text{-}87)$$

Модуль коэффициента усиления в диапазоне высших частот

$$K_{в}(\omega) = \frac{K_0(\omega)}{\sqrt{1 + \omega^2\tau_0^2}}. \qquad (14\text{-}88)$$

По формуле (14-88) рассчитан участок *III* частотной характеристики рис. 14-31. Как видно, с увеличением частоты коэффициент усиления в области высших частот падает.

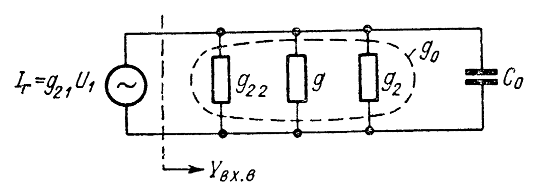


Рис. 14-33. Схема усилителя для высших частот.

Фазовый угол коэффициента передачи $K_в(j\omega)$ отличается от π на угол

$$\psi_в = \operatorname{arctg}[\omega\tau_0]. \quad (14\text{-}89)$$

Выражения (14-85) и (14-89) являются уравнениями фазово-частотной характеристики в области низших и высших частот.

Итак, реостатный усилитель подавляет как низшие частоты (вследствие влияния разделительной емкости C_2), так и высшие частоты (благодаря действию параллельной емкости C_0). Для уменьшения частотных искажений необходимо стремиться к увеличению постоянной времени τ_2 (в частности, к увеличению емкости C_2) и к уменьшению τ_0 (в частности, к уменьшению емкости C_0).

г) Нелинейные искажения в усилителях

Для управления энергией источника питания в усилителях используются нелинейные элементы. Поэтому, вообще говоря, неизбежны нелинейные искажения формы подведенного к усилителю сигнала.

Характер и степень нелинейных искажений, возникающих в усилителе, определяются видом входной характеристики $i_1 = f(u_1)$ и прямой проходной характеристики $i_2 = f(u_1)$.

Эквивалентную схему входной цепи усилителя можно представить в виде рис. 14-34. Эта схема учитывает нелинейный характер входной проводимости $g_{вх} \approx g_{11}$. Источник гармонической э. д. с. $e_с$ включен на последовательно соединенные внутреннее сопротивление источника R_i и нелинейное сопротивление $1/g_{11}$.

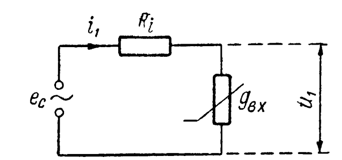


Рис. 14-34. Эквивалентная схема входной цепи усилителя.

Для нахождения формы напряжения u_1, действующего на входе усилителя, воспользуемся графическим построением, выполненным на рис. 14-35. На этом рисунке изображена входная характеристика нелинейного элемента $i_1 = f(u_1)$. В случае лампового триода это — зависимость $i_g = f(u_g)$. В начальный момент $e_с = E_с$. Из точки оси абсцисс $u_1 = E_с$ проведена прямая под углом $\alpha = \operatorname{arcctg} R_i$, пересечение которой с характеристикой определяет максимальное значение $U_{1макс}$ напряжения на входе усилителя. Также и для каждого

из последующих моментов, перемещая параллельно самой себе прямую, находим мгновенные значения напряжения u_1. Так как при $u_1 < 0$ ток i_1 отсутствует, то для отрицательных значений э. д. с. напряжение $u_1 = e_c$.

Таким образом, на входе усилителя действует напряжение, имеющее вид отштрихованной кривой рис. 14-35. Оно имеет форму, отличную от формы э. д. с. сигнала. При усилении этого напряжения, даже если нет искажений в остальных цепях усилителя, выходное напряжение окажется искаженным.

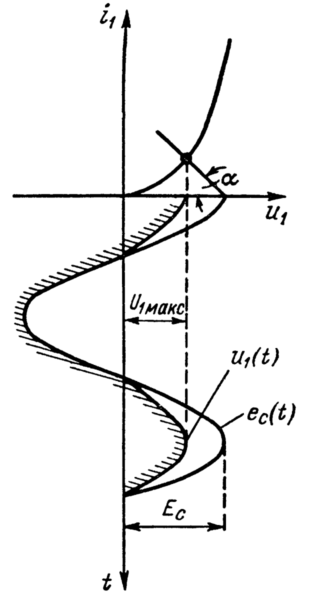


Рис. 14-35. Режим входной цепи усилителя.

Для борьбы с нелинейными искажениями во входной цепи желательно, чтобы в любой момент $i_1 = 0$; тогда $u_1 = e_c$. Такой режим принципиально возможен в ламповом усилителе (работа без сеточных токов) и невозможен в транзисторном усилителе.

Во всяком случае необходимо стремиться к тому, чтобы внутреннее сопротивление генератора было многим меньше входного сопротивления усилителя: $R_i \ll \frac{1}{g_{11}}$.

Обратимся теперь к выходной цепи усилителя (рис. 14-36). Если $g_{22} \ll g_н$, то ток на выходе

$$i_2 \approx i_г = g_{21} u_1,$$

где параметр $g_{21} = S$ сам является функцией напряжения u_1.

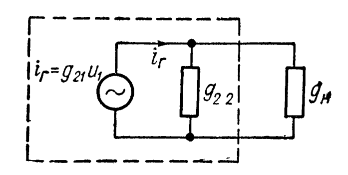


Рис. 14-36. Схема выходной цепи усилителя.

Поэтому форма выходного тока определяется видом проходной характеристики $i_2 = f(u_1)$ — рис. 14-37, совпадающей в случае лампового триода с характеристикой $i_a = f(u_g)$.

Из построения, выполненного на рис. 14-37, видно, что при воздействии гармонического напряжения u_1 ток i_2 имеет искаженную форму, т. е. в составе этого тока, кроме основной (первой) гармоники, появляются высшие гармонические слагающие, представляющие собой продукт нелинейности.

Степень искажений может быть количественно оценена величиной коэффициента нелинейных искажений, который на основании (10-19) в данном случае равен

$$k_f = \frac{\sqrt{I_{22}^2 + I_{23}^2 + I_{24}^2 + \dots}}{I_{21}}, \tag{14-90}$$

где I_{21} — амплитуда первой гармоники тока i_2;

I_{22}, I_{23}, ... амплитуды высших гармоник тока i_2.

Для уменьшения нелинейных искажений в выходной цепи необходимо, чтобы рабочая точка не выходила за пределы практически линейного участка *а-а* характеристики $i_2 = f(u_1)$.

Если нагрузочное сопротивление усилителя чисто активно, выходное напряжение имеет ту же форму, что ток i_2. Если же нагрузкой усилителя является частотно-избирательная система, выходное напряжение может быть очищено от продуктов нелинейности и иметь форму, близкую к синусоиде.

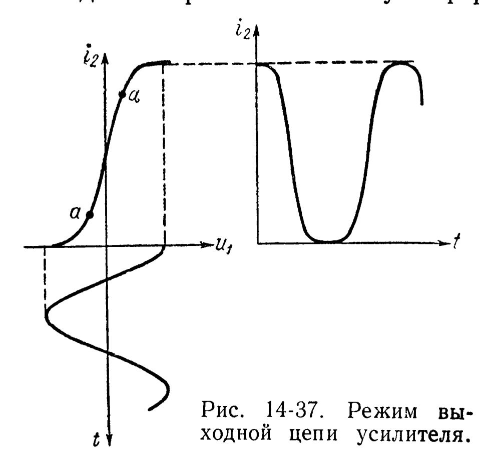


Рис. 14-37. Режим выходной цепи усилителя.

14-5. Частотно-избирательные усилители

Частотно-избирательным может быть назван такой усилитель, коэффициент усиления которого остается неизменным (или почти неизменным) в полосе частот от ω_1 до ω_2, причем ширина полосы $\Delta\omega_к = \omega_2 - \omega_1$ многим меньше средней частоты $\omega_{ср} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, т. е.

$$\Delta\omega_к \ll \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Для осуществления такой частотной характеристики необходимо, чтобы нагрузкой усилителя служила цепь, обладающая большим и по возможности неизменным входным сопротивлением в полосе частот $\omega_1 - \omega_2$ и весьма малым сопротивлением вне этой полосы. Этому требованию удовлетворяет параллельный колебательный контур.

Усилитель, нагрузкой которого является одиночный параллельный контур, называется резонансным. Если же в качестве нагрузки используется система связанных колебательных контуров, первый из которых включен в цепь как параллельный контур, усилитель называется полосовым.

а) Резонансный усилитель в линейном режиме

На рис. 14-38 изображена схема резонансного усилителя. В цепи сетки, кроме напряжения возбуждения $U_1 = U_g$, имеющего частоту ω, включен источник напряжения смещения E_g, которое выбрано

так, чтобы исходная точка располагалась на линейном участке проходной характеристики $i_a = f(u_g)$ (рис. 14-39). Амплитуда U_g настолько мала, что систему можно считать линейной. Кроме того, $|E_g| > U_g$, так что работа происходит без сеточных токов и, стало быть, искажения во входной цепи отсутствуют.

В анодной цепи лампы включен параллельный контур L, C, резонансная частота которого равна частоте воздействия ω или близка к ней. Через разделительную емкость C_2 усиленное напряжение подводится к сопротивлению нагрузки усилителя R_2.

Эквивалентная схема усилителя представлена на рис. 14-40. На этой схеме $g = \frac{1}{R}$ — проводимость, эквивалентная потерям в контуре. Для рабочих частот усилителя сопротивление разделительной емкости C_2 может быть сделано настолько малым $\left(\frac{1}{\omega_0 C_2} \ll R_2\right)$, что в эквивалентной схеме им можно пренебречь. Емкость C_0 нагрузки усилителя, включенная параллельно контуру, учтена в величине емкости контура C.

Если обозначить

$$g_0 = g_{22} + g + g_2, \tag{14-91}$$

то входная проводимость цепи, подключенной к генератору тока $I_г$, на основании (4-66) может быть представлена в виде

$$Y' = g_0 [1 + j\xi_{э.н}]. \tag{14-92}$$

Здесь обобщенная расстройка

$$\xi_{э.н} \approx 2Q_{э.н} \frac{\Delta\omega}{\omega_0}.$$

Под $Q_{э.н}$ следует понимать эквивалентную добротность колебательной цепи, питаемой генератором тока $I_г$. При определении $Q_{э.н}$ надо учитывать не только потери в контуре (проводимость g), но и проводимости $g_{22} = \frac{1}{R_i}$ и $g_2 = \frac{1}{R_2}$. Согласно (4-24) и (4-81)

$$Q_{э.н} = \frac{1}{g_0 \rho} = \frac{1}{(g_{22} + g + g_2)\rho}. \tag{14-93}$$

Коэффициент усиления напряжения

$$K(j\omega) = -\frac{g_{21}}{Y'}.$$

Подставив сюда (14-92) и имея в виду, что $g_{21} = S$, получим

$$K(j\omega) = -\frac{S}{g_0(1 + j\xi_{э.н})}. \tag{14-94}$$

При резонансной частоте ($\xi_{э.н} = 0$)

$$K_р(j\omega) = -\frac{S}{g_0} = -SQ_{э.н}\rho. \tag{14-95}$$

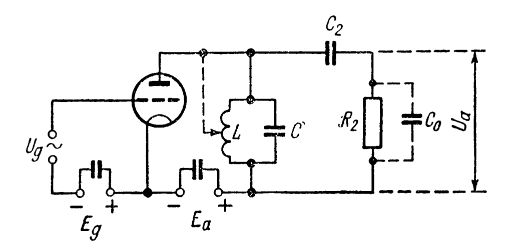


Рис. 14-38. Схема резонансного усилителя.

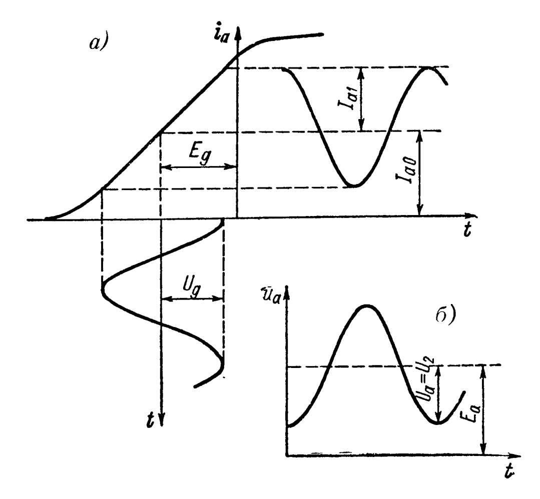


Рис. 14-39. Линейный режим резонансного усилителя.

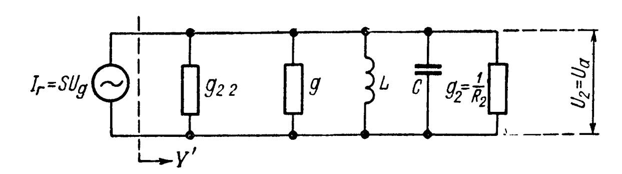


Рис. 14-40. Эквивалентная схема резонансного усилителя.

Модуль коэффициента усиления при частоте, отличной от резонанса,

$$K(\omega) = \frac{S}{g_0 \sqrt{1 + \xi^2_{э.н}}} = \frac{K_р(\omega)}{\sqrt{1 + \xi^2_{э.н}}}. \qquad (14\text{-}96)$$

Из этих выражений видно, что для получения большого коэффициента усиления напряжения при заданной крутизне S необходимо стремиться к возможно большей эквивалентной добротности $Q_{э.н}$ и большему характеристическому сопротивлению контура ρ. Так как $Q_{э.н}$ зависит не только от свойств самого контура, но и от параметров лампы и нагрузки, то, во-первых, желательно применение лампы с возможно большим внутренним сопротивлением (в частности, не триода, а пентода) и, во-вторых, необходимо, чтобы сопротивление нагрузочной цепи было велико.

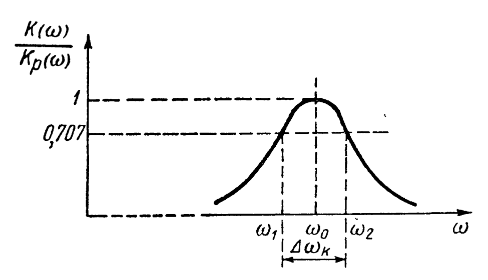


Рис. 14-41. Частотная характеристика резонансного усилителя.

При отклонении частоты воздействия от резонансной частоты контура коэффициент усиления в соответствии с (14-96) падает и частотная характеристика усилителя приобретает вид рис. 14-41. Относительная полоса пропускания

$$\frac{\Delta\omega_к}{\omega_0} = \frac{1}{Q_{э.н}}.$$

Таким образом, и с точки зрения избирательности системы необходимо стремиться к возможно большей величине $Q_{э.н}$, т. е. к высокой собственной добротности контура $Q = \frac{R}{\rho}$ и к большим величинам R_i и R_2.

Полученные соотношения справедливы также и для транзисторного резонансного усилителя. Только надо иметь в виду, что в этом случае R_2 (входное сопротивление следующего каскада) невелико; кроме того «внутреннее сопротивление» $1/g_{22}$ транзистора также может оказаться относительно малым. Поэтому включение этих сопротивлений непосредственно параллельно колебательному контуру привело бы к значительному снижению эквивалентной добротности $Q_{э.н}$.

Предпочтительна схема, изображенная на рис. 14-42. Здесь использован контур II вида; благодаря этому проводимость g_{22} оказывается включенной параллельно части контура и оказывает на него меньшее шунтирующее действие, чем в случае полного вклю-

чения контура. Нагрузочная цепь связана с колебательным контуром индуктивно, что также способствует уменьшению влияния нагрузки на добротность системы.

Интересуясь главным образом коэффициентом усиления напряжения резонансного усилителя, мы тем самым имеем в виду применение его в качестве у с и л и т е л я   н а п р я ж е н и я. Однако часто ставится задача получения в колебательном контуре усилителя возможно большей мощности, т. е. использования его как у с и л и т е л я   м о щ н о с т и. В этих случаях усилитель более уместно называть г е н е р а т о р о м   с   п о с т о р о н н и м   в о з б у ж д е н и е м.

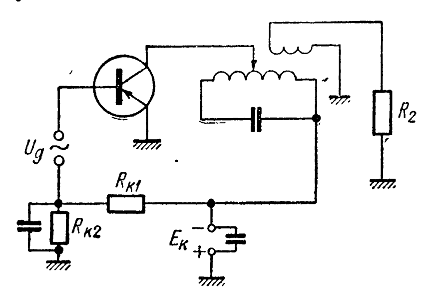


Рис. 14-42. Схема транзисторного резонансного усилителя.

При выборе и расчете режима работы усилителя мощности большую роль играют вопросы согласования и обеспечения высокого коэффициента полезного действия.

Для согласования нагрузки с внутренним сопротивлением лампы удобно применить контур II вида (пунктир на рис. 14-38). Изменяя коэффициент включения p, добиваются оптимального значения сопротивления нагрузки усилителя.

Коэффициент полезного действия усилителя

$$\eta = \frac{P}{P_0}.$$

Здесь полезная мощность P, выделяемая в контуре, при условии настройки его в резонанс

$$P = \frac{1}{2} I_{a1} U_a. \qquad (14\text{-}97)$$

Для определения мощности P_0, подводимой к усилителю от источника E_a, надо рассчитать среднее за период значение произведения $E_a i_a$, т. е.

$$P_0 = \frac{1}{T}\int_0^T E_a i_a\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T E_a (I_{a0} + I_{a1}\cos\omega t)\,dt = I_{a0}E_a \qquad (14\text{-}98)$$

и к. п. д.

$$\eta = \frac{1}{2}\cdot\frac{I_{a1}}{I_{a0}}\cdot\frac{U_a}{E_a}. \qquad (14\text{-}99)$$

Отношение I_{a1}/I_{a0}, как видно из рис. 14-39, *а*, при работе в линейном режиме не может превосходить единицу: $\frac{I_{a1}}{I_{a0}} \leqslant 1$.

Что касается отношения U_a/E_a, то надо иметь в виду, что для постоянного тока сопротивление контура можно считать равным нулю и мгновенное напряжение на аноде

$$u_a = E_a - U_a \cos \omega t, \qquad (14\text{-}100)$$

что иллюстрируется графиком рис. 14-39, *б*. Как видно, $\frac{U_a}{E_a} \leqslant 1$.

Таким образом, в линейном режиме работы усилителя к. п. д. не может превышать 50% ($\eta \leqslant 0{,}5$).

В лучшем случае лишь половина расходуемой источником питания мощности обращается в полезную (колебательную) мощность. Остальная часть ее

$$P_a = P_0 - P = \frac{1-\eta}{\eta} P \qquad (14\text{-}101)$$

бесполезно расходуется на аноде лампы, превращаясь в тепло.

Столь низкий к. п. д. может быть допущен только в самых маломощных устройствах. При сколько-нибудь значительной мощности усилителя (генератора с посторонним возбуждением) такая неэкономичная работа его недопустима, и надо изыскивать средства к повышению к. п. д. устройства.

б) Резонансный усилитель в нелинейном режиме

Очень важным и эффективным средством улучшения энергетических показателей резонансного усилителя является использование заведомо нелинейного режима его работы.

Выберем настолько большое по абсолютной величине отрицательное смещение на сетке лампы (рис. 14-43), чтобы анодный ток представлял собой кратковременные импульсы, разделенные паузами. Принимая кусочно-линейную аппроксимацию характеристики, придем к выводу, что эти импульсы являются отрезками «отсеченной» косинусоиды с углом отсечки θ. [1]

Анодный ток содержит множество гармонических составляющих. Однако контур настроен на частоту первой гармоники и только для этой гармоники представляет большое, чисто активное сопротивление $R_э$. Поэтому только ток первой гармоники создает большое падение напряжения на контуре $U = I_{a1}R_э$; остальные составляющие напряжения при условии достаточно высокой добротности контура пренебрежимо малы. Так как напряжение на контуре можно полагать гармоническим, мгновенное напряжение на аноде будет выражаться так же, как в линейном режиме [см. (14-100)],

$$u_a = E_a - U \cos \omega t = E_a - I_{a1} R_э \cos \omega t$$

---

[1] Предполагается, что на рис. 14-43 представлена спрямленная динамическая характеристика лампы, т. е. зависимость $i_a = f(u_g)$ при включенном в анодной цепи сопротивлении $R_э$. При $R_э \ll R_i$ динамическая характеристика мало отличается от статической.

и изображаться тем же графиком рис. 14-39, *б*. Амплитуда тока первой гармоники согласно (10-69)

$$I_{a1} = \alpha_1 I_{\text{макс}},$$

где α_1 — коэффициент первой гармоники, являющийся функцией угла отсечки.

Постоянная слагающая тока в соответствии с (10-68)

$$I_{a0} = \alpha_0 I_{\text{макс}},$$

где α_0 — коэффициент постоянной слагающей, также являющийся функцией угла отсечки.

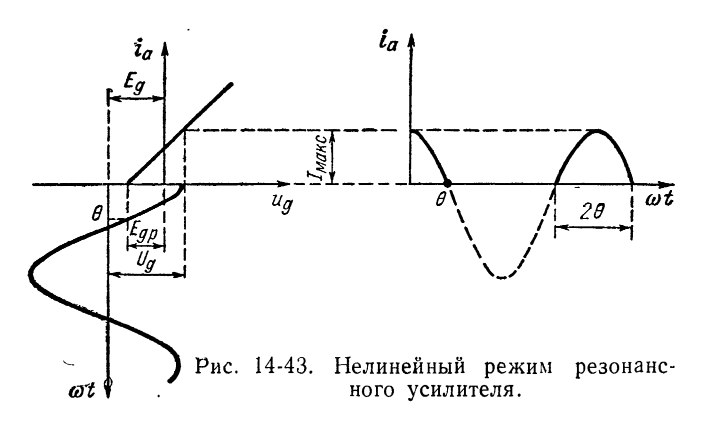


Рис. 14-43. Нелинейный режим резонансного усилителя.

Поскольку мощность в контуре выделяется практически только током первой гармоники, общее выражение для к. п. д. остается тем же, что и в линейном режиме [см. (14-99)].

Однако численные значения к. п. д. могут быть теперь получены значительно бо́льшие. Действительно, заменяя I_{a1}/I_{a0} отношением α_1/α_0, получим

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \cdot \frac{U_a}{E} \qquad (14\text{-}102)$$

и, приняв, например, $\theta = 90°$, найдем $\alpha_1 = 0{,}5$ и $\alpha_0 = \frac{1}{\pi}$ (см. рис. 10-26).

Полагая $\frac{U_a}{E_a} \approx 1$, получим, что

$$\eta_{\theta=90°} = \frac{\pi}{4} = 0{,}785.$$

Если угол отсечки $\theta = 60°$, то $\alpha_1 = 0{,}391$; $\alpha_0 = 0{,}218$ и к. п. д. при $\frac{U}{E_a} \approx 1$ будет $\eta = 0{,}9$.

Вообще с уменьшением угла отсечки к. п. д. возрастает. Причину этого явления нетрудно понять. Мгновенная мощность, теряемая на аноде лампы,

$$p_a = i_a u_a.$$

Среднее ее значение

$$P_a = \frac{1}{T} \int_0^T i_a u_a \, dt. \qquad (14\text{-}103)$$

С уменьшением угла отсечки, т. е. с увеличением длительности паузы между импульсами, средняя теряемая мощность уменьшается. Правда, одновременно уменьшается и полезная мощность. Об этом свидетельствует график рис. 10-26: с уменьшением θ коэффициент α_1, определяющий полезную (основную) составляющую анодного тока, уменьшается. Но теряемая мощность убывает быстрее, и в результате к. п. д. растет.

При $\theta \to 0$ коэффициент полезного действия $\eta \to 1$, но сама полезная мощность стремится к нулю. Поэтому обычно работают с углами отсечки, лежащими в пределах $\sim$ 30—90°, и тогда получают к. п. д. $\sim$ 0,95—0,75.

Та или иная величина угла отсечки обеспечивается соответствующим выбором режима цепи сетки.

Применяя к нашему случаю формулу (10-63), получим

$$\cos\theta = -\frac{E_g - E_{gP}}{U_g}. \qquad (14\text{-}104)$$

Отсюда видно, что для получения малых углов отсечки надо иметь достаточно большое по абсолютной величине смещение E_g. Одновременно приходится увеличивать и U_g, чтобы ток $I_{\text{макс}}$ (см. рис. 14-43) имел заданную величину. Необходимость больших значений $|E_g|$ и U_g является существенным недостатком работы с малыми углами отсечки.

Итак, для улучшения энергетических показателей генератора преднамеренно используют нелинейное преобразование формы колебаний. Фильтр (колебательный контур), включенный на выходе системы, дает возможность почти полностью освободиться от возникающих в цепи колебаний высших гармоник.

14-6. Умножение частоты в нелинейных цепях

В резонансном усилителе, работающем в нелинейном режиме, из множества гармоник, составляющих анодный ток, полезной является первая (основная). На частоту первой гармоники и настраивается колебательный контур.

Можно, однако, возникающие в системе колебания новых частот использовать для преобразования частоты подводимого сигнала

ω в k раз большую частоту $k\omega$, где k — целое число, превышающее единицу. Для этого, во-первых, в составе тока должна быть достаточно ярко выражена k-я гармоника и, во-вторых, колебательный контур должен быть настроен на частоту этой гармоники. Тогда для всех частот, кроме частоты $k\omega$, контур будет представлять ничтожно малое сопротивление. Практически напряжение на контуре будет содержать колебания одной частоты $k\omega$.

В процессе умножения частоты продукт нелинейности играет полезную роль. Этот процесс, конечно, не требует обязательного применения электронной лампы; в умножителе частоты, обобщенная схема которого изображена на рис. 14-44, возможно применение и других видов нелинейных элементов.

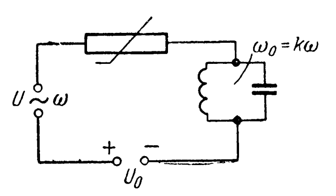


Рис. 14-44. Умножитель частоты.

Какими же свойствами должно обладать нелинейное сопротивление, которое следует применить в цепи для эффективного умножения частоты в заданное число k раз?

Для ответа на этот вопрос выразим аналитически вольт-амперную характеристику нелинейного сопротивления, воспользовавшись аппроксимацией степенным многочленом.

Будем считать, что в цепи действует только переменное напряжение частоты ω, а напряжение смещения $U_0 = 0$. Такой режим будем называть симметричным возбуждением нелинейной цепи.

Для анализа режима симметричного возбуждения аппроксимирующий полином удобно представить в форме (10-10), т. е. в виде разложения в ряд в окрестности начала координат:

$$i = b_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k u^k. \qquad (14\text{-}105)$$

Полагая $u = U\cos\omega t$, в соответствии с данными табл. 10-3 придем к следующим выражениям для амплитуд высших гармоник тока:

$$\left.\begin{aligned} I_2 &= \frac{b_2}{2}U^2 + \frac{b_4}{2}U^4 + \ldots, \\ I_3 &= \frac{b_3}{4}U^3 + \frac{5}{16}b_5U^5 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (14\text{-}106)$$

Амплитуды нечетных ($k = 2m + 1$) гармоник тока определяются всеми «нечетными членами» ряда, начиная с $(2m + 1)$ -го члена. Аналогично амплитуды четных ($k = 2m$) гармоник зависят от всех «четных членов» ряда, начиная с $2m$-го члена.

Иначе можно сказать так: если характеристика представляет собой нечетную функцию (полином содержит только члены нечетных степеней), то при симметричном возбуждении ($U_0 = 0$) в цепи образуются только нечетные гармоники, что иллюстрируется рис. 14-45 (кривые *а*), где показан режим симметричного возбуждения нелинейного элемента, характеристика которого выражается кубической параболой $i = b_3 u^3$; в состав тока $i\ (t)$ входят только основная частота и третья гармоника. Если же характеристика является четной функцией (уравнение ее содержит только члены четных степеней), то при $U_0 = 0$ ток содержит лишь четные гармоники. Так, например, в случае характеристики $i = b_2 u^2$ (рис. 14-46, *а*) ток содержит постоянную слагающую и составляющую удвоенной частоты.

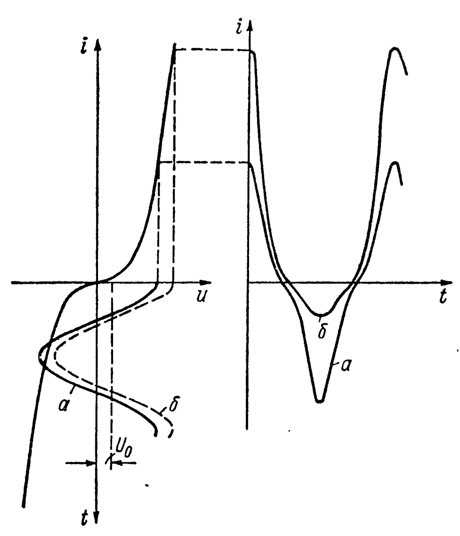


Рис. 14-45. Режим нелинейного элемента с кубической характеристикой.

Если уравнение характеристики, кроме членов четных степеней, содержит слагаемое первой степени (рис. 14-46, *б*), в составе тока имеются постоянная слагающая, основная частота и четные гармоники.

Все сказанное относится, как было отмечено, к работе элемента при симметричном возбуждении. Наличие постоянного смещения существенно изменяет положение. Например, нелинейный элемент, который в отсутствие смещения образует только нечетные гармоники тока, при наличии смещения является уже источником не только нечетных, но также и четных гармоник.

Используя данные табл. 10-6, получим следующие выражения для амплитуд высших гармоник тока при наличии смещения U_0:

$$\left.\begin{aligned} I_2 &= \frac{b_2}{2}U^2 + \frac{3}{2}b_3U^2U_0 + \frac{b_4}{2}U^4 + 3b_4U^2U_0 + \ldots, \\ I_3 &= \frac{b_3}{4}U^3 + b_4U^3U_0 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (14\text{-}107)$$

Эти формулы показывают, что в режиме несимметричного возбуждения амплитуды высших гармоник определяются как «четными», так и «нечетными» коэффициентами ряда.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим режим в цепи нелинейного элемента с нечетной характеристикой $i = b_3u^3$ при наличии смещения U_0 (кривые *б* на рис. 14-45). Как видно, форма тока оказывается иной, чем при симметричном возбуждении (рис. 14-45, *а*). В составе тока оказывается не только нечетная (третья) гармоника, но и четная (вторая) гармоника, а также постоянная слагающая и составляющая основной частоты.

Таким образом, возможная степень кратности умножения k определяется не только формой характеристики элемента, но и режимом возбуждения.

Произведенный анализ позволяет сделать некоторые важные выводы.

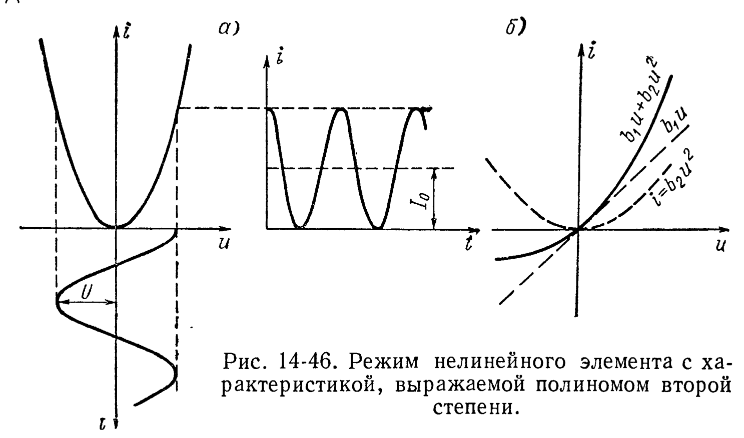


Рис. 14-46. Режим нелинейного элемента с характеристикой, выражаемой полиномом второй степени.

1. Для умножения частоты необходим режим больших колебаний, так как при малой амплитуде возбуждения U система оказывается в режиме, близком к линейному.

2. При использовании симметричного возбуждения умножение частоты в k раз требует наличия в уравнении характеристики члена k-й степени или членов степеней: $k + 2$, $k + 4$, ...

3. Члены степеней $k + 2$, $k + 4$, ... могут как увеличивать амплитуду полезной k-й гармоники, так и уменьшать ее. Это, как видно из (14-106), зависит от знака коэффициентов b_{k+2}, b_{k+4}, ... Желателен такой вид нелинейности, при котором все эти коэффициенты имеют одинаковый знак.

4. С увеличением кратности умножения амплитуды соответствующих составляющих уменьшаются, так как с увеличением k коэффициенты рядов в (14-106) уменьшаются. Поэтому умножение частоты кратности выше $k = 2$—3 на практике применяется редко.

5. Если характеристика элемента задана и в ее уравнении слагаемые, полезные для целей умножения частоты, отсутствуют или выражены недостаточно ясно, может быть применен р е ж и м н е с и м м е т р и ч н о г о в о з б у ж д е н и я. Надлежащая регу-

лировка смещения исходной точки дает возможность осуществить требуемый вид нелинейности.

Во многих случаях оказывается целесообразным воспользоваться для расчетов кусочно-линейной аппроксимацией характеристики. При таком представлении характеристики ее форма является заданной и в соответствии с п. 5 полученных выше выводов изменение и подбор надлежащего вида нелинейности должен производиться подбором смещения, т. е. соответствующим выбором угла отсечки θ.

Из графиков рис. 10-26 видно, что нормированный ток α_k каждой из высших гармоник достигает наибольшего значения при определенном (оптимальном) угле отсечки θ.

Оптимальный угол отсечки может быть определен из следующей простой формулы:

$$\theta_k = \frac{120}{k} [\textit{град}]. \qquad (14\text{-}108)$$

Так, для удвоения частоты желателен режим с углом $\theta = 60°$; для утроения частоты $\theta = 40°$ и т. д. Чем выше степень умножения, тем меньший требуется угол отсечки.

Высказанные соображения о недостатках использования высокой кратности умножения, конечно, подтверждаются и анализом, основанным на кусочно-линейной аппроксимации характеристики.

Получение большого значения k требует работы с очень малыми углами отсечки. Из тех же графиков рис. 10-26 видно, что при малых θ даже наибольшие значения $\alpha_k = \frac{I_k}{I_{\text{макс}}}$ малы и поэтому, при данном максимальном значении тока $I_{\text{макс}}$, интенсивность соответствующей гармоники мала. Кроме того, как уже говорилось в § 14-5, из (14-104) следует, что для получения малых углов отсечки требуются весьма большое значение напряжения возбуждения U_g и абсолютной величины напряжения смещения $|E_g|$.

Надо все же отметить, что в тех случаях, когда энергетические соображения не играют существенной роли, работа с очень малым углом отсечки может представлять значительный интерес.

Обратимся к выражению нормированной амплитуды k-й гармоники [см. (10-70)]. Для очень малых углов отсечки можно приближенно принять:

$$\sin k\theta \approx k\theta - \frac{k^3\theta^3}{6}, \quad \cos k\theta \approx 1 - \frac{k^2\theta^2}{2}.$$

Подставляя эти выражения в (10-70), после несложных преобразований получим

$$\alpha_k \approx \frac{4}{3\pi}\,\theta = 0{,}0074\theta°. \qquad (14\text{-}109)$$

Этот интересный результат свидетельствует о том, что при малых углах отсечки (малой длительности импульсов $t_и$) все гармоники (независимо от их номера k) имеют почти одинаковые амплитуды, величины которых пропорциональны θ (рис. 14-47, *а*).

Спектральную диаграмму периодической последовательности рассматриваемых импульсов можно поэтому приближенно представить в виде графика рис. 14-47, *б*, на котором амплитуды всех гармоник показаны имеющими одинаковую величину

$$I_k = \frac{4}{3\pi}\theta I_{\text{макс}} = \frac{2}{3\pi}\omega t_{\text{и}} I_{\text{макс}}, \tag{14-110}$$

где ω — основная частота (частота следования импульсов).

Отсюда следует, что спектральная функция очень коротких усеченных косинусоидальных импульсов выражается как

$$F(j\omega) = \frac{I_k \pi}{\omega} \approx \frac{2}{3} t_{\text{и}} I_{\text{макс}}, \tag{14-111}$$

т. е. является почти постоянной, не зависящей от частоты, величиной.

В связи с этим уместно вспомнить рассмотренный в § 7-4 спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов. Тогда мы пришли к аналогичному выводу, что если продолжительность импульсов мала по сравнению с периодом их следования, то амплитуды гармонических составляющих почти не зависят от частоты.

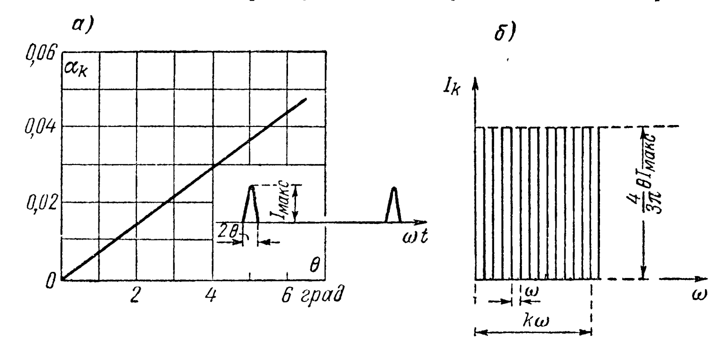


Рис. 14-47. Спектральный состав кратковременных косинусоидальных импульсов.

При работе очень кратковременными импульсами ($\theta \to 0$) оказывается возможным выделение любой из гармоник почти одинаковой интенсивности, что находит практическое применение в специальной (в том числе измерительной) аппаратуре. Не следует только забывать, что амплитуда каждой из гармонических составляющих весьма мала по сравнению с максимальным значением тока. Так, например, при $\theta = 1°$ коэффициент $\alpha_k = \dfrac{I_k}{I_{\text{макс}}} = 0{,}0074$.

14-7. Выпрямление

Выпрямлением называется процесс преобразования переменного (в частности, гармонического) напряжения в напряжение постоянное. Выпрямление является типично нелинейным преобразованием, в результате которого, кроме полезного продукта нелинейности — постоянной слагающей ($\omega = 0$) — образуется много ненужных колебаний; они должны быть подавлены линейной фильтрующей цепью.

Необходимость выпрямления сигналов возникает, например, в том случае, когда сигнал по своей форме представляет собой «отрезки синусоид», т. е. радиоимпульсы с прямоугольной огибающей (рис. 14-48, *а*). Для приведения в действие исполнительного механизма (реле) они должны быть преобразованы в посылки постоянного напряжения (рис. 14-48, *б*).

Введем в рассмотрение зависимость между выпрямленным напряжением U_0 и амплитудой выпрямляемого напряжения U:

$$U_0 = f(U), \qquad (14\text{-}112)$$

которую будем называть **характеристикой выпрямления**.

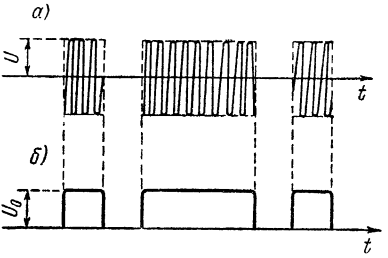


Рис. 14-48. Радиоимпульсы (*а*) и соответствующие им посылки постоянного напряжения (*б*).

Для пропорционального преобразования радиоимпульсов в посылки постоянного напряжения *характеристика выпрямления* $U_0 = f(U)$ *должна быть прямой линией*. В этом смысле можно говорить о «линейном» выпрямлении, хотя следует ясно представлять себе, что слово «линейное» относится здесь отнюдь не к существу процессов в системе, а к виду зависимости продукта нелинейности от амплитуды гармонического воздействия.

В цепи, питаемой переменным напряжением, ток может иметь постоянное направление, если в этой цепи действует автоматический

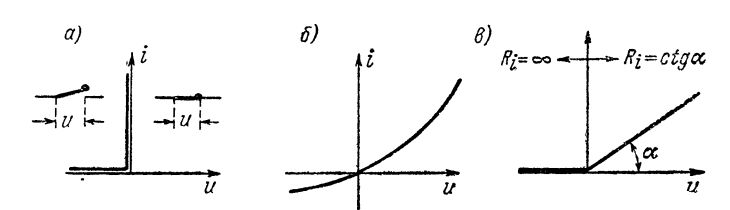


Рис. 14-49. Характеристики вентилей.

«ключ» (вентиль), контакты которого замыкаются накоротко при одной полярности напряжения и выключаются при обратной полярности. Этот вентиль можно рассматривать как нелинейное сопротивление, имеющее вольт-амперную характеристику вида рис. 14-49, *а*. Однако элемент, обладающий такой характеристикой, физически осуществить невозможно. Действительные электрические вентили — двухэлектродная лампа, полупроводниковый диод — имеют характеристики, подобные рис. 14-49, *б*. Идеализируя эти характеристики, можно приближенно заменить их кусочно-ломаной кривой (рис. 14-49, *в*).

Воображаемый вентиль, имеющий вольт-амперную характеристику вида рис. 14-49, *в*, уравнение которой

$$\left.\begin{aligned} i = \frac{u}{R_i} = Su \quad \text{при} \quad u \geqslant 0 \; \left(R_i = \frac{1}{S} = \text{const}\right); \\ i = 0 \quad \text{при} \quad u < 0 \end{aligned}\right\} \qquad (14\text{-}113)$$

будем называть идеальным вентилем.

Рассмотрим схему (рис. 14-50), в которой источник переменного напряжения $u = U \cos \omega t$ подключен через идеальный вентиль к сопротивлению R, шунтированному емкостью C. Ток i через вентиль может проходить только в одном направлении, указанном на схеме, и лишь в те моменты, когда напряжение на вентиле (диоде) $u_d > 0$.

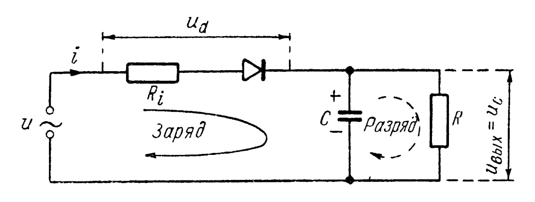


Рис. 14-50. Выпрямитель, работающий на нагрузку с емкостной реакцией.

Не будем рассматривать те переходные процессы, которые возникают в системе в момент включения источника питания. Ограничимся изучением стационарного режима цепи, представляющего собой периодическое повторение двух процессов: заряда и разряда емкости C.

Заряд емкости происходит через вентиль, и зарядный ток i может иметь лишь одно направление, совпадающее с пропускным направлением вентиля (сплошная линия на рис. 14-50). Напряжение на емкости $u_C = u_{вых}$ имеет полярность, отмеченную на схеме, т. е. по отношению к вентилю оно отрицательно. Поэтому разность потенциалов на зажимах вентиля

$$u_d = u - u_C$$

и, значит,

$$\left.\begin{aligned} \text{при} \quad u - u_C \geqslant 0 \quad \text{ток} \quad i \geqslant 0, \\ \text{при} \quad u - u_C < 0 \quad \text{ток} \quad i = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (14\text{-}114)$$

Разряд емкости происходит только через сопротивление R (пунктирная линия на рис. 14-50), так как через вентиль ток не может проходить в непропускном направлении (для разрядного тока вентиль разомкнут).

На рис. 14-51 показаны временны́е диаграммы напряжений и токов в цепях выпрямителя. В соответствии с (14-114) заряд емкости происходит в те моменты, от $t = -t_1$ до $t = t_2$, когда питающее напряжение u превосходит напряжение на емкости. В эти моменты через источник и вентиль проходит зарядный ток i и напря-

жение на емкости u_C возрастает. В момент $t = t_2$ наступает равенство $u = u_C$, т. е. u_d становится равным нулю; ток через вентиль прекращается и начинается свободный разряд емкости через сопротивление R (так как $u < u_C$) вплоть до того момента, пока вновь наступает равенство $u = u_C$.

Для того чтобы судить о форме временны́х диаграмм, обратимся к рассмотрению тока i через вентиль.

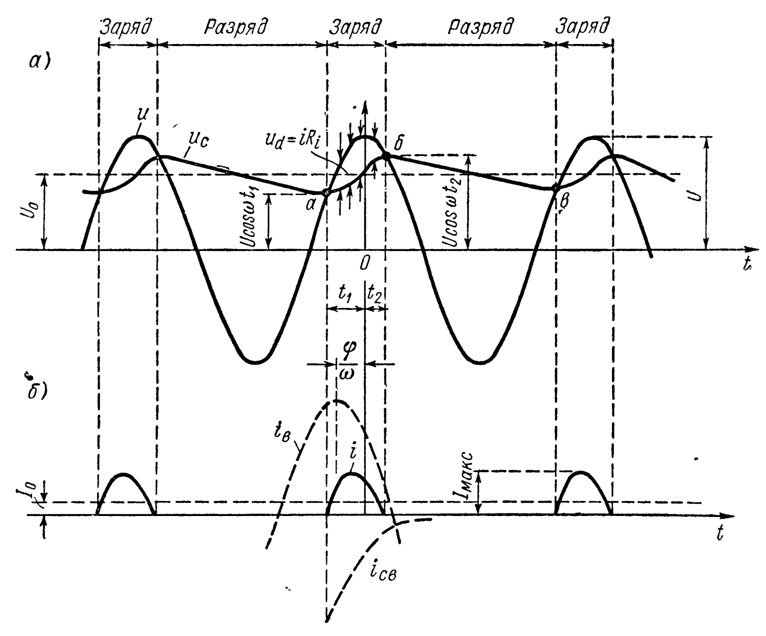


Рис. 14-51. Временны́е диаграммы напряжений (*а*) и токов (*б*) в цепях выпрямителя.

Поскольку мы условились считать $R_i = \text{const}$, то для времени заряда цепь может рассматриваться как линейная и ток i состоящим из двух слагаемых: вынужденного и свободного, т. е.

$$i = i_{св} + i_в. \tag{14-115}$$

Вынужденный ток $i_в$ находится из схемы рис. 14-52, *а*, т. е.

$$i_в = I_в \cos(\omega t - \varphi). \tag{14-116}$$

Здесь амплитуда вынужденного тока

$$I_в = \frac{U}{z_{вх}}, \tag{14-117}$$

где

$$z_{вх} = \sqrt{\frac{(R_i + R)^2 + \omega^2 C^2 R_i^2 R^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2}}. \tag{14-118}$$

Угол сдвига фаз φ находится из выражения

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x_{\text{вх}}}{r_{\text{вх}}} = -\frac{\omega C R^2}{R_i + R + \omega^2 C^2 R^2 R_i}. \qquad (14\text{-}119)$$

Для определения свободного тока справедлива схема рис. 14-52, *б*;

$$i_{\text{св}} = Ae^{-\frac{t}{\tau_1}}. \qquad (14\text{-}120)$$

Постоянная времени цепи заряда

$$\tau_1 = C\frac{R_i R}{R_i + R} = \frac{CR_i}{1 + \frac{R_i}{R}}. \qquad (14\text{-}121)$$

Итак, подставляя (14-120) и (14-116) в (14-115), получим

$$i = Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + I_{\text{в}}\cos(\omega t - \varphi).$$

Для нахождения постоянной интегрирования A имеем условие: при $t = -t_1$ ток $i = 0$. Поэтому

$$A = -I_{\text{в}}\cos(-\omega t_1 - \varphi)e^{-\frac{t}{\tau_1}} = -I_{\text{в}}\cos(\omega t_1 + \varphi)e^{-\frac{t}{\tau_1}},$$

и ток

$$i = I_{\text{в}}\left[\cos(\omega t - \varphi) - \cos(\omega t_1 + \varphi)e^{-\frac{t+t_1}{\tau_1}}\right]. \qquad (14\text{-}122)$$

На рис. 14-51, *б* нанесены кривые $i_{\text{в}}(t)$; $i_{\text{св}}(t)$ и $i(t)$. Ток i имеет форму импульса, максимальное значение которого несколько опережает во времени максимум приложенного напряжения; ток обращается в нуль в моменты $t = -t_1$ и $t = t_2$, когда $i_{\text{в}} = -i_{\text{св}}$. Импульсы тока периодически повторяются с частотой ω. Они могут быть разложены в ряд Фурье, содержащий постоянную слагающую I_0 и множество переменных слагающих с частотами: ω; 2ω; ...

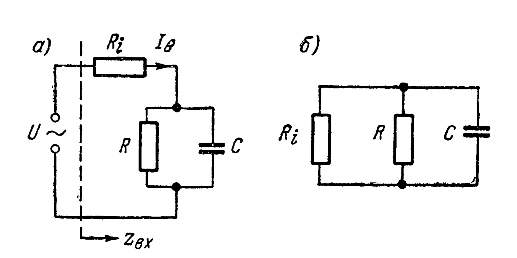


Рис. 14-52. Схемы для расчета вынужденного тока (*а*) и свободного тока (*б*).

В зарядной стадии процесса выходное напряжение (оно же напряжение на емкости)

$$u_C = u - u_d = U\cos\omega t - iR_i. \qquad (14\text{-}123)$$

Входящий сюда ток i определяется из (14-122). По этой формуле на рис. 14-51, *а* построена часть *аб* кривой $u_C(t)$.

В разрядной стадии напряжение на емкости

$$u_C = U \cos \omega t_2 e^{-\frac{t-t_2}{\tau_2}}. \qquad (14\text{-}124)$$

Здесь $\tau_2 = CR$ — постоянная времени цепи разряда.

По формуле (14-124) построена часть *бв* кривой u_C (t) на рис. 14-51, *а*.

Из проведенного анализа следует, что емкость в изучаемой схеме играет роль фильтрующего (сглаживающего) элемента. Выходное напряжение меняется в небольших пределах:

$$\text{от } u_{C\,\text{мин}} = U \cos \omega t_1 \text{ до } u_{C\,\text{макс}} = U \cos \omega t_2. \qquad (14\text{-}125)$$

Иными словами, высшие гармоники выходного напряжения имеют малую величину по сравнению с постоянной слагающей U_0. Переменные слагающие тока i почти полностью шунтируются емкостью, а постоянная его составляющая I_0 замыкается через сопротивление R, создавая на нем падение напряжения $U_0 = I_0 R$.

Чем больше емкость C, тем меньше разница между $u_{C\text{мин}}$ и $u_{C\text{макс}}$, тем больше экспонента *бв* приближается к горизонтальной прямой. Для этого необходимо, чтобы постоянная времени разряда значительно превосходила период T, т. е. $CR \gg T$ или

$$C \gg \frac{T}{R}. \qquad (14\text{-}126)$$

Это же неравенство можно переписать иначе:

$$\omega C \gg \frac{1}{R}; \qquad (14\text{-}127)$$

проводимость емкости для всех переменных составляющих тока должна быть много больше проводимости нагрузки R.

Рассмотрим, каков будет режим цепи в предельном случае $C \to \infty$. Обращаясь к выражениям, определяющим ток через вентиль, видим, что согласно (14-118), (14-119) и (14-121) $\varphi_0 = 0$; $\tau_1 = \infty$; $z_{\text{вх}} = R_i$. Поэтому

$$\left.\begin{aligned} i_{\text{св}} &= A = -I_{\text{в}} \cos \omega t_1, \\ i_{\text{в}} &= \frac{U}{R_i} \cos \omega t. \end{aligned}\right\} \qquad (14\text{-}128)$$

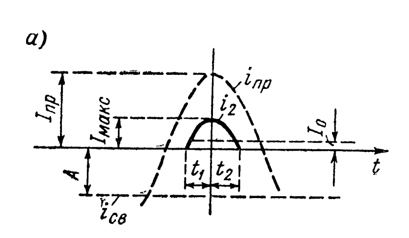
На рис. 14-53, *а* построены графики $i_{\text{св}}$ (t) и $i_{\text{в}}$ (t). Отсюда, в частности, видно, что $t_1 = t_2$ и ток i представляют собой импульсы «отсеченной» косинусоиды, максимальные значения которых $I_{\text{макс}}$ совпадают по времени с максимумом приложенного напряжения.

Обозначая $\omega t_1 = \omega t_2 = \theta$, получим

$$i = i_{св} + i_в = \frac{U}{R_i}(\cos \omega t - \cos \theta) = SU(\cos \omega t - \cos \theta), \quad (14\text{-}129)$$

где θ — угол отсечки тока через вентиль.

Сравнивая выражения (14-129) и (10-64), убеждаемся в том, что они совпадают; поэтому для приближенного расчета режима выпрямителя в допущении $C \to \infty$ может быть использована методика А. И. Берга.



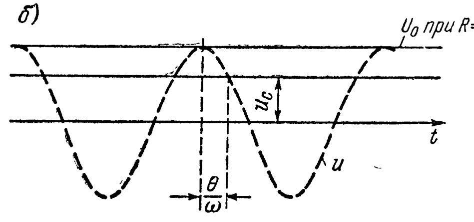


Рис. 14-53. Временные диаграммы токов (*а*) и напряжений (*б*) при $C \to \infty$.

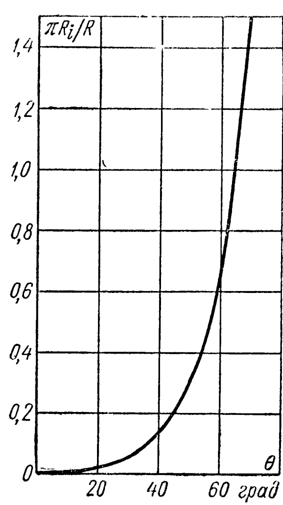


Рис. 14-54. Зависимость $\frac{\pi R_i}{R}(\theta)$.

Так как $u_C = U \cos \omega t - iR_i$, то, подставляя сюда i из (14-129), получим

$$u_C = U \cos \theta = U_0, \quad (14\text{-}130)$$

т. е. выходное напряжение при $C \to \infty$ представляет собой строго постоянную величину (рис. 14-53, *б*).

Из (14-129) следует, что максимальный импульс тока

$$I_{макс} = \frac{U}{R_i}(1 - \cos \theta)$$

и постоянная слагающая его

$$I_0 = \alpha_0 I_{макс} = \alpha_0 \frac{U}{R_i}(1 - \cos \theta).$$

Подставив сюда значение коэффициента постоянной слагающей из (10-68)

$$\alpha_0 = \frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{\pi (1 - \cos \theta)},$$

после простых преобразований получим

$$I_0 = \frac{U_0}{\pi R_i} (\operatorname{tg} \theta - \theta).$$

Так как $\frac{U_0}{I_0} = R$, то

$$\operatorname{tg} \theta - \theta = \pi \frac{R_i}{R} = \frac{\pi}{SR}. \qquad (14\text{-}131)$$

Из этого важного соотношения следует, что величина угла отсечки определяется только соотношением $\frac{R_i}{R} = \frac{1}{SR}$. Иными словами, в рассматриваемой нелинейной цепи угол отсечки не зависит от амплитуды внешнего напряжения. Величина угла отсечки есть функция параметров схемы. На рис. 14-54 нанесен график зависимости между углом отсечки θ и отношением $\pi \frac{R_i}{R}$.

Чем больше сопротивление нагрузки R, тем меньше угол отсечки. Если в пределе $R = \infty$, то $\theta = 0$ и $U_0 = U$, т. е. в стационарном режиме ток через вентиль отсутствует, а выпрямленное напряжение равно амплитуде выпрямляемого напряжения (рис. 14-53, *б*).

Рис. 14-55. Зависимость η (θ).

Иногда при расчете выпрямителя существенную роль играют энергетические соотношения.

Полезная мощность, выделяемая в сопротивлении нагрузки,

$$P_0 = U_0 I_0; \qquad (14\text{-}132)$$

мощность, подводимая от источника питания,

$$P = \frac{1}{2} U I_1, \qquad (14\text{-}133)$$

где $I_1 = \alpha_1 I_{макс}$ — амплитуда первой гармоники тока, текущего через вентиль.

Коэффициент полезного действия

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{2 I_0 U_0}{I_1 U}. \qquad (14\text{-}134)$$

Имея в виду, что согласно (14-130) отношение $\frac{U_0}{U} = \cos \theta$, а $\frac{I_0}{I_1} = \frac{\alpha_0}{\alpha_1}$, придем к выводу, что к. п. д.

$$\eta = 2 \cos \theta \frac{\alpha_0}{\alpha_1}, \qquad (14\text{-}135)$$

т. е. величина его является функцией только угла отсечки θ.

На рис. 14-55 изображена зависимость $\eta = f(\theta)$. Как видно, к. п. д. возрастает с уменьшением угла отсечки θ.

Следует иметь в виду, что соотношения, полученные в допущении $C=\infty$, дают вполне удовлетворительное совпадение с данными опыта при конечной величине емкости, если только выполнено неравенство (14-126). Поэтому основанная на допущении $C=\infty$ упрощенная методика анализа вполне пригодна для технических расчетов.

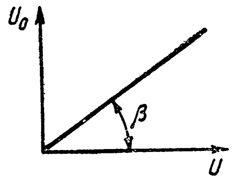


Рис. 14-56. Характеристика выпрямителя; $\operatorname{tg}\beta = \cos\theta$.

В заключение рассмотрим вопрос о характеристике выпрямления, т. е. зависимости $U_0 = f(U)$. Уравнение этой характеристики мы уже получили выше [см. (14-130)]. Так как угол отсечки определяется только соотношением R_i/R [формула (14-131)], для заданных параметров схемы характеристика выпрямления — прямая линия (рис. 14-56).

Итак, *если в схеме выпрямителя в качестве нелинейного элемента используется идеальный вентиль, то характеристика выпрямления линейна.*

14-8. Детектирование в нелинейных цепях

Одним из основных элементов радиоприемного устройства, как было показано в главе двенадцатой, является детектор. К нему подводятся модулированные высокочастотные колебания (радио-

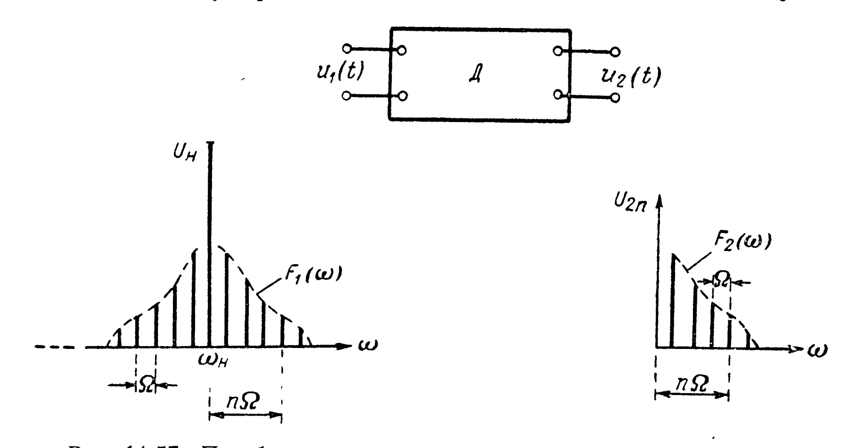


Рис. 14-57. Преобразование спектра сигнала при детектировании.

сигнал), один из параметров которых изменяется в соответствии с передаваемой информацией (по закону управляющего сигнала). Задача детектора заключается в преобразовании радиосигнала в колебания, форма которых воспроизводит модулирующий (управляющий) сигнал. Если выходное напряжение детектора совершенно

точно повторяет форму управляющего сигнала, детектирование называют неискаженным.

Пусть к входу детектора (рис. 14-57) подводится амплитудно-модулированное напряжение [ср. с (12-16)]

$$u_1 = U_н \cos \omega_н t + \sum_{n=1}^{\infty} U_{бn} \cos [(\omega_н + n\Omega) t - \psi_n] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} U_{бn} \cos [(\omega_н - n\Omega)] t + \psi_n], \qquad (14\text{-}136)$$

содержащее колебание несущей частоты $\omega_н$ с амплитудой $U_н$ и, в общем случае, бесчисленное множество колебаний боковых частот $\omega_н \pm \Omega$, $\omega_н \pm 2\Omega$, ..., $\omega_н \pm$ $\pm n\Omega$, ..., имеющих амплитуды $U_{б1}$, $U_{б2}$, ..., $U_{бn}$, ...

На выходе должно быть получено напряжение

$$u_2 = \sum_{n=1}^{\infty} U_{2n} \cos (n\Omega t - \psi_n), \qquad (14\text{-}137)$$

содержащее колебания модулирующих частот Ω, 2Ω,..., $n\Omega$,..., отсутствующих в спектре подведенного напряжения.

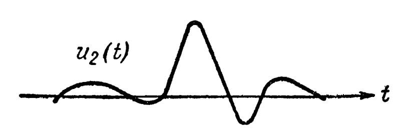


Рис. 14-58. Детектирование АМ сигнала.

Спектральная функция выходного сигнала $F_2(\omega)$ должна по форме своей повторять спектральную функцию $F_1(\omega - \omega_н)$ верхней боковой полосы радиосигнала (см. рис. 14-57).

Из сказанного следует, что детектирование не может быть осуществлено в линейной цепи с постоянными параметрами. Для решения этой задачи, как правило, применяется нелинейная цепь с соответственно выбранным видом нелинейности.

Так как при амплитудной модуляции по закону управляющего сигнала изменяется амплитуда высокочастотных колебаний, выходное напряжение детектора должно иметь форму огибающей радиосигнала (рис. 14-58).

Попытаемся прежде всего установить, каким видом нелинейности должна обладать цепь для успешного решения задачи детектирования АМ радиосигналов.

Как было показано в § 10-7, при воздействии переменного напряжения на нелинейный элемент в режиме больших колебаний постоянная слагающая тока изменяется на величину, названную нами током детекторного эффекта (см. 10-57).

Аналогично можно говорить о напряжении детекторного эффекта

$$U_d = I_d R_н, \qquad (14\text{-}138)$$

которое создается током I_d на сопротивлении нагрузки $R_н$.

Если вольт-амперная характеристика нелинейного элемента такова, что ток покоя $i_0 = 0$, то ток и напряжение детекторного эффекта совпадают с постоянными слагающими I_0 и U_0 (с выпрямленными током и напряжением), т. е.

$$I_d = I_0; \; U_d = U_0. \qquad (14\text{-}139)$$

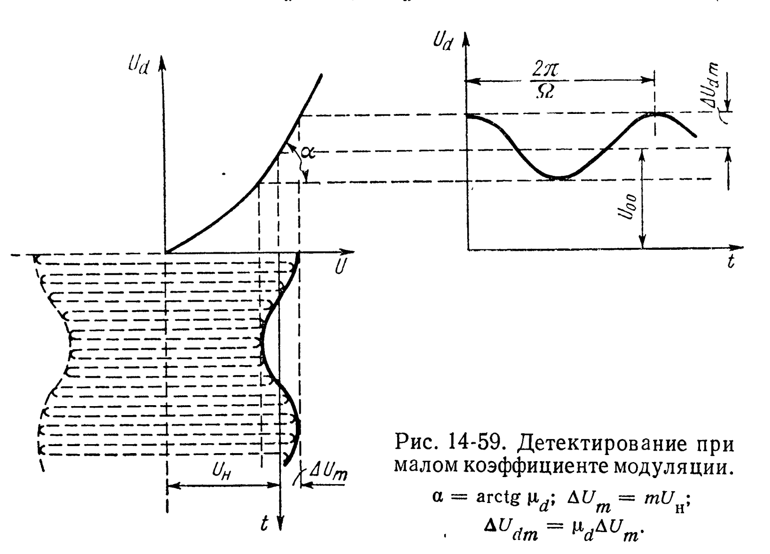


Рис. 14-59. Детектирование при малом коэффициенте модуляции.
$\alpha = \operatorname{arctg} \mu_d$; $\Delta U_m = mU_н$; $\Delta U_{dm} = \mu_d \Delta U_m$.

Напряжение и ток детекторного эффекта U_d и I_d зависят от амплитуды U переменного напряжения, поэтому они действительно могут служить для обнаружения сигналов. Отсюда следует, что в качестве детектора АМ радиосигналов может быть использована схема выпрямления. Действительно, в процессе модуляции амплитуда сигнала U меняется около своего среднего значения $U_н$ на величину $\Delta U(t)$, пропорциональную управляющему сигналу (рис. 14-59). Соответственно и напряжение детекторного эффекта U_d (выпрямленное напряжение) также изменяется на некоторую величину $\Delta U_d(t)$. Если $\Delta U_d(t)$ окажется пропорциональным $\Delta U(t)$, будет обеспечено неискаженное воспроизведение управляющего сигнала.

Таким образом, полезным продуктом нелинейности является изменение напряжения детекторного эффекта ΔU_d, вызванное изменением амплитуды воздействия ΔU.

Рассмотрим зависимость

$$U_d = f(U), \tag{14-140}$$

которая называется детекторной характеристикой и показана в виде графика на рис. 14-59.

Крутизна этой кривой, т. е. производная

$$\mu_d = \frac{dU_d}{dU} \approx \frac{\Delta U_d}{\Delta U} = \operatorname{tg} \alpha, \tag{14-141}$$

определяет связь между изменениями детекторного эффекта ΔU_d и амплитуды воздействующего напряжения ΔU.

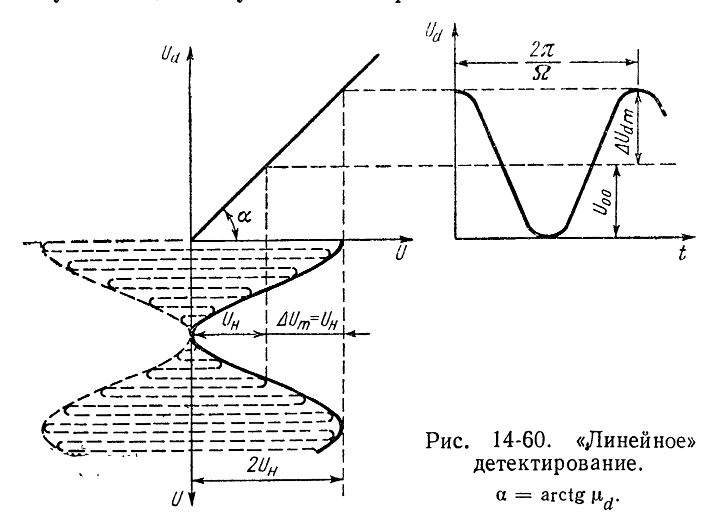


Рис. 14-60. «Линейное» детектирование.
$\alpha = \operatorname{arctg} \mu_d$.

Для неискаженного воспроизведения огибающей радиочастотного напряжения необходимо, как видно из рис. 14-59, чтобы рабочий участок детекторной характеристики был прямолинеен ($\mu_d = \mathrm{const}$).

Необходимая протяженность линейного участка характеристики определяется коэффициентом модуляции [см. (12-4)]

$$m = \frac{\Delta U_m}{U_н}, \tag{14-142}$$

где ΔU_m — наибольшее изменение амплитуды.

Пределы изменения U, внутри которых детекторная характеристика должна представлять отрезок прямой, будут

$$U_н \pm \Delta U_m = U_н (1 \pm m). \tag{14-143}$$

Если коэффициент модуляции $m = 1$, детекторная характеристика на всем своем протяжении ($0 \leqslant U \leqslant 2U_н$) должна быть линейной (рис. 14-60). На рис. 14-59 и 14-60 пунктиром показан закон

изменения мгновенного значения подводимого к детектору напряжения АМ радиосигнала, огибающей которого и является сплошная кривая.

Детектор, обладающий характеристикой вида рис. 14-60, называется л и н е й н ы м. Аналогично случаю выпрямления здесь слово «линейный» относится только к виду детекторной характеристики, а никак не к характеру процессов в рассматриваемой системе.

Из рис. 14-59 и 14-60 видно, что выходное напряжение детектора после очищения его от высокочастотных слагающих содержит:

1) составляющую модулирующей частоты Ω, которая при гармонической форме управляющего сигнала имеет амплитуду

$$\Delta U_{dm} = \mu_d \Delta U_m = \mu_d m U_{н}; \qquad (14\text{-}144)$$

2) постоянную слагающую U_{00}. В случае линейного детектирования (рис. 14-60) величина последней от коэффициента модуляции m не зависит. Составляющая U_{00}, как правило, оказывается ненужной и должна быть отфильтрована.

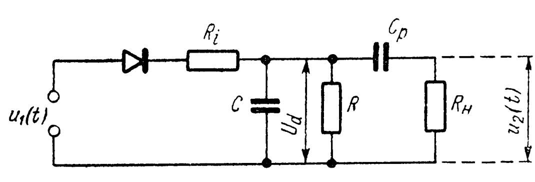


Рис. 14-61. Детектор с идеальным вентилем. $u_2(t) = \Delta U_d(t)$.

В сущности любую схему выпрямителя с учетом некоторых специфических особенностей можно использовать в качестве детектора. В частности, широко применяется схема, (рис. 14-61), в основном повторяющая цепь выпрямления (см. рис. 14-50).

Пусть в схеме (рис. 14-61) в качестве нелинейного элемента используется и д е а л ь н ы й в е н т и л ь. Так как его вольт-амперная характеристика (рис. 14-49, *в*) проходит через начало координат, ток покоя $i_0 = 0$. Поэтому согласно (14-139) в данной схеме ток и напряжение детекторного эффекта равны их выпрямленным значениям, т. е. $I_d = I_0$ и $U_d = U_0$. Значит, *детекторная характеристика совпадает с характеристикой выпрямления.* Последняя же, как показано в § 14-7, при использовании в выпрямителе идеального вентиля представляет собой прямую, уравнение которой

$$U_d = U_0 \cos\theta;$$

стало быть,

$$\mu_d = \frac{dU_d}{dU} = \cos\theta \qquad (14\text{-}145)$$

и, так как угол отсечки θ зависит только от соотношения внутреннего сопротивления вентиля R_i и сопротивления R, крутизна кривой постоянна.

Итак, детектор, построенный на идеальном вентиле, является линейным (рис. 14-60), и с его помощью возможно неискаженное детектирование при любом коэффициенте модуляции: $0 < m \leqslant 1$.

Для того чтобы уяснить некоторые особенности работы схемы детектора (рис. 14-61), которыми она отличается от обычной схемы выпрямления, рассмотрим временну́ю диаграмму, показанную на рис. 14-62. До момента $t = t_1$ модуляция отсутствует и при условии, что емкость C достаточно велика, так что неравенство (14-127) выполняется, выпрямленное напряжение почти постоянно. Схема работает как обычный выпрямитель.

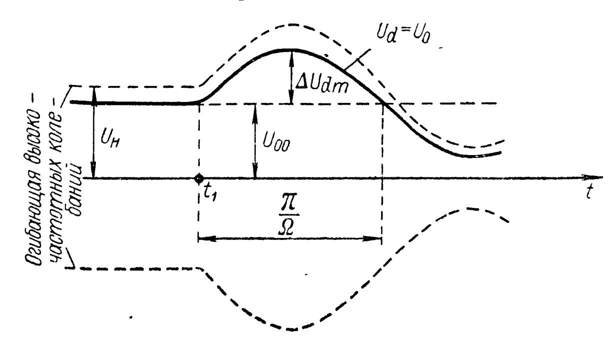


Рис. 14-62. Детектированное колебание.

В момент $t = t_1$ амплитуда переменного напряжения начинает изменяться. Поэтому и «постоянная слагающая» напряжения на емкости (выпрямленное напряжение $U_0 = U_d$) перестает быть неизменной по своей величине. Входящая в ее состав постоянная составляющая должна быть отфильтрована, для чего служит цепь $C_р$, $R_н$.

На сопротивлении $R_н$ выделяется только переменная слагающая $\Delta U_d\,(t)$ детектированного напряжения. Емкость $C_р$ должна быть выбрана так, чтобы сопротивление ее для частоты управляющего сигнала было многим меньше сопротивления $R_н$:

$$\frac{1}{\Omega C_р} \ll R_н. \qquad (14\text{-}146)$$

Из произведенного анализа следует, что емкость C, включенная параллельно сопротивлению R, не должна быть чрезмерно велика, так как при этом сопротивление R оказалось бы зашунтированным не только для токов радиочастоты ω, но и для полезных колебаний частоты модулирующего сигнала Ω. Очевидно, емкость C должна быть выбрана так, чтобы удовлетворялись два неравенства:

$$\frac{1}{\Omega C} \gg R \gg \frac{1}{\omega C}. \qquad (14\text{-}147)$$

Так как $\Omega \ll \omega$, выполнение (14-147) не встречает затруднений.

Физически осуществимые вентили (диоды) по своей вольт-амперной характеристике отличаются от идеального вентиля. Поэтому и детекторная характеристика схемы с действительным вентилем отличается от прямой линии. Попытаемся оценить вид этой характеристики.

Пусть вольт-амперная кривая нелинейного элемента (диода) выражается степенным многочленом вида (10-9):

$$i = i_0 + a_1(u - u_0) + a_2(u - u_0)^2 + a_3(u - u_0)^3 + \ldots,$$

где $u_0 = U_0$ — напряжение смещения, в окрестности которого произведено разложение в ряд; в частном случае U_0 может быть равно нулю.

Ток через диод при воздействии на него переменного напряжения с амплитудой U содержит постоянную слагающую (см. табл. 10-3)

$$I_0 = i_0 + \frac{a_2U^2}{2} + \frac{3}{8}a_4U^4 + \frac{5}{16}a_6U^6 + \ldots + \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}a_{2m}U^{2m} + \ldots \tag{14-148}$$

Значит, ток детекторного эффекта

$$I_d = I_0 - i_0 = a_2\frac{U^2}{2} + \frac{3}{8}a_4U^4 + \ldots + \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} \times a_{2m}U^{2m} + \ldots \tag{14-149}$$

Это выражение представляет собой уравнение детекторной характеристики $I_d = f(U)$. Она отличается от прямой линии.

При очень слабых сигналах членами высших степеней ряда (14-149) можно пренебречь и приближенное уравнение детекторной характеристики приобретет вид

$$I_d \approx a_2\frac{U^2}{2}. \tag{14-150}$$

Детектор, имеющий характеристику, выражаемую уравнением (14-150), называется **квадратичным** (рис. 14-63).

Пусть напряжение, воздействующее на квадратичный детектор, модулировано по амплитуде гармоническим сигналом, т. е.

$$U = U_н(1 + m\cos\Omega t).$$

Подставляя это значение U в (14-150), получим, что

$$I_d = \frac{1}{2}a_2U_н^2(1 + m\cos\Omega t)^2 = \frac{1}{2}a_2U_н^2\left(1 + \frac{m^2}{2}\right) + ma_2U_н^2\cos\Omega t + \frac{m^2}{4}a_2U_н^2\cos 2\Omega t. \tag{14-151}$$

Детекторный ток содержит три составляющие:

1) постоянную слагающую

$$I_{00} = \frac{1}{2}a_2U_н^2\left(1 + \frac{m^2}{2}\right), \tag{14-152}$$

величина которой растет с увеличением глубины модуляции;

2) слагающую частоты Ω, имеющую амплитуду

$$I_1 = ma_2U_{н}^2; \qquad (14\text{-}153)$$

3) слагающую удвоенной частоты модуляции 2Ω, имеющую амплитуду

$$I_2 = \frac{m^2}{4}a_2U_{н}^2. \qquad (14\text{-}154)$$

Из-за нелинейности детекторной характеристики форма выходного тока оказывается искаженной; появляется составляющая второй гармоники.

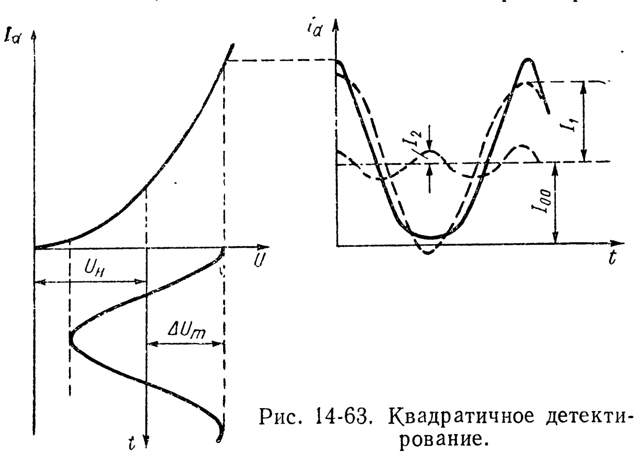


Рис. 14-63. Квадратичное детектирование.

Коэффициент нелинейных искажений в данном случае

$$k_f = \frac{I_2}{I_1} = \frac{m}{4} \qquad (14\text{-}155)$$

растет пропорционально коэффициенту модуляции. Поэтому при помощи квадратичного детектора можно получить удовлетворительное воспроизведение сигналов лишь при условии, что коэффициент модуляции m достаточно мал.

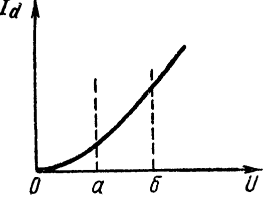


Рис. 14-64. Детекторная характеристика.

При широких пределах изменения амплитуды воздействующего напряжения U детекторные характеристики реальных вентилей имеют обычно вид рис. 14-64. В нижней своей части *oa* кривая близка к параболе, а далее — к прямой линии. Поэтому если к детектору подводится достаточно сильный радиосигнал, так что амплитуда несущей частоты $U_н$ оказывается, например, на уровне *б*, то вплоть до коэффициентов модуляции m, близких к единице, детектор ведет себя как линейный.

Осуществление детектирования возможно не только с помощью диода. Для этой цели могут быть использованы и другие нелинейные элементы, обладающие соответствующим видом нелинейности, в частности ламповый триод и транзистор.

На рис. 14-65, *а* изображена схема детектора, построенная на ламповом триоде, а на рис. 14-65, *б* — аналогичная схема с транзистором. В обоих случаях используется нелинейность проходной характеристики $i_2 = f(u_1)$. Подбором смещения (E_g или $E_б$) устанавливается необходимый для детектирования вид нелинейности (исходная точка — на нижнем сгибе характеристики).

В заключение остановимся вкратце на детектировании частотно-модулированных сигналов. С этой целью ЧМ колебания сперва преобразуются в колебания, модулированные по амплитуде, а затем последние детектируются (рис. 14-66, *а*). Превращение ЧМ сигналов в амплитудно-модулированные колебания является линейным преобразованием, так как колебаний новых частот при этом возникать не должно. В устройстве, производящем такое преобразование, обычно используется линейная частотно-избирательная цепь, в простейшем случае — колебательный контур.

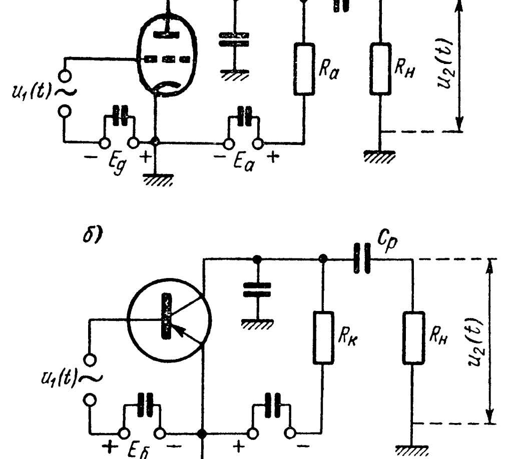


Рис. 14-65. Ламповый (*а*) и транзисторный (*б*) детекторы.

Рассматривая прохождение ЧМ сигналов через колебательный контур (§ 13-4), мы убедились, что этот процесс неизбежно связан с изменением амплитуды колебаний. Это обстоятельство может быть использовано для преобразования колебания, модулированного по частоте, в АМ колебание. Пусть контур, на который воздействует ЧМ сигнал, расстроен относительно несущей частоты ЧМ колебания так, что, например, резонансная частота контура ω_0 больше, чем несущая частота сигнала $\omega_н$. Тогда частота $\omega_н$ оказывается на склоне резонансной кривой (рис. 14-66, *б*). Изменение частоты сигнала во время модуляции на величину $\Delta\omega$ влечет за собой изменение амплитуды колебаний на величину

$$\Delta U = S_\omega \Delta\omega, \tag{14-156}$$

где $S_\omega = \frac{dU}{d\omega} \approx \frac{\Delta U}{\Delta\omega}$ — крутизна в исходной точке частотной характеристики контура.

Напряжение оказывается модулированным не только по частоте, но и по амплитуде.

Описанный метод преобразования обладает существенным недостатком, связанным с тем, что склон резонансной кривой далек

по своей форме от прямой линии. Поэтому изменение амплитуды выходного напряжения повторяет закон изменения частоты подведенного сигнала с искажениями.

Для устранения этого недостатка совмещают в одной схеме два контура и два амплитудных детектора, как это показано на рис. 14-67, *а*.

Контур *1* настроен на частоту, несколько большую, чем $\omega_н$, а контур *2*, наоборот, на частоту, немного меньшую, чем $\omega_н$. Выпрямленные напряжения U_{d1} и U_{d2} пропорциональны (при неискажен-

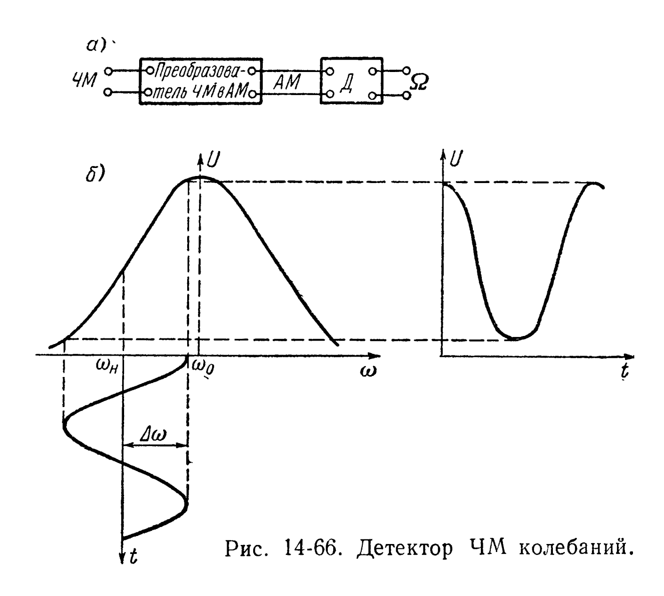


Рис. 14-66. Детектор ЧМ колебаний.

ном АМ детектировании) амплитудам U_1 и U_2, но, как видно из схемы, имеют противоположные полярности. Поэтому выходное напряжение

$$U_d = U_{d1} - U_{d2}.$$

Детекторной характеристикой здесь следует считать зависимость

$$U_d = U_d(\omega), \qquad (14\text{-}157)$$

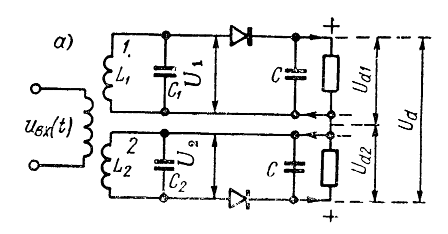
примерный вид которой показан на рис. 14-67, *б*.

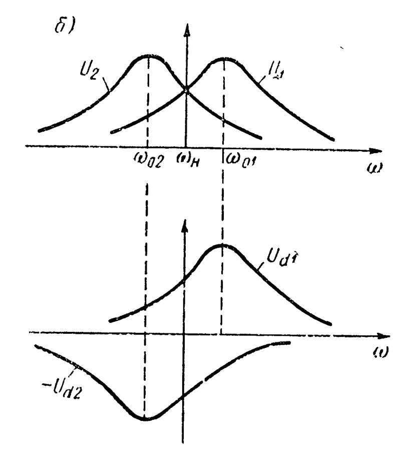
Эта характеристика имеет достаточно протяженный участок *а-а*, форма которого близка к прямой линии; на участке *а-а* крутизна детекторной характеристики

$$\mu_\omega = \frac{dU_d}{d\omega} \approx \text{const}. \qquad (14\text{-}158)$$

Выходное напряжение U_d (t) оказывается свободным от постоянной слагающей и при условии, что величины емкостей C выбраны правильно, содержит только составляющую частоты модуляции Ω с амплитудой ΔU_d.

Все устройство (рис. 14-67) в целом называют **частотным детектором**, или **частотным дискриминатором** (**различителем**).





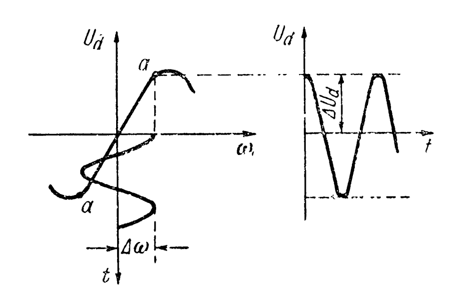


Рис. 14-67. Схема частотного дискриминатора (*а*) и кривые, поясняющие процессы в нем (*б*).

14-9. Амплитудная модуляция в нелинейных цепях

Изучая в главе двенадцатой различные виды радиосигналов, их свойства и, в частности, спектральный состав, мы не интересовались, какими техническими средствами может быть достигнуто изменение (модуляция) параметров колебаний в соответствии с передаваемой информацией.

Теперь рассмотрим основные принципы осуществления амплитудной модуляции, т. е. изменения амплитуды радиочастотного колебания по закону управляющего сигнала.

Задача ставится следующим образом. К одной паре входных зажимов *1-2* некоторого шестиполюсника, который назовем модулятором (рис. 14-68, *а*), подведено гармоническое напряжение высокой частоты

$$u_{вх} = U \cos \omega_н t, \qquad (14\text{-}159)$$

а к другой (сигнальной) паре входных клемм *3-4* — напряжение управляющего сигнала

$$u_c = \sum_{n=1}^{\infty} U_c \cos(n\Omega t - \psi_n), \qquad (14\text{-}160)$$

а также постоянное напряжение смещения U_0, которое может иметь тот или иной знак и, в частности, может быть равным нулю.

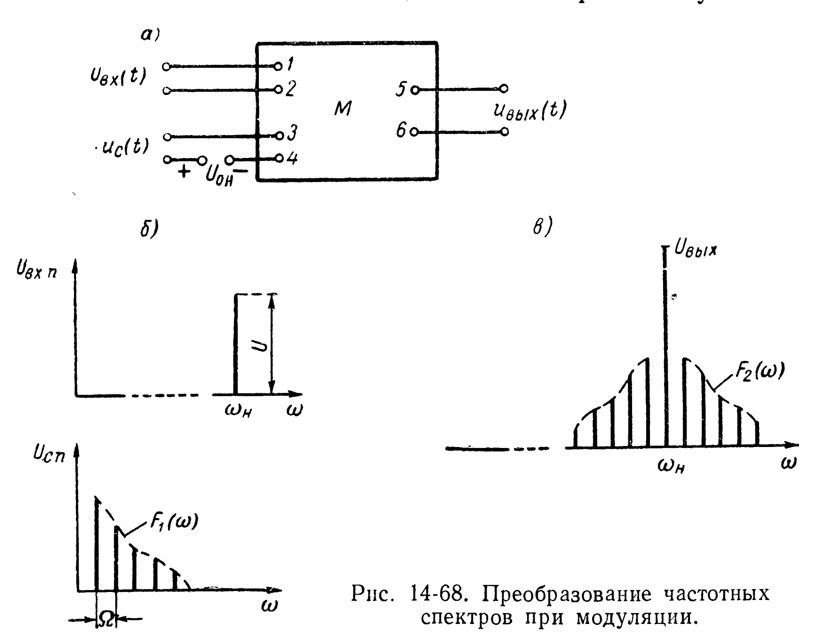


Рис. 14-68. Преобразование частотных спектров при модуляции.

На выходе шестиполюсника *5-6* требуется получить модулированное по амплитуде напряжение, которое, как известно, может быть представлено в виде суммы

$$u_{\text{вых}} = U_{\text{вых. н}} \cos \omega_{\text{н}} t + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n\text{б}} \cos[(\omega_{\text{н}} + n\Omega) t - \psi_n] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} U_{n\text{б}} \cos[(\omega_{\text{н}} - n\Omega) t + \psi_n], \qquad (14\text{-}161)$$

состоящей из колебания несущей частоты $\omega_{\text{н}}$ с амплитудой $U_{\text{вых.н}}$ и напряжений боковых частот $\omega_{\text{н}} \pm n\Omega$ с амплитудами $U_{n\text{б}}$.

На рис. 14-68 показаны спектральные диаграммы входных (*б*) и выходных (*в*) напряжений. При неискаженной модуляции вид спектральной функции верхней боковой полосы $F_2(\omega - \omega_{\text{н}})$ должен

быть точно таким же, как и спектральной функции управляющего сигнала $F_1(\omega)$.

Как видно, выходное напряжение должно содержать те частоты $\omega_н \pm n\Omega$, которых нет в составе подведенного напряжения, т. е. в системе должно осуществляться органическое преобразование частотных спектров, что не может быть выполнено в линейных цепях с постоянными параметрами.

Если пользоваться языком временного, а не спектрального, метода, задачу амплитудной модуляции можно сформулировать несколько иначе.

Переменное напряжение низкочастотного сигнала $u_с(t)$ можно рассматривать как изменение напряжения смещения, подведенного к сигнальным входным зажимам, т. е.

$$u_с(t) = \Delta U_0(t).$$

Для неискаженной модуляции необходимо, чтобы изменение амплитуды выходного напряжения, имеющего частоту $\omega_н$, было пропорциональным напряжению сигнала:

$$\Delta U_{вых}(t) = k\Delta U_0(t). \qquad (14\text{-}162)$$

Вновь приходим к выводу, что выполнение этого требования в линейной системе с постоянными параметрами невозможно. Действительно, к линейной цепи применим принцип независимости действия (суперпозиции). Поэтому отклики на каждое из двух воздействий (U_0 и $u_{вх} = U\cos\omega_н t$) независимы друг от друга, и изменение величины одного из входных напряжений (U_0) не может сказаться на величине выходного напряжения, имеющего частоту $\omega_н$, т. е. на величине отклика цепи на другое воздействующее напряжение $u_{вх} = U\cos\omega_н t$.

Обычно амплитудная модуляция осуществляется в нелинейных цепях с соответственно выбранным видом нелинейности.

В качестве характеристики рассматриваемого нелинейного преобразования следует принять зависимость амплитуды выходного напряжения $U_{вых}$ от напряжения смещения U_0

$$U_{вых} = f(U_0). \qquad (14\text{-}163)$$

Эта кривая называется модуляционной характеристикой; примерный вид ее изображен на рис. 14-69. На этом же рисунке показано исходное постоянное смещение $U_{0н}$, около которого происходит изменение напряжения U_0 с частотой Ω по гармоническому закону.

Связь между изменениями амплитуды выходного напряжения $\Delta U_{вых}$ и модулирующим напряжением ΔU_0 определяется крутизной модуляционной характеристики

$$\mu_m = \frac{dU_{вых}}{dU_0} \approx \frac{\Delta U_{вых}}{\Delta U_0}. \qquad (14\text{-}164)$$

Для неискаженной модуляции необходимо, как видно из рис. 14-69, чтобы рабочий участок характеристики был линеен ($\mu_m = \text{const}$).

Необходимая протяженность линейного участка определяется величиной коэффициента модуляции

$$m = \frac{\Delta U_{\text{вых.}\,m}}{U_{\text{вых.}\,\text{н}}},$$

где $U_{\text{вых.н}}$ — амплитуда напряжения на выходе в отсутствие модуляции, т. е. при $\Delta U_0 = 0$.

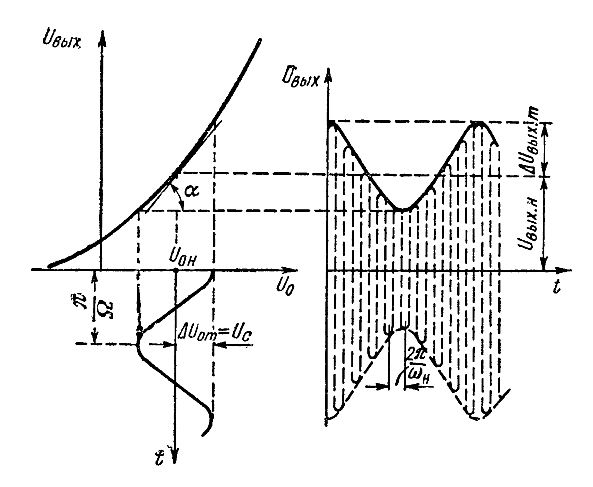


Рис. 14-69. Модуляционная характеристика при $m < 1$.
$\alpha = \operatorname{arctg} \mu_m$; $\Delta U_{\text{вых.}m} = \mu_m U_c$.

Пределы изменения $U_{\text{вых.н}}$, при которых модуляционная характеристика должна представлять отрезок прямой, будут

$$U_{\text{вых. н}} \pm \Delta U_{\text{вых.}\,m} = U_{\text{вых. н}} (1 \pm m).$$

Если коэффициент модуляции $m = 1$, модуляционная характеристика на всем своем протяжении (от 0 до $2U_{\text{вых.н}}$) должна быть линейной (рис. 14-70). На рис. 14-69 и 14-70 пунктиром показаны кривые мгновенного значения выходного напряжения, изменяющегося с частотой $\omega_{\text{н}}$.

Схема осуществления амплитудной модуляции изображена на рис. 14-71. Воздействующие на цепь напряжения $u_{\text{вх}}(t)$, $u_c(t)$ и $U_{0\text{н}}$ включены последовательно с нелинейным элементом. Ток, протекающий в цепи, содержит множество гармонических составляющих: с частотами $\omega_{\text{н}}$ и Ω, а также кратных и комбинационных частот.

Колебательный контур L, C настроен на частоту $\omega_н$. Поэтому именно гармоника тока, имеющая частоту $\omega_н$, выделит на контуре наибольшее напряжение, амплитуда которого

$$U_{вых} = I_1 R_э, \quad (14\text{-}165)$$

где I_1 — амплитуда тока первой гармоники частоты $\omega_н$;
$R_э$ — резонансное сопротивление контура.

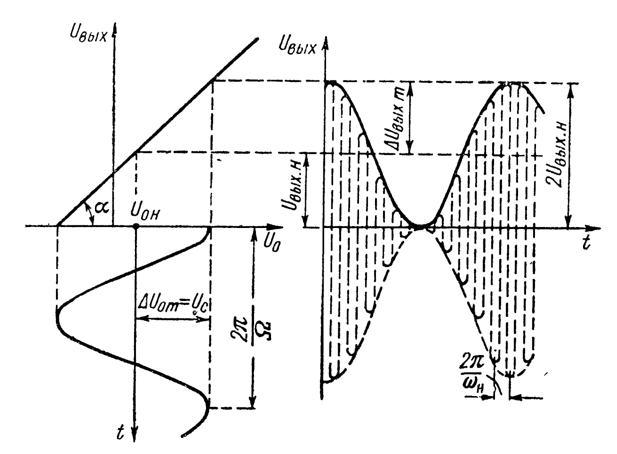


Рис. 14-70. Модуляционная характеристика при $m = 1$.
$\alpha = \operatorname{arctg} \mu_m$; $\Delta U_{вых.m} = \mu_m U_c$.

Благодаря наличию в цепи нелинейного элемента напряжение $U_{вых}$ зависит не только от амплитуды U воздействующего напряжения, но и от напряжения смещения $U_0(t)$, изменяющегося во времени по закону управляющего сигнала.

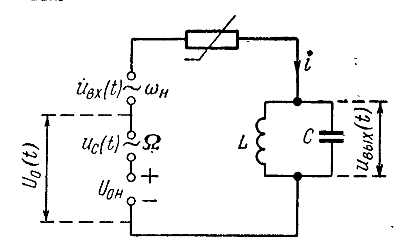


Рис. 14-71. Схема осуществления амплитудной модуляции.

Прежде всего необходимо установить, каков должен быть вид нелинейности цепи для того, чтобы модуляция была неискаженной, т. е. чтобы модуляционная характеристика $U_{вых} = f(U^0)$ была прямой линией.

Так как согласно (14-165) $U_{вых}$ пропорционально I_1, модуляционную характеристику можно представить в виде функции

$$I_1 = f(U_0). \quad (14\text{-}166)$$

Для того чтобы выяснить, как амплитуда тока первой гармоники I_1 зависит от смещения U_0, положим, что вольт-амперная характе-

ристика нелинейного сопротивления выражается полиномом вида (10-10)

$$i = b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + b_3 u^3 + \dots = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k u^k.$$

Полагая, что сопротивление контура многим меньше сопротивления нелинейного элемента, получим, что $u = U\cos\omega_н t + U_0$, и

$$i = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (U\cos\omega_н t + U_0)^k. \qquad (14\text{-}167)$$

Представив это выражение в развернутом виде и собрав слагаемые, изменяющиеся с частотой $\omega_н$, найдем амплитуду тока I_1 этой частоты. Результаты подобных расчетов были сведены в табл. 10-6. Использовав данные этой таблицы, найдем, что

$$\begin{aligned} I_1 = b_1 U + \frac{3}{4} b_3 U^3 + \dots + \\ + (2b_2 U + 3b_4 U^3 + \dots) U_0 + \\ + (3b_3 U + \dots) U_0^2 + \\ + (4b_4 U + \dots) U_0^3 + \dots \end{aligned} \qquad (14\text{-}168)$$

Отсюда видно, что при заданном U зависимость I_1 от U_0, вообще говоря, отличается от прямой линии. Только в том случае, когда $b_3 = b_4 = b_5 = \dots = 0$, т. е. когда вольт-амперная характеристика выражается полиномом второй степени, зависимость $I_1 = f(U_0)$ приобретает вид прямой, уравнение которой

$$I_1 = b_1 U + 2b_2 U U_0. \qquad (14\text{-}169)$$

Итак, *для получения неискаженной модуляции необходим нелинейный элемент, обладающий характеристикой, выражаемой полиномом второй степени.*

Важно отметить, что такой нелинейный элемент обладает интересным свойством: средняя крутизна $S_{ср}$ равна крутизне S в исходной точке ($u = U_0$).

Действительно, из уравнения вольт-амперной характеристики следует, что при $b_3 = b_4 = b_5 = \dots = 0$ крутизна в точке $u = U_0$

$$S = \frac{di}{du} = b_1 + 2b_2 u = b_1 + 2b_2 U_0;$$

с другой стороны из (14-169) вытекает, что средняя крутизна

$$S_{ср} = \frac{I_1}{U} = b_1 + 2b_2 U_0,$$

т. е.

$$S_{ср} = S. \qquad (14\text{-}170)$$

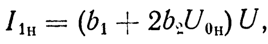
Прямая, построенная по (14-169), изображена на рис. 14-72. Крутизна этой прямой

$$S_m = \frac{dI_1}{dU_0} = 2b_2 U = \operatorname{tg} \alpha.$$

Воздействие управляющего сигнала с амплитудой $U_c = \Delta U_{0m}$ вызывает изменение амплитуды I_1 на величину

$$\Delta I_{1m} = S_m U_c = 2b_2 U U_c.$$

Так как в отсутствие модуляции (в режиме несущей частоты)



$$I_{1н} = (b_1 + 2b_2 U_{0н}) U,$$

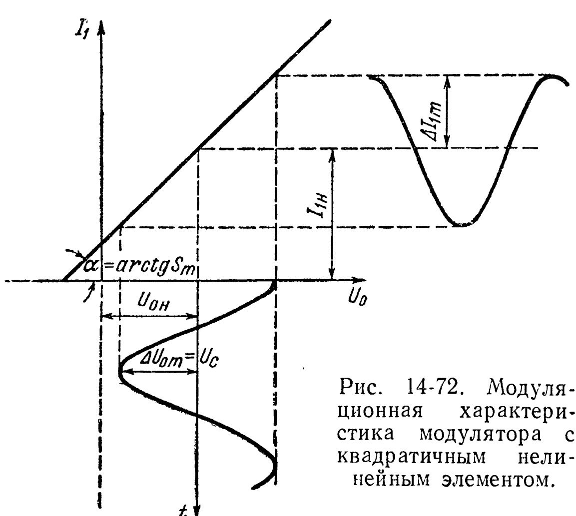


Рис. 14-72. Модуляционная характеристика модулятора с квадратичным нелинейным элементом.

то получаемый коэффициент модуляции тока

$$m = \frac{\Delta I_{1m}}{I_{1н}} = \frac{U_c}{U_{0н} + \frac{b_1}{2b_2}}. \qquad (14\text{-}171)$$

Отсюда видно, что глубина модуляции прямо пропорциональна силе сигнала; этим подтверждается отсутствие искажений при данном типе нелинейности. При прочих равных условиях коэффициент модуляции тем больше, чем больше отношение b_2/b_1, т. е. чем ярче выражена нелинейность вольт-амперной характеристики элемента.

Линейность модуляционной характеристики является необходимым, но недостаточным условием того, что огибающая высокочастотных колебаний без искажений воспроизводит форму управляющего сигнала. Следует еще обеспечить минимум частотных (линейных) искажений при прохождении тока, имеющего коэффициент

модуляции m, через колебательный контур. Как показано в § 13-3, для этой цели необходимо, чтобы полоса пропускания контура $\Delta\omega_к$ была не менее удвоенной максимальной частоты модуляции $2\Omega_{макс}$:

$$\Delta\omega_к = \frac{\omega_0}{Q} \geqslant 2\Omega_{макс}. \qquad (14\text{-}172)$$

Процессы в модуляторе с нелинейным элементом, обладающим характеристикой, выражаемой полиномом второй степени, иллюстрируются временны́ми диаграммами рис. 14-73. Здесь (слева внизу) показана кривая напряжения, подведенного к нелинейному эле-

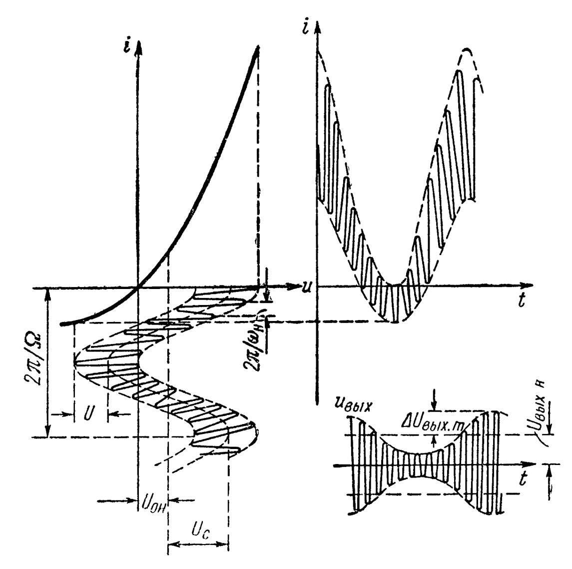


Рис. 14-73. Режим модулятора с нелинейным элементом, обладающим характеристикой, выражаемой полиномом второй степени.

менту; оно представляет сумму постоянного смещения $U_{0н}$ и переменных напряжений: высокой частоты $\omega_н$ (с амплитудой U) и модулирующей частоты Ω (с амплитудой $U_с$). Ток в цепи $i(t)$ содержит ряд гармонических составляющих, в том числе слагающую частоты $\omega_н$, амплитуда которой изменяется с частотой управляющего сигнала Ω. В правой нижней части графика изображена диаграмма напряжения на контуре, настроенном на частоту $\omega_н$. Это напряжение модулировано по амплитуде; огибающая его в точности воспроизводит форму управляющего сигнала.

Установив, какой вид нелинейности является наиболее желательным для осуществления амплитудной модуляции, выясним, возможно ли применение в модуляторе нелинейного элемента, обладающего кусочно-линейной характеристикой (типа идеального вентиля).

Для нахождения уравнения модуляционной характеристики $I_1 = f(U_0)$ в этом случае целесообразно воспользоваться методикой А. И. Берга.

Согласно (10-69) и (10-71) амплитуда тока первой гармоники

$$I_1 = \alpha_S S U,$$

где S — крутизна характеристики, а коэффициент α_S зависит только от угла отсечки и находится из формулы

$$\alpha_S = \frac{\theta - \sin\theta\cos\theta}{\pi}.$$

Что касается угла θ, то величина его при заданной амплитуде U является функцией напряжения смещения:

$$\cos\theta = -\frac{U_0 - u_р}{U}.$$

Если воспользоваться этими соотношениями, нетрудно будет построить зависимость

$$\alpha_S = \frac{I_1}{SU} = f(-\cos\theta) = f\left(\frac{U_0 - u_р}{U}\right),$$

изображенную в виде кривой на рис. 14-74. Она представляет собой не что иное, как обобщенную модуляционную характеристику, и по форме своей отличается от прямой линии. Поэтому неизбежны искажения огибающей модулированных колебаний. Однако, как видно из рис. 14-74, значительная часть кривой — в пределах от $\frac{I_{1мин}}{SU} \approx 0{,}08 \div 0{,}1$ до $\frac{I_{1макс}}{SU} \approx 0{,}90 \div 0{,}93$ мало отличается от прямой. Отсюда следует, что в модуляторе, построенном на идеальном вентиле, возможно получение почти неискаженной модуляции, если коэффициент модуляции не превышает

$$m = \frac{I_{1макс} - I_{1мин}}{I_{1макс} + I_{1мин}} \approx 0{,}8 \div 0{,}9.$$

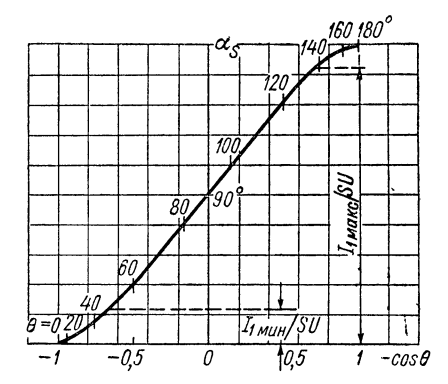


Рис. 14-74. Обобщенная модуляционная характеристика.

На практике в модуляторных устройствах применяются различные нелинейные элементы — как диоды (электронные и полупроводниковые), так и многоэлектродные электронные лампы и транзисторы.

В качестве примера рассмотрим схему модуляции на электронной лампе (рис. 14-75). Здесь используется нелинейность проходной характеристики лампы $i_a = f(u_g)$. К цепи сетки подведены постоянное напряжение смещения $E_{gн}$ последовательно с радиочастотным напряжением возбуждения U_g и напряжением управляющего сигнала U_{cg}. Так как для функции $i_a = f(u_g)$ можно с успехом применить кусочно-линейную аппроксимацию, модуляционная характеристика рассматриваемой схемы имеет вид, близкий к рис. 14-74.

Напряжение смещения $E_{gн}$ (в режиме несущей частоты) должно быть выбрано так, чтобы исходная точка была примерно в середине модуляционной характеристики, что соответствует углу отсечки $\theta_н \approx 90°$. При изменении смещения с низкой частотой амплитуда первой гармоники анодного тока I_{a1} будет изменяться в тех или иных пределах в соответствии с величиной сигнального напряжения U_{cg}. Так как в этой схеме модуляция достигается благодаря изменению напряжения смещения, ее обычно называют **схемой сеточной модуляции смещением.**

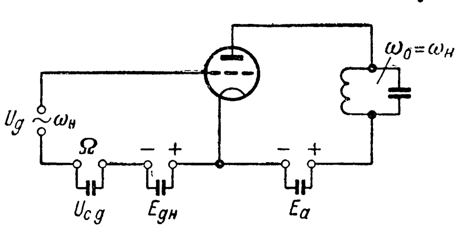


Рис. 14-75. Схема сеточной модуляции смещением.

Колебательный контур, включенный в анодную цепь лампы, должен быть настроен на частоту напряжения возбуждения $\omega_н$, а полоса пропускания его должна быть достаточно широка для того, чтобы колебания боковых частот проходили через него без заметных искажений.

14-10. Гетеродинирование в нелинейных цепях

Пусть на некоторый нелинейный элемент (рис. 14-76) воздействуют: напряжение сигнала $u_c(t)$, спектр которого состоит из частот ω_{c1}, ω_{c2}, ..., ω_{ck}, ..., ω_{cn}, и гармоническое напряжение $u_г(t)$, получаемое от вспомогательного генератора, называемого обычно **гетеродином.** В отличие от амплитудной модуляции, где частоты воздействующих напряжений резко различны ($\omega \gg \Omega$), теперь будем полагать, что частота гетеродина мало отличается от любой из частот ω_{ck} сигнала, т. е.

$$\omega_{ck} = \omega_г + \Delta\omega,$$

где

$$\Delta\omega \ll \omega_г.$$

Напряжение на выходе нелинейного элемента содержит множество колебаний различных частот. В частности, в составе продукта нелинейности будут разностные частоты $\omega_{ck} - \omega_г$ и суммарные частоты $\omega_{ck} + \omega_г$.

Если фильтр *Ф* пропускает только разностные и суммарные частоты, спектр напряжения $u_{вых}(t)$ имеет вид, показанный на рис. 14-76. Как видно, исходный спектр сигнала оказался преобразованным в два спектра, смещенных по шкале частот в область более низких (разностных) и более высоких (суммарных) частот. Предполагается, что при этом форма спектральной функции сигнала остается неизменной, т. е. искажения отсутствуют, что

может быть обеспечено выбором соответствующего вида нелинейности.

Преобразование, результатом которого является смещение спектра сигнала вдоль оси частот без изменения вида его спектральной функции, называется гетеродинированием. Практически чаще используется смещение спектра в область более низких частот, для чего фильтр *Ф* должен быть рассчитан на пропускание только разностных комбинационных частот.

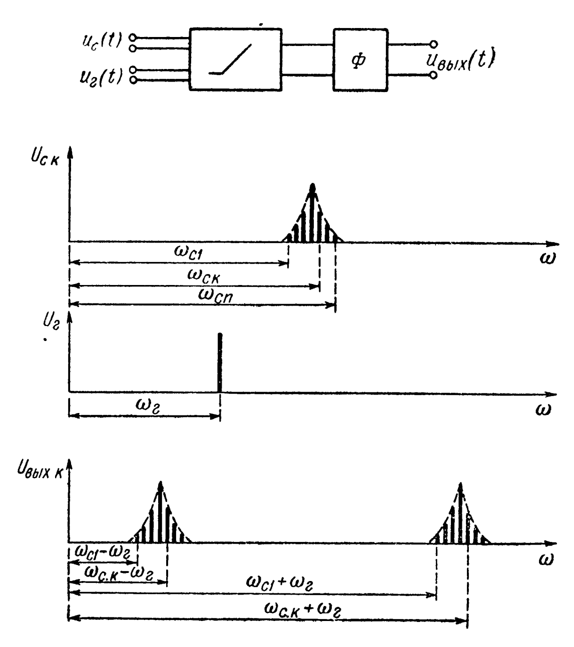


Рис. 14-76. Преобразование частотных спектров при гетеродинировании.

Рассмотрим подробнее процесс гетеродинирования, полагая для простоты, что сигнал представляет собой гармоническое колебание частоты $\omega_с$. Сумма напряжений гетеродина и сигнала

$$u = U_г \cos \omega_г t + U_с \cos \omega_с t \qquad (14\text{-}173)$$

воздействует на нелинейный элемент (рис. 14-77).

Разность между частотами сигнала и гетеродина

$$\Omega = \omega_с - \omega_г \qquad (14\text{-}174)$$

весьма мала: $\Omega \ll \omega_г$.

В результате сложения двух мало отличающихся по частоте колебаний образуются биения. Для того чтобы установить, какова будет форма биений в нашем случае, построим векторную диа-

грамму напряжений на входе цепи. Векторы $U_с$ и $U_г$ вращаются в комплексной плоскости с разными угловыми скоростями. Если вообразить наблюдателя вращающимся со скоростью $\omega_г$, то вектор $U_г$ будет представляться ему неподвижным, а вектор $U_с$ — вращающимся со скоростью Ω (рис. 14-78, *а*).

Вектор результирующего напряжения U равен геометрической сумме $U_с$ и $U_г$. Конец его описывает на плоскости окружность радиуса $U_с$, а сам он качается, периодически изменяясь как по своей величине, так и по начальной фазе (частоте).

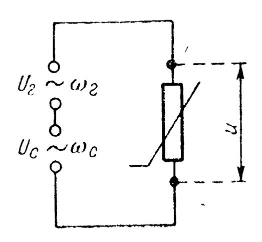


Рис. 14-77. Воздействие двух колебаний разных частот на нелинейный элемент.

Временна́я диаграмма суммарного напряжения $u(t)$ имеет вид рис. 14-78, *б*. Амплитуда (огибающая) изменяется с разностной частотой Ω в пределах от $U_{мин} = U_г - U_с$ до $U_{макс} = U_г + U_с$.

Результирующее колебание можно, с одной стороны, рассматривать как колебание частоты $\omega_г$, начальная фаза которого периодически (с частотой Ω) колеблется в пределах $\pm\psi_{макс}$, где макси-

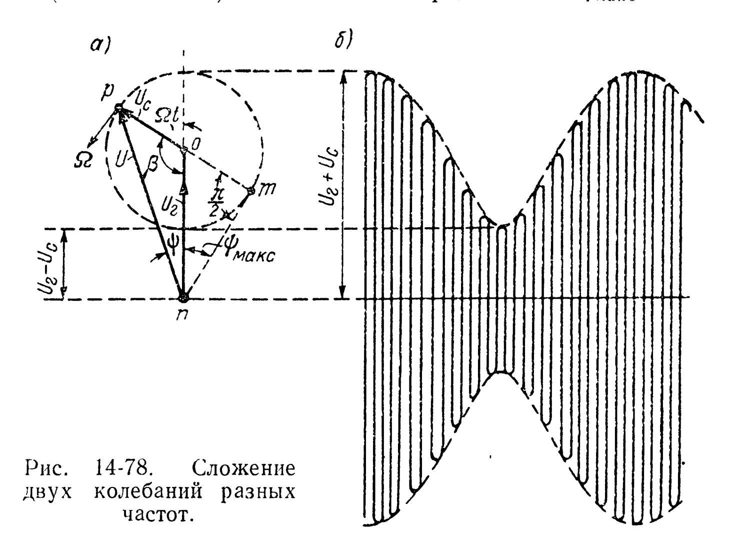


Рис. 14-78. Сложение двух колебаний разных частот.

мальное отклонение фазы $\psi_{макс}$ определяется из прямоугольного треугольника *omn*:

$$\sin\psi_{макс} = \frac{U_с}{U_г}. \qquad (14\text{-}175)$$

С другой стороны, изменение начальной фазы колебания неразрывно связано с изменением его частоты. Поэтому можно утверждать

на основании (12-8а), что результирующее колебание, имея неизменную начальную фазу, изменяется во времени с частотой

$$\omega = \omega_г + \frac{d\psi}{dt}. \qquad (14\text{-}176)$$

Из треугольника *орп* (рис. 14-78, *а*) следует, что амплитуда суммарного колебания

$$U = \sqrt{U_г^2 + U_с^2 - 2U_г U_с \cos\beta}, \qquad (14\text{-}177)$$

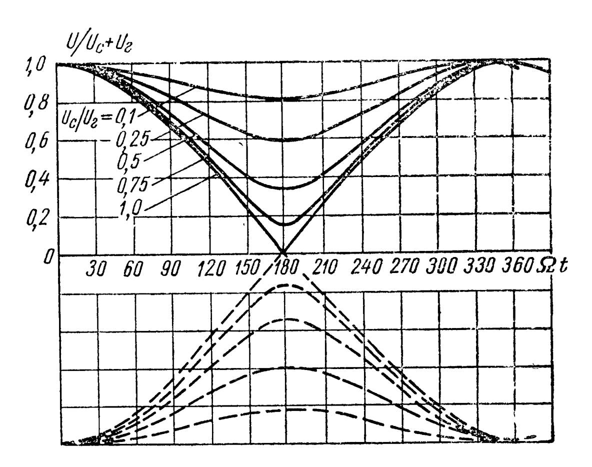


Рис. 14-79. Форма огибающей биений.

но так как $\beta = \pi - \Omega t$, то $\cos\beta = -\cos\Omega t$ и поэтому

$$U = \sqrt{U_г^2 + U_с^2 + 2U_г U_с \cos\Omega t} = U_г \sqrt{1 + \frac{U_с^2}{U_г^2} + 2\frac{U_с}{U_г}\cos\Omega t}. \qquad (14\text{-}178)$$

Это выражение представляет закон изменения во времени амплитуды биений (огибающей). Его можно переписать так:

$$\frac{U}{U_с + U_г} = \sqrt{\frac{1 + \frac{U_с^2}{U_г^2} + 2\frac{U_с}{U_г}\cos\Omega t}{1 + \frac{U_с^2}{U_г^2} + 2\frac{U_с}{U_г}}}. \qquad (14\text{-}179)$$

По формуле (14-179) построен график рис. 14-79. Как видно, форма огибающей зависит от отношения $U_с/U_г$. При $\frac{U_с}{U_г} \ll 1$ огибающая близка к синусоиде. Чем больше отношение $U_с/U_г$, тем «глубже» биение и тем сильнее форма огибающей отличается от синусоиды.

Рассмотрим более подробно два частных случая.

1. Пусть напряжение сигнала многим меньше напряжения гетеродина: $U_с \ll U_г$. Тогда векторная диаграмма приобретает вид рис. 14-80, *а*. Из этой диаграммы, а также из формулы (14-175) следует, что угол $\psi_{макс} \approx 0$, т. е. в соответствии с (14-176) можно с достаточной точностью считать, что частота результирующего колебания равна частоте гетеродина, т. е. $\omega \approx \omega_г$.

Далее, так как $\frac{U_с}{U_г} \ll 1$, то, как это следует из (14-178),

$$U \approx U_г \sqrt{1 + 2\frac{U_с}{U_г}\cos\Omega t} \approx$$

$$\approx U_г\left(1 + \frac{U_с}{U_г}\cos\Omega t\right).$$

Обозначив

$$\frac{U_с}{U_г} = m,$$

получим, что

$$U \approx U_г(1 + m\cos\Omega t), \quad (14\text{-}180)$$

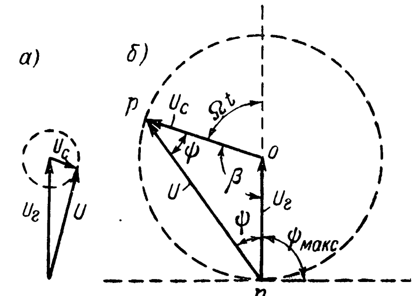


Рис. 14-80. Векторные диаграммы биений: *а* — при $\psi_{макс} \approx 0$; *б* — при $\psi_{макс} = \frac{\pi}{2}$.

т. е. огибающая имеет гармоническую форму (см. также рис. 14-79— кривая для $\frac{U_с}{U_г} = 0{,}1$). Биения в этом случае аналогичны колебанию, модулированному по амплитуде гармоническим сигналом частоты Ω при коэффициенте модуляции m.

2. Напряжения сигнала и гетеродина равны между собой: $U_с = U_г$.

Векторная диаграмма, соответствующая этому случаю, изображена на рис. 14-80, *б*.

Так как теперь треугольник *орп* равнобедренный, то

$$2\psi = \pi - \beta$$

или ввиду того, что $\beta = \pi - \Omega t$,

$$\psi = \frac{\Omega t}{2}$$

и частота результирующего колебания согласно (14-176)

$$\omega = \omega_г + \frac{\Omega}{2} = \frac{\omega_г + \omega_с}{2}. \quad (14\text{-}181)$$

Итак, при $U_с = U_г$ частота результирующего колебания равна полусумме частот складываемых колебаний.

Из (14-178) вытекает, что при $U_с = U_г$ амплитуда биений

$$U = U_г\sqrt{2(1 + \cos\Omega t)} = 2U_г\cos\frac{\Omega t}{2} = 2U_г\cos\frac{\omega_с - \omega_г}{2}, \quad (14\text{-}182)$$

т. е. меняется от нуля до $2U_г = 2U_с$ (см. рис. 14-79 — кривая для $\frac{U_с}{U_г} = 1$).

Если воздействовать биениями на нелинейное сопротивление, их можно преобразовать в колебания разностной частоты Ω, которую иногда называют частотой биений. Для этого достаточно, чтобы нелинейный элемент обладал свойствами амплитудного детектора. Действительно, как мы видели, амплитуда биений изменяется во времени с частотой Ω. Поэтому, продетектировав биения, получим колебания частоты Ω. Если желательно, чтобы эти колебания в точности воспроизводили форму огибающей биений, необходимо применение «линейного» детектора.

Однако задача может быть поставлена иначе. Иногда желательно, чтобы напряжение на выходе детектора имело гармоническую форму при любой глубине биений, т. е. при любом соотношении амплитуд $U_с$ и $U_г$. С этой целью в цепи должен быть применен квадратичный детектор.

В самом деле, если характеристика детектора

$$U_d = kU^2,$$

то, подставив сюда (14-178), получим

$$U_d = k(U_г^2 + U_с^2) + 2kU_г U_с \cos \Omega t. \qquad (14\text{-}183)$$

Детектированное напряжение содержит постоянную слагающую

$$U_{0d} = k(U_г^2 + U_с^2),$$

которая может быть легко отфильтрована, и гармоническую составляющую

$$U_{d\Omega} = 2kU_г U_с \cos \Omega t, \qquad (14\text{-}184)$$

амплитуда которой пропорциональна напряжениям сигнала и гетеродина.

Гетеродинирование находит многообразные применения в радиоэлектронике. Остановимся вкратце на некоторых из них.

Когда сигнал имеет форму «отрезков синусоиды» (например, телеграфный сигнал — см. рис. 14-48), он не может быть непосредственно использован для приведения в действие исполнительного (оконечного) механизма. Высокочастотные незатухающие колебания, составляющие сигнал, должны быть преобразованы или в посылки постоянного напряжения (см. § 14-6), или в колебания низкой (звуковой) частоты, которые могут быть восприняты ухом человека. Последнее преобразование осуществляется путем гетеродинирования.

К детектору (рис. 14-81, *а*) подводятся колебания: сигнала (частоты $f_с = \frac{\omega_с}{2\pi}$) и гетеродина ($f_г = \frac{\omega_г}{2\pi}$). На выходе детектора получаем напряжение разностной частоты

$$F = \frac{\Omega}{2\pi} = f_с - f_г. \qquad (14\text{-}185)$$

В результате высокочастотный телеграфный сигнал трансформируется в сигнал низкой (звуковой) частоты (рис. 14-81, *б*). Интересно отметить, что оператор, регулируя частоту гетеродина, может в широких пределах изменять частоту выходного сигнала F, что иллюстрируется графиком рис. 14-81, *в*, представляющим зависимость частоты биений F от частоты гетеродина $f_г$. При равенстве $f_г = f_с$ частота биений $F = 0$ («нулевые биения»), при отклонении $f_г$ от $f_с$ частота биений $F = |f_с - f_г|$ возрастает. На графике отмечена область

$F_{мин}$ — $F_{макс}$ слышимых частот; им соответствуют те частоты гетеродина — от $f_{г1}$ до $f_{г2}$ и от $f_{г3}$ до $f_{г4}$, при которых выходной сигнал может быть принят на слух.

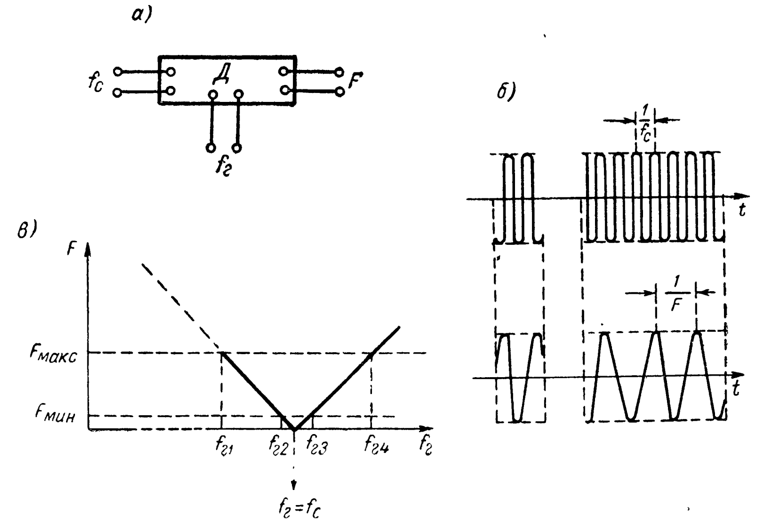


Рис. 14-81. Блок-схема преобразования высокочастотного сигнала в сигнал низкой частоты (*а*) и временные диаграммы сигналов (*б*).

Метод радиоприема, при котором высокочастотные незатухающие колебания сигнала преобразуются в колебания низкой (звуковой) частоты, называется гетеродинным методом.

Положим теперь, что разностная частота $|f_с - f_г|$ выбрана относительно высокой — выше, чем любая из звуковых частот (например, $f_с - f_г = 100$ *кгц*). Тогда на выходе детектора получаются колебания частоты

$$f_{пр} = f_с - f_г, \quad (14\text{-}186)$$

которую называют промежуточной частотой. В результате весь спектр сигнала окажется перемещенным в область более низких частот, как это поясняется графиком рис. 14-82.

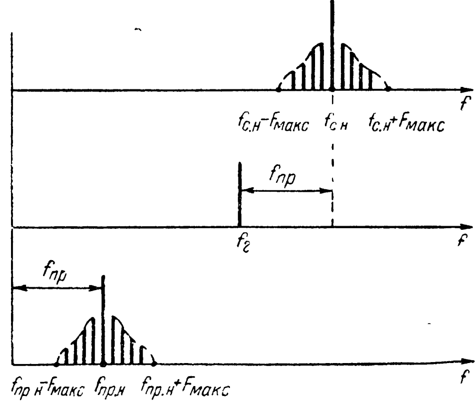


Рис. 14-82. Преобразование спектра сигнала при супергетеродинировании.

Метод радиоприема, при котором высокочастотные колебания радиосигнала преобразуются в колебания иной (более низкой или более высокой) радиочастоты называется супергетеродинным методом.

В супергетеродинном приемнике при изменении несущей частоты радиосигнала $f_{с.н}$ (при переходе на прием другой радиостанции) изменяют одновре-

менно частоту гетеродина так, что промежуточная частота $f_{\text{пр}} = f_{\text{с.п}} - f_{\text{г}}$ остается неизменной. Поэтому усилитель приемного устройства (усилитель промежуточной частоты УПЧ) всегда работает на одних и тех же частотах независимо от частоты принимаемого радиосигнала. В этом заключается решающее достоинство супергетеродинного метода приема. При работе усилителя на фиксированной частоте гораздо легче достичь наилучших (оптимальных) значений всех его важнейших параметров: избирательности, коэффициента усиления и др.

В радиоприемной технике устройство, осуществляющее смещение спектра принимаемого радиосигнала, называют преобразователем частоты. Входящий в состав преобразователя частоты нелинейный элемент (детектор) принято называть смесителем.

Усиленные в УПЧ колебания промежуточной частоты далее усиливаются и детектируются так же, как в простейшем приемнике (см. рис. 12-3).

Большая часть современных радиоприемников строится по супергетеродинной схеме.

В заключение коснемся еще одного применения гетеродинирования, связанного уже не с преобразованием сигналов, а с измерением и контролем частоты колебаний.

Если к нелинейному элементу (детектору) подведены колебания измеряемой частоты f_x, а также колебания эталонной частоты $f_э$, выходное напряжение имеет частоту

$$F = f_x - f_э. \tag{14-187}$$

По величине F можно судить об отклонении измеряемой частоты от эталонной. Если $F = 0$ («нулевые биения»), то $f_x = f_э$.

На этом принципе основано устройство гетеродинных волномеров (частотомеров) и многих измерительных устройств, предназначенных для контроля частоты генераторов.

14-11. Преобразования сигналов в цепях с нелинейными реактивными элементами

Мы изучили различные виды преобразований сигналов в цепях с нелинейными активными сопротивлениями (диод, электронная лампа, транзистор и т. д.). По-видимому, можно осуществить преобразования электрических колебаний так же и в цепях, содержащих нелинейные энергоемкие элементы: индуктивности или емкости.

Рассмотрим некоторые из этих преобразований.

а) Магнитные и диэлектрические усилители

Реактивные (магнитные и диэлектрические) усилители являются разновидностями общей усилительной системы, рассмотренной в § 14-2 (см. рис. 14-3). В этих усилителях в качестве элементов, управляющих поступлением энергии первичного источника в нагрузку, используются нелинейные реактивности.

В магнитном усилителе таким элементом является нелинейная индуктивность, а в диэлектрическом — нелинейная емкость.

На рис. 14-83, *а* показана простейшая схема магнитного усилителя.

На ферромагнитном сердечнике помещены две обмотки. Одна из них — рабочая, имеющая n витков, — включена последова-

тельно с сопротивлением нагрузки R в цепь первичного источника энергии, развивающего гармоническое напряжение с амплитудой U и частотой ω. Через вторую обмотку, имеющую n_0 витков и назы-

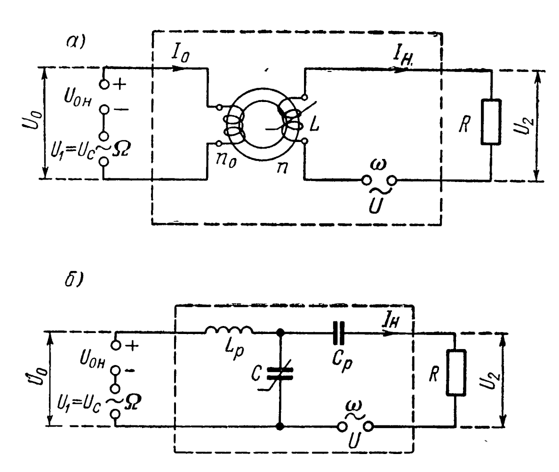


Рис. 14-83. Магнитный (*а*) и диэлектрический (*б*) усилители.

ваемую управляющей, пропускается ток I_0, создаваемый источником возбуждения U_0. От величины управляющего тока I_0 зависит степень намагничивания сердечника, т. е. положение исходной рабочей точки на кривой намагничивания сердечника $B =$

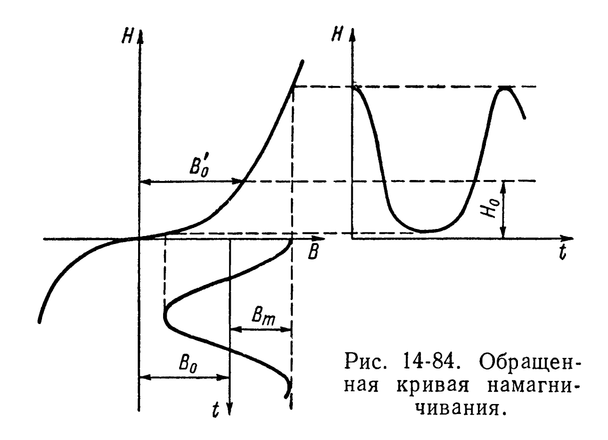


Рис. 14-84. Обращенная кривая намагничивания.

$= f(H)$ — см. рис. 14-84. Вследствие нелинейности функции $B = f(H)$ изменение управляющего тока I_0 влечет за собой изменение индуктивности L рабочей обмотки, а значит, при заданном напряжении U тока нагрузки $I_н$ и мощности, расходуемой в сопротивлении

R. Если же напряжение возбуждения U_0 колеблется около своего среднего значения $U_{0н}$ по гармоническому закону с частотой Ω, т. е.

$$U_0 = U_{0н} + U_c \cos \Omega t, \tag{14-188}$$

то соответственно будет изменяться как управляющий ток, так и амплитуда рабочего тока $I_н$.

Аналогично в схеме диэлектрического усилителя (рис. 14-83, *б*) нелинейная емкость C включена в цепь первичного источника энергии U и сопротивления нагрузки R. В то же время к емкости подведено управляющее напряжение U_0, величина которого определяет положение рабочей точки на кулон-вольтной характеристике емкости. Так как эта характеристика нелинейна, то, регулируя напряжение U_0, изменяем величину емкости, а значит, и тока $I_н$ в рабочей цепи. Дроссель $L_р$ и емкость $C_р$ служат для разделения цепей управления и нагрузки. Индуктивность $L_р$ должна представлять большое сопротивление для токов частоты ω и малое сопротивление для частоты управляющего сигнала Ω; разделительная емкость $C_р$ должна иметь малое сопротивление для частоты ω и большое для частоты Ω. Заметим, что в магнитном усилителе нет нужды в таком разделении управляющей и рабочей цепи, так как обмотка управления и рабочая обмотка электрически между собой не связаны, а связаны только магнитно.

В обеих схемах усилителей, затрачивая малую мощность в активном сопротивлении цепи возбуждения, управляем относительно большой мощностью в рабочей цепи.

Даже из этого беглого рассмотрения реактивных усилителей можно сделать вывод, что они обладают следующими существенными особенностями:

1. Для питания рабочей цепи усилителей принципиально необходим источник переменного напряжения, так как путем изменения реактивного сопротивления можно управлять лишь величиной переменного тока.

2. Управляющее напряжение (ток) сигнала может быть сколь угодно медленно меняющимся. В частности, возможно управление током нагрузки $I_н$ путем изменения (переключения) постоянного тока в цепи управления.

3. Так как на сопротивлении нагрузки R получается переменное напряжение u_2, амплитуда которого меняется в соответствии с управляющим сигналом $U_c(\Omega)$, то процессы в усилителях можно рассматривать как амплитудную модуляцию колебаний частоты ω сигналом, имеющим частоту Ω. Очевидно, необходимо, чтобы частота первичного источника значительно (раз в 10) превосходила частоту сигнала: $\omega \gg \Omega$.

Если желательно, чтобы выходное напряжение усилителя воспроизводило форму сигнала, т. е. имело частоту Ω, необходимо напряжение u_2 дополнительно продетектировать в амплитудном детекторе.

Рассмотрим теперь более подробно **магнитный усилитель** (рис. 14-83, *а*).

Будем для простоты пренебрегать активным сопротивлением рабочей обмотки n и, кроме того, предположим, что сопротивление нагрузки R многим меньше индуктивного сопротивления рабочей обмотки.

Тогда можно приближенно считать, что к рабочей обмотке приложено гармоническое напряжение источника $U\cos\omega t$.

В § 10-10 было показано, что когда нелинейная индуктивность находится под воздействием гармонического напряжения, то полный магнитный поток $\Phi = n\Phi'$ изменяется также по гармоническому закону:

$$\Phi = \Phi_m \cos\omega t,$$

где амплитуда магнитного потока

$$\Phi_m = \frac{U}{\omega}.$$

Так как $\Phi_m = nB_mS$, где B_m — амплитуда индукции в сердечнике, то

$$B_m = \frac{\Phi_m}{nS} = \frac{U}{n\omega S}, \qquad (14\text{-}189)$$

т. е. находится в прямой зависимости от амплитуды U напряжения источника.

В нашем случае сердечник намагничивается не только переменным током рабочей цепи, но и постоянным током цепи управления. Поэтому

$$B = B_0 + B_m \cos\omega t, \qquad (14\text{-}190)$$

где B_0 — постоянная слагающая индукции, обязанная своим существованием действию обмотки управления.

Для изучения магнитного состояния сердечника удобно воспользоваться обращенной характеристикой намагничивания $H = F(B)$.

Пренебрегая гистерезисом, примем в качестве аппроксимирующего уравнения кривой $H = F(B)$ укороченный полином третьей степени вида

$$H = \alpha_1 B + \alpha_3 B^3. \qquad (14\text{-}191)$$

Такая аппроксимация (рис. 14-84), хотя и неточна, но дает возможность удовлетворительно выявить качественную картину явлений.

Подставив (14-190) в (14-191), найдем, что напряженность магнитного поля, соответствующая заданному закону изменения индукции, будет

$$H = \alpha_1 (B_0 + B_m \cos\omega t) + \alpha_3 (B_0 + B_m \cos\omega t)^3. \qquad (14\text{-}192)$$

Нетрудно видеть, что H изменяется во времени по сложному закону. Функция $H(t)$ содержит постоянную слагающую H_0, основную (первую) гармонику с амплитудой H_1, вторую гармонику (H_2) и третью гармонику (H_3).

Представив (14-192) в развернутом виде или воспользовавшись справочной табл. 10-6, получим, что

$$H_0 = \alpha_1 B_0 + \alpha_3 B_0^3 + \frac{3B_0B_m^2}{2}\alpha_3; \qquad (14\text{-}193)$$

$$H_1 = \alpha_1 B_m + 3\alpha_3 \left(\frac{B_m^2}{4} + B_0^2\right) B_m; \qquad (14\text{-}194)$$

$$H_2 = \frac{3}{2}\alpha_3 B_0 B_m^2; \qquad (14\text{-}195)$$

$$H_3 = \frac{1}{4}\alpha_3 B_m^3. \qquad (14\text{-}196)$$

К этим же выводам приводит и рассмотрение графика рис. 14-84. Построенная здесь кривая $H(t)$ имеет искаженную (заостренную) форму и содержит постоянную слагающую H_0.

Интересно отметить, что если бы сердечник был намагничен только постоянным током (т. е. $H = H_0$), индукция была бы $B_0' > B_0$. Наличие же одновременно действующего переменного намагничивания приводит, благодаря нелинейности характеристики, к уменьшению постоянной слагающей индукции до величины B_0. Вообще всякое изменение величины переменной слагающей индукции B_m влечет за собой изменение соотношения между H_0 и B_0 — см. (14-193).

Согласно (10-92) между напряженностью магнитного поля H и намагничивающим током I существует прямая зависимость, а именно

$$H = \frac{In}{l},$$

где l — средняя длина магнитопровода.

В рабочей обмотке постоянный ток отсутствует. Отсюда следует, что постоянная напряженность поля H_0 вызывается только током управляющей обмотки n, причем

$$H_0 = \frac{n_0}{l} I_0. \tag{14-197}$$

Все переменные слагающие H связаны с током в рабочей обмотке и, так как $H(t)$ имеет негармоническую форму, ток в рабочей цепи имеет искаженную (несинусоидальную) форму. Первая гармоника этого тока связана с амплитудой первой гармоники поля зависимостью

$$H_1 = \frac{n}{l} I_1, \tag{14-198}$$

вообще для k-ой гармоники

$$H_k = \frac{n}{l} I_k.$$

Индуктивность рабочей обмотки, которая определяет величину тока нагрузки, пропорциональна магнитной проницаемости сердечника.

Средняя магнитная проницаемость

$$\mu_{ср} = \frac{B_m}{H_1} \tag{14-199}$$

близка по своей величине к эффективной проницаемости

$$\mu_э = \frac{B_д}{H_д}, \tag{14-200}$$

где $B_д$ и $H_д$ — действующие значения переменных слагающих индукции и напряженности магнитного поля.

Для нахождения $\mu_{ср} \approx \mu_э$ подставим значение H_1 из (14-194) в (14-199). Тогда получим

$$\mu_{ср} = \frac{1}{\alpha_1 + 3\alpha_3\left(\frac{B_m^2}{4} + B_0^2\right)}. \tag{14-201}$$

Магнитная проницаемость является, таким образом, нелинейной функцией как амплитуды переменной слагающей индукции B_m, так и постоянной индукции B_0. На рис. 14-85 приведено семейство кривых $\mu_{ср} = f(B_0)$ при $B_m = \text{const}$. Как видно, при заданном B_m (т. е. при заданном напряжении питания U) маг-

нитная проницаемость $\mu_{ср} \approx \mu_э$ существенно зависит от постоянной индукции, уменьшаясь с ее увеличением. Поэтому, изменяя постоянное подмагничивание B_0, действительно можно в широких пределах варьировать магнитную проницаемость, а стало быть, и индуктивность рабочей обмотки.

Надо иметь в виду, что эффективность воздействия постоянного подмагничивания особенно велика, когда амплитуда B_m (соответственно и амплитуда U) равна нулю или достаточно мала (рис. 14-85). При больших амплитудах переменного напряжения изменение B_0 почти не влияет на величину $\mu_{ср}$.

Магнитный усилитель является нелинейным преобразователем. В качестве характеристики нелинейного преобразования будем в данном случае считать зависимость амплитуды первой гармоники тока нагрузки I_1 от управляющего тока I_0:

$$I_1 = f(I_0). \qquad (14\text{-}202)$$

Эту зависимость иначе называют **характеристикой усиления**.

Приняв во внимание (14-197) и (14-198), характеристикой усиления можем считать также функцию

$$H_1 = f(H_0). \qquad (14\text{-}203)$$

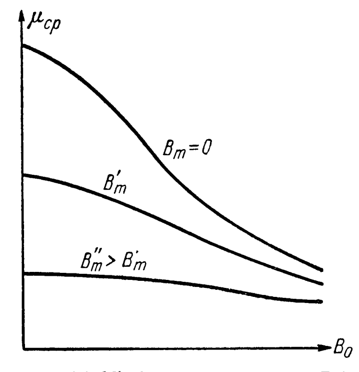


Рис. 14-85. Зависимость $\mu_{ср}(B_0)$.

Для определения вида этой функции обратимся к уравнению (14-194). Оно дает связь между H_1 и B_0 (а не H_0). С другой стороны, выражение (14-193) устанавливает связь между H_0 и B_0, которая иллюстрируется рис. 14-86, *а*. Для заданной величины B_m (напряжения питания U) находим из (14-194) зависимость $H_1 = f(B_0)$, а воспользовавшись (14-193), — искомую функцию $H_1 = f(H_0)$.

В результате этих расчетов получим кривую, показанную на рис. 14-86,*б*. Характеристика усиления симметрична относительно оси ординат, т. е. нечувствительна к знаку постоянного подмагничивания. Это — следствие того, что функция $H = f(B)$ нечетная (см. рис. 14-84). Значительная часть характеристики усиления, как видно, близка к прямой линии. Это означает, что при соответствующем выборе начального тока подмагничивания $I_{0н}$ (т. е. начального напряжения смещения $U_{0н}$) амплитуда выходного тока нагрузки $I_1 \approx I$ изменяется пропорционально переменной слагающей управляющего тока ΔI_0, т. е. по закону управляющего сигнала.

Крутизну характеристики усиления

$$K_i = \frac{dI_1}{dI_0} \approx \frac{\Delta I_1}{\Delta I_0} \qquad (14\text{-}204)$$

называют **коэффициентом усиления тока**.

Найдем, от каких факторов зависит коэффициент усиления K_i.

Прежде всего на основании (14-197) и (14-198) можно записать

$$K_i = \frac{n_0}{n} \cdot \frac{dH_1}{dH_0}. \qquad (14\text{-}205)$$

Для определения производной dH_1/dH_0 примем во внимание следующие функциональные зависимости:

а) на основании (14-199) $H_1 = f_1(\mu_{ср})$;

б) на основании (14-201) $\mu_{ср} = f_2(B_0)$;

в) на основании (14-193) $B_0 = f_3(H_0)$.

Применяя «цепное правило» дифференцирования, найдем, что

$$\frac{dH_1}{dH_0} = \frac{dH_1}{d\mu_{ср}} \cdot \frac{d\mu_{ср}}{dB_0} \cdot \frac{dB_0}{dH_0}. \qquad (14\text{-}206)$$

Первый из входящих сюда множителей, как это следует из (14-199),

$$\frac{dH_1}{d\mu_{\text{ср}}} = -\frac{B_m}{\mu^2_{\text{ср}}}. \tag{14-207}$$

Поэтому

$$K_i = -\frac{n_0}{n} \cdot \frac{B_m}{\mu^2_{\text{ср}}} \cdot \frac{d\mu_{\text{ср}}}{dB_0} \cdot \frac{dB_0}{dH_0}. \tag{14-208}$$

Из этого выражения могут быть сделаны следующие выводы.

1. При прочих равных условиях коэффициент усиления пропорционален отношению числа витков n_0/n обмотки управления и рабочей обмотки.

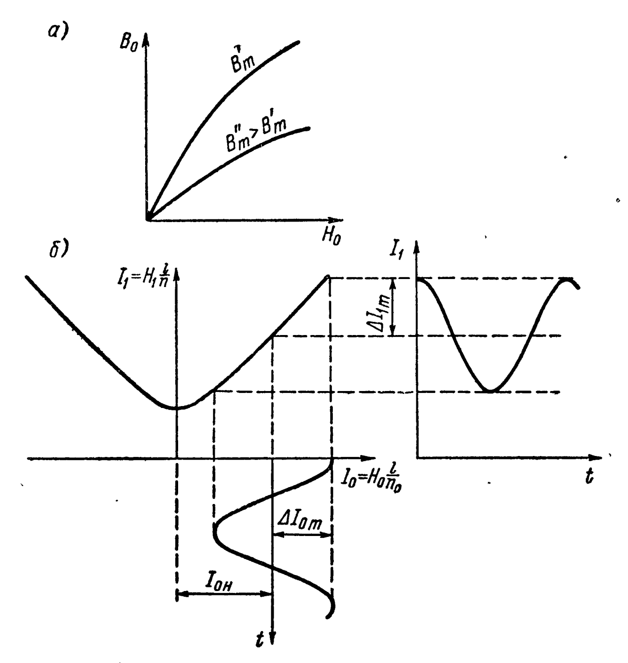


Рис. 14-86. Режим работы магнитного усилителя.

2. Коэффициент усиления существенно зависит от амплитуды переменной слагающей индукции B_m.

С одной стороны, как это следует из рис. 14-85, с увеличением B_m проницаемость $\mu_{\text{ср}}$ уменьшается. Поэтому коэффициент $B_m/\mu_{\text{ср}}$ быстро увеличивается с возрастанием B_m.

Однако, с другой стороны, из того же рис. 14-85 видно, что абсолютная величина производной $d\mu_{\text{ср}}/dB_0$ уменьшается с увеличением B_m. Также и производная dB_0/dH_0, как показывает рис. 14-86, *а*, падает при возрастании B_m. Из сказанного вытекает, что при прочих равных условиях имеется наивыгоднейшее значение B_m (т. е. наивыгоднейшая величина питающего напряжения U), при котором коэффициент усиления достигает максимума.

Простейшая схема магнитного усилителя (рис. 14-83, *а*) обладает серьезным недостатком. Ток рабочей обмотки индуктирует в обмотке управления э. д. с. (как в обычном трансформаторе), и, так как коэффициент трансформации n_0/n берется большим для получения высокого коэффициента усиления, индук-

тированное напряжение может быть весьма большим. Следствием этого являются бесполезные потери энергии в обмотке управления и затруднения в обеспечении должной изоляции обмотки.

Для устранения этого недостатка применяется схема магнитного усилителя, содержащая два сердечника (рис. 14-87). Обмотки управления n_{01} и n_{02} соединены навстречу друг другу. Это обстоятельство на усилительных свойствах схемы не сказывается, но индуктируемые в этих обмотках э. д. с. взаимно ком-

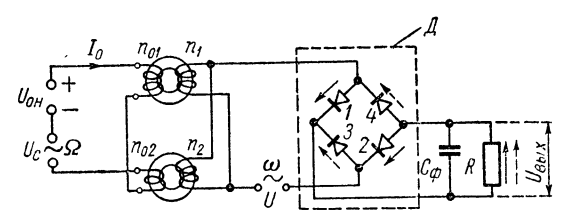


Рис. 14-87. Магнитный усилитель с двумя сердечниками.

пенсируются. Рабочие обмотки n_1 и n_2 соединяются или параллельно, как это показано на рис. 14-87, или последовательно.

В схеме рис. 14-87 усиленный ток выпрямляется (детектируется) детектором *Д*, состоящим из четырех вентилей. При одной полярности напряжения усиленный ток замыкается через вентиль *1*, сопротивление нагрузки *R* и вентиль *2*. В следующий полупериод ток замыкается через вентиль *3*, вновь через сопротивление нагрузки *R* и через вентиль *4*. Таким образом, выходное напряжение $U_{вых}$ оказывается выпрямленным и изменяющимся по величине по закону управляющего сигнала с частотой Ω. Емкость $C_ф$ служит для фильтрации «высоких» частот, кратных частоте ω.

Основные соотношения, имеющие место в диэлектрическом усилителе, могут быть получены подобно тому, как это было сделано для магнитного усилителя.

Кулон-вольтную характеристику нелинейной емкости аппроксимируем укороченным полиномом третьей степени (10-108):

$$q = a_1 u_C - a_3 u_C^3. \qquad (14\text{-}209)$$

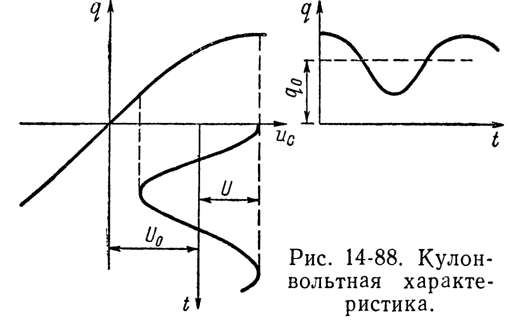


Рис. 14-88. Кулон-вольтная характеристика.

Полагаем для простоты, что сопротивление нагрузки *R* (см. рис. 14-83, *б*) и емкостное сопротивление разделительной емкости $C_р$ многим меньше сопротивления нелинейной емкости. Тогда напряжение источника питания *U* оказывается приложенным непосредственно к нелинейной емкости. На последнюю воздействует, кроме того, постоянное (управляющее) напряжение U_0, так что

$$u_C = U_0 + U\cos \omega t.$$

Подставляя это в (14-209), получим

$$q = a_1 (U_0 + U\cos \omega t) - a_3 (U_0 + U\cos \omega t)^3. \qquad (14\text{-}210)$$

Заряд q изменяется во времени по сложному закону. Функция $q(t)$ содержит постоянную слагающую q_0 и составляющие первой, второй и третьей гармо-

ник (рис. 14-88). Представив (14-210) в развернутом виде, найдем, что амплитуда первой гармоники заряда

$$q_{m1} = a_1 U - 3a_3 \left(\frac{U^2}{4} + U_0^2 \right) U. \qquad (14\text{-}211)$$

Из выражения (14-211) следует, что средняя емкость, приближенно равная эффективной емкости, будет

$$C_э \approx C_{ср} = \frac{q_{m1}}{U} = a_1 - 3a_3 \left(\frac{U^2}{4} + U_0^2 \right). \qquad (14\text{-}212)$$

Амплитуда первой гармоники нагрузочного тока при заданном напряжении питания U

$$I_1 = \omega q_{m1} = \omega C_{ср} U = \omega \left[a_1 - 3a_3 \left(\frac{U^2}{4} + U_0^2 \right) \right] U. \qquad (14\text{-}213)$$

На рис. 14-89 изображена рассчитанная по (14-213) кривая $I_1 = f(U_0)$ при $U = \text{const}$. Она свидетельствует о том, что регулируя управляющее напряжение U_0, можно изменять в широких пределах среднюю емкость, а значит, и ток нагрузки. Кривая

$$I_1 = f(U_0) \qquad (14\text{-}214)$$

является характеристикой нелинейного преобразования диэлектрического усилителя.

Крутизна этой кривой в соответствии с (14-213)

$$S_{пр} = \frac{dI_1}{dU_0} = -6\omega a_3 U U_0. \qquad (14\text{-}215)$$

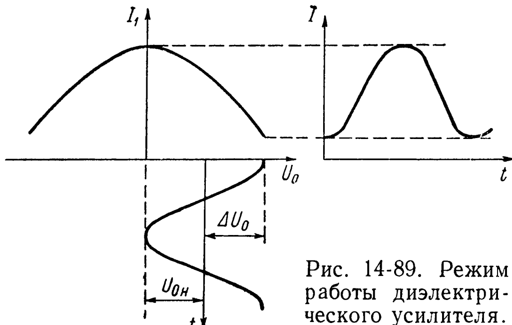


Рис. 14-89. Режим работы диэлектрического усилителя.

Под коэффициентом усиления напряжения усилителя понимают величину

$$K_u = \frac{dU_{вых}}{dU_0} \approx \frac{\Delta U_{вых}}{\Delta U_0}.$$

Здесь $dU_{вых} = R dI_1$. Поэтому

$$K_u = S_{пр} R = -6\omega R a_3 U U_0. \qquad (14\text{-}216)$$

Отсюда следует, что исходное смещение $U_{0н}$ должно быть выбрано не слишком малым (рис. 14-89), так как при $U_0 \to 0$ коэффициент усиления $K_u \to 0$.

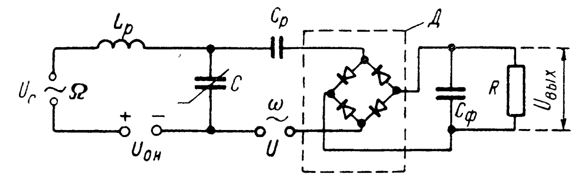


Рис. 14-90. Диэлектрический усилитель.

Далее из (14-216) вытекает, что с увеличением U хотя емкость $C_{ср}$ уменьшается — см. (14-212), крутизна $S_{пр}$, а стало быть, и коэффициент усиления растут. Наконец, так же, как в ламповом усилителе, желательно, чтобы со-

противление нагрузки R было велико. Необходимо, однако, не забывать о сделанном допущении, что $R \ll \frac{1}{\omega C_{ср}}$.

На рис. 14-90 приведена одна из возможных схем диэлектрического усилителя, в которой применен детектор (выпрямитель) *Д*, благодаря чему выходное напряжение $U_{вых}$ содержит только постоянную слагающую и составляющую напряжения частоты управляющего сигнала Ω.

б) Энергетика преобразования сигналов в нелинейных реактивных цепях. Теорема Мэнли и Роу

Изменение формы электрических колебаний в нелинейных реактивных цепях (в частности, в рассмотренных выше магнитных и диэлектрических усилителях) связано с преобразованием энергии внешних источников в энергию колебаний новых частот — энергию продуктов нелинейности.

Для цепи, содержащей нелинейный реактивный элемент, могут быть установлены весьма общие энергетические соотношения, которые существенно облегчают анализ разных схем преобразования сигналов.

Пусть нелинейная емкость C (рис. 14-91) находится под воздействием двух источников гармонических колебаний, имеющих частоты

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \text{ и } f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}.$$

В цепи возникает множество колебаний кратных и комбинационных частот вида $mf_0 + nf_1$, где m и n — любые целые числа (0, 1, 2, 3, ...) — положительные и отрицательные.

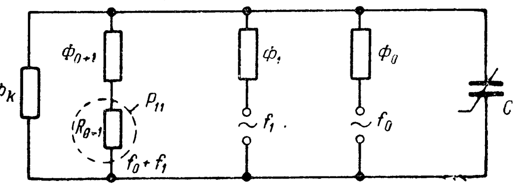


Рис. 14-91. Сложное воздействие на нелинейную емкость (выделение колебаний суммарной частоты).

В схеме рис. 14-91 участвуют идеальные (без потерь) фильтры, обозначенные буквами $Ф$, причем фильтры $Ф_0$ и $Ф_1$ пропускают только частоты f_0 и f_1 соответственно; $Ф_{0+1}$ прозрачен только для суммарной комбинационной частоты $f_0 + f_1$; фильтр $Ф_k$ пропускает все остальные продукты нелинейности и не пропускает колебания частот f_0, f_1 и $f_0 + f_1$.

Согласно закону сохранения энергии сумма всех активных (средних) мощностей в системе равна нулю:

$$P = \sum P_{mn} = 0, \tag{14-217}$$

где P_{mn} — мощность колебаний составляющей, имеющей частоту $mf_0 + nf_1$.

Для рассматриваемой схемы уравнение (14-217) принимает вид

$$P = P_{1\,0} + P_{0\,1} + P_{1\,1} = 0; \tag{14-218}$$

здесь $P_{1\,0}$; $P_{0\,1}$; $P_{1\,1}$ — соответственно мощности колебаний, имеющих частоты f_0, f_1 и $f_0 + f_1$.

Активные мощности всех остальных составляющих равны нулю, так как для них цепь рис. 14-91 имеет чисто реактивный характер.

Умножив и разделив каждое из слагаемых выражения (14-218) на соответствующие частоты (f_0; f_1; $f_0 + f_1$), получим

$$\frac{f_0 P_{1\,0}}{f_0} + \frac{f_1 P_{0\,1}}{f_1} + \frac{(f_0 + f_1) P_{1\,1}}{f_0 + f_1} = 0$$

или

$$f_0\left(\frac{P_{1\,0}}{f_0} + \frac{P_{1\,1}}{f_0 + f_1}\right) + f_1\left(\frac{P_{0\,1}}{f_1} + \frac{P_{1\,1}}{f_0 + f_1}\right) = 0. \tag{14-219}$$

Здесь

$\frac{P_{1\,0}}{f_0} = T_0 P_{1\,0}$ — энергия, расходуемая за один период колебания частоты $f_0 = \frac{1}{T_0}$;

$\frac{P_{0\,1}}{f_1} = T_1 P_{0\,1}$ — энергия, расходуемая за один период колебания частоты $f_1 = \frac{1}{T_1}$;

$\frac{P_{1\,1}}{f_0 + f_1} = T_{0\,1} P_{1\,1}$ — энергия, расходуемая за один период колебания суммарной частоты $f_0 + f_1 = \frac{1}{T_{0\,1}}$.

Выражение (14-219) можно записать так:

$$f_0 W' + f_1 W'' = 0, \tag{14-220}$$

где

$$W' = T_0 P_{1\,0} + T_{0\,1} P_{1\,1};$$
$$W'' = T_1 P_{0\,1} + T_{0\,1} P_{1\,1}.$$

Представим себе теперь совокупность нескольких цепей; пусть каждая из них содержит одну и ту же нелинейную емкость, но частоты f_0 и f_1 генераторов, действующих в них, различны. Остальные параметры цепей (сопротивления нагрузки, напряжения генераторов) могут быть подобраны так, что величины энергии, расходуемой за один период каждого из колебаний ($T_0 P_{1\,0}$; $T_1 P_{0\,1}$; $T_{0\,1} P_{1\,1}$) остаются одинаковыми во всех цепях. Значит, уравнение (14-219) должно быть справедливо для любого сочетания величин f_0 и f_1, что, очевидно, возможно только при условии, что каждое из слагаемых (14-220) в отдельности равно нулю, т. е. $W' = 0$; $W'' = 0$ или

$$\frac{P_{1\,0}}{f_0} + \frac{P_{1\,1}}{f_0 + f_1} = 0; \tag{14-221}$$

$$\frac{P_{0\,1}}{f_1} + \frac{P_{1\,1}}{f_0 + f_1} = 0. \tag{14-222}$$

Эти соотношения, разумеется, справедливы и для линейной цепи. Действительно, в цепи с линейной емкостью комбинационные колебания отсутствуют и, значит, $P_{1\,1} = 0$. Тогда (14-221) и (14-222) превращаются в очевидные равенства: $P_{1\,0} = 0$ и $P_{0\,1} = 0$.

В нелинейной цепи мощности $P_{1\,0}$ и $P_{0\,1}$ могут быть не равны нулю. Имеем

$$P_{1\,0} = -\frac{f_0}{f_0 + f_1} P_{1\,1}; \qquad (14\text{-}223)$$

$$P_{0\,1} = -\frac{f_1}{f_0 + f_1} P_{1\,1}. \qquad (14\text{-}224)$$

Относительно знаков мощностей надо отметить следующее. Энергия в замкнутой системе может или генерироваться, или поглощаться.

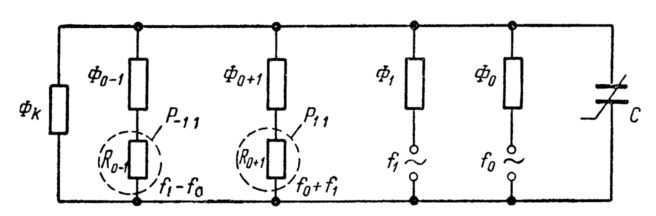


Рис. 14-92. Сложное воздействие на нелинейную емкость (выделение колебаний суммарной и разностной частот).

Будем условно считать генерируемую мощность положительной ($P > 0$), а мощность, поглощаемую в цепи — отрицательной ($P < 0$).

В нашей цепи мощность $P_{1\,1} < 0$, так как для суммарной частоты цепь пассивна — мощность колебаний частоты $f_0 + f_1$ расходуется в сопротивлении R_{0+1}. Из (14-223) и (14-224) следует, что

$$P_{1\,0} > 0, \quad P_{0\,1} > 0.$$

Это означает, что энергия обоих источников преобразуется с помощью нелинейной емкости в энергию колебаний суммарной частоты $f_0 + f_1$.

Складывая почленно (14-223) и (14-224), получим

$$P_{1\,0} + P_{0\,1} = -P_{1\,1}. \qquad (14\text{-}225)$$

Как видно, при чисто реактивном характере нелинейного элемента вся энергия источников преобразуется в энергию продукта нелинейности, т. е. преобразование может происходить с коэффициентом полезного действия, равным единице.

Если бы в системе была создана пассивная (поглощающая) цепь не только для суммарной, но и для разностной частоты $f_1 - f_0$ (т. е. $m = -1$; $n = 1$), как это показано на рис. 14-92, то вместо (14-218) мы получили бы

$$P_{1\,0} + P_{0\,1} + P_{1\,1} + P_{-1\,1} = 0,$$

где $P_{-1\,1}$ — мощность колебаний частоты $f_1 - f_0$, расходуемая в сопротивлении R_{0-1}.

Уравнения (14-221) и (14-222) приобретают в этом случае вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{P_{1\,0}}{f_0} + \frac{P_{1\,1}}{f_0 + f_1} - \frac{P_{-1\,1}}{f_1 - f_0} = 0, \\ \frac{P_{0\,1}}{f_1} + \frac{P_{1\,1}}{f_0 + f_1} + \frac{P_{-1\,1}}{f_1 - f_0} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (14\text{-}226)$$

Энергетические соотношения, полученные для частного случая, когда мощность в цепи расходуется только на суммарной и разностной частотах, могут быть распространены на общий случай, когда для всех частот вида $mf_0 + nf_1$ созданы пассивные (поглощающие энергию) участки цепи.

Для общего случая получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{mP_{mn}}{mf_0 + nf_1} = 0; \quad (14\text{-}227)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nP_{mn}}{mf_0 + nf_1} = 0. \quad (14\text{-}228)$$

Эти выражения называют в литературе соотношениями Мэнли и Роу.

Для того чтобы показать, как составляются уравнения в каком-либо конкретном случае, положим в качестве примера, что нас интересует составляющая частоты $3f_0 - 2f_1$, причем $3f_0 > 2f_1$.

В уравнении (14-227) суммирование по m производится только для положительных значений m; тогда для получения разностной частоты следует брать n со свойственным ему знаком ($n = -2$). Слагаемое первого уравнения, соответствующее частоте $3f_0 - 2f_1$, будет

$$\frac{3P_{3,\,-2}}{3f_0 - 2f_1}.$$

В уравнении (14-228) участвуют только положительные значения n; поэтому в нашем случае следует брать $n = +2$. Что касается величины m, то ее для получения разностной частоты надо считать $m = -3$. Тогда слагаемое второго уравнения, соответствующее частоте $3f_0 - 2f_1$, будет иметь значение

$$\frac{2P_{-3,\,+2}}{-3f_0 + 2f_1} = -\frac{2P_{3,\,-2}}{3f_0 - 2f_1}.$$

Соотношения Мэнли и Роу позволяют производить энергетический анализ самых различных схем преобразования сигналов.

Рассмотрим, например, линейный усилитель сигналов частоты f_0, питаемый источником постоянного тока. Так как продукты нелинейности в этом случае равны нулю, то (14-217) приводит к тому, что

$$P_{1\,0} + P_{0\,0} = 0, \quad (14\text{-}229)$$

где P_{00} — мощность постоянного тока;

P_{10} — мощность колебаний частоты f_0.

Мощность постоянного тока доставляется в цепь; она положительна ($P_{00} > 0$). Мощность переменного тока поглощается нагрузкой; она отрицательна ($P_{10} < 0$). Их сумма, разумеется, равна нулю. В усилителе мощность P_{10}, в свою очередь, складывается из отрицательной величины, соответствующей энергии, расходуемой в нагрузке, и положительной мощности, генерируемой источником сигнала. Энергия постоянного тока также является суммой положительной энергии, доставляемой в систему генератором постоянного тока, и отрицательной энергии, теряемой в сопротивлениях схемы.

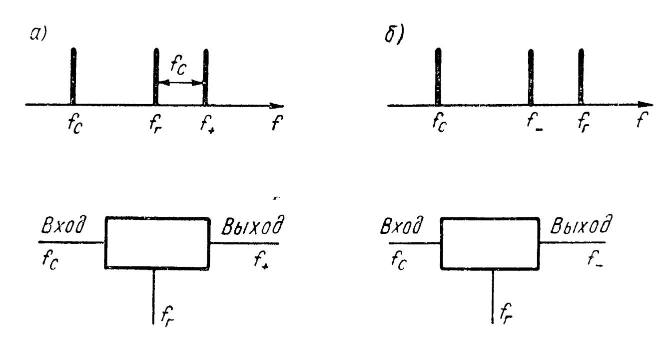


Рис. 14-93. Преобразование частоты в нелинейной реактивной цепи.

В качестве примера преобразований в цепи с нелинейной реактивностью рассмотрим задачу смещения спектра управляющего (низкочастотного) сигнала f_c (рис. 14-93) в область более высоких частот путем воздействия на нелинейный реактивный элемент колебаний двух частот: сигнала f_c и гетеродина $f_г$.

Возможны два варианта решения этой задачи.

В первом из них (рис. 14-93, *а*) на выходе системы используются колебания суммарной частоты

$$f_+ = f_c + f_г.$$

Для колебаний этой частоты должна быть создана пассивная (поглощающая энергию) цепь; для остальных комбинационных частот цепь реактивна. Этот режим работы системы можно условно назвать преобразованием частоты «вверх». Иногда подобное устройство называют непреобразующим модулятором.

Если положить

$$f_0 = f_c; \quad f_1 = f_г; \quad f_0 + f_1 = f_+; \quad P_{10} = P_г; \quad P_{01} = P_c; \quad P_{11} = P_+,$$

то энергетические процессы системы описываются следующими уравнениями, получаемыми из (14-221) и (14-222):

$$\left.\begin{aligned} \frac{P_г}{f_г}+\frac{P_+}{f_+}=0; \quad (14\text{-}230)\\ \frac{P_с}{f_с}+\frac{P_+}{f_+}=0. \quad (14\text{-}231)\end{aligned}\right\}$$

Здесь $P_с$, $P_г$ и P_+ — соответственно мощности входного сигнала, гетеродина и смещенного по шкале частот сигнала.

Мощность $P_+ < 0$, так как цепь для частоты f_+ пассивна. Тогда, как это следует из (14-230) и (14-231), $P_с > 0$; $P_г > 0$.

Как источник сигнала, так и гетеродин отдают в цепь энергию, которая преобразуется в энергию колебаний суммарной частоты f_+.

Из (14-231) вытекает, что коэффициент усиления мощности, равный отношению мощностей на выходе P_+ и на входе $P_с$,

$$\left|\frac{P_+}{P_с}\right|=\frac{f_+}{f_с}. \quad (14\text{-}232)$$

Так как $f_+ \gg f_с$, то с помощью малой мощности на входе $P_с$ можно управлять большой мощностью местного гетеродина.

Об этом же говорит и соотношение мощностей $P_г$ и $P_с$, которое нетрудно получить, вычтя (14-231) из (14-230),

$$\left|\frac{P_г}{P_с}\right|=\frac{f_г}{f_с}; \quad (14\text{-}233)$$

так как $f_г \gg f_с$, то $\frac{P_г}{P_с} \gg 1$.

Рассмотрим теперь второй вариант преобразования частоты (рис. 14-93, *б*), который может быть назван преобразованием «вниз». Иначе эту систему называют преобразующим модулятором.

В качестве частоты выходного сигнала здесь используется разностная частота

$$f_- = f_г - f_с.$$

Энергетические соотношения в этой системе описываются уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{P_г}{f_г}+\frac{P_-}{f_-}=0, \quad (14\text{-}234)\\ \frac{P_с}{f_с}-\frac{P_-}{f_-}=0, \quad (14\text{-}235)\end{aligned}\right\}$$

где P_- — мощность колебаний разностной частоты.

Так как для колебаний частоты f_- имеется потребляющая энергию цепь, то $P_- < 0$. Из (14-235) следует, что мощность $P_с$ имеет тот же знак, что и P_-, т. е. $P_с < 0$.

В отличие от предыдущего варианта, мощность колебаний частоты сигнала не поступает в систему, а наоборот, расходуется в цепи.

Что касается мощности гетеродина, то она, разумеется, положительна: $P_г > 0$ [см. (14-234)].

Итак, гетеродин отдает мощность в систему, где она преобразуется в мощности $P_с$ и P_-.

Отношение мощностей P_- и $P_с$ (обе они поглощаются в цепи):

$$\left|\frac{P_-}{P_с}\right| = \frac{f_-}{f_с};$$

так как $f_- \gg f_с$, то $\left|\frac{P_-}{P_с}\right| \gg 1$.

Интересная особенность схемы преобразования «вниз» состоит в том, что принципиально она может не содержать источника сигнала (частоты $f_с$). Система может питаться только от гетеродина, доставляющего мощность $P_г > 0$, и создавать (генерировать) колебания двух частот: $f_с$ и f_- с мощностями $P_с < 0$ и $P_- < 0$. Иными словами, данная система потенциально неустойчива. [1]

В заключение надо отметить, что соотношения Мэнли и Роу представляют количественное выражение потенциальных возможностей цепей. Для их реализации необходим соответствующий выбор параметров схемы. В частности, мощность на нежелательных частотах в действительных цепях не равна нулю. Поэтому действительные характеристики цепей отличаются от теоретических, рассчитанных в предположении, что для неиспользуемых комбинационных колебаний цепь реактивна.

в) Умножение частоты в цепи с нелинейной реактивностью

С помощью нелинейного реактивного элемента может быть достигнуто умножение частоты колебаний.

Для анализа умножения частоты воспользуемся общими энергетическими соотношениями (14-227) и (14-228). В отличие от общего случая теперь к нелинейному реактивному элементу подведены колебания лишь одного источника с частотой f, так что $f_0 = f$; $n = 0$.

Придавая величине m значения 1, 2, 3, ..., на основании (14-227) получим

$$\frac{P_{1\,0}}{f_0} + \frac{2P_{2\,0}}{2f_0} + \frac{3P_{3\,0}}{3f_0} + \ldots = 0;$$

отсюда

$$P_{1\,0} = -P_{2\,0} - P_{3\,0} \ldots = -\sum_{m=2}^{\infty} P_{m0}. \tag{14-236}$$

Все мощности колебаний высших гармоник ($P_{m\,0}$), стоящие в правой части, расходуются в системе, т. е. имеют отрицательный

---

[1] Вопросы устойчивости состояния цепей подробно обсуждаются в главе пятнадцатой.

знак. Поэтому мощность $P_{1\,0}$ положительна; она доставляется в цепь источником колебаний f.

Если сопротивление нагрузки для всех нежелательных высших гармоник реактивно, средние мощности этих гармоник равны нулю. В правой части (14-236) остается только мощность $P_{k\,0}$, выделяемая в сопротивлении нагрузки, созданном в цепи для k-й гармоники:

$$P_{1\,0} = -P_{k0}.$$

Таким образом, как и следовало ожидать, в цепи с нелинейным реактивным элементом, свободным от потерь, теоретически возможно умножение частоты колебаний с к. п. д., равным 100%.

На рис. 14-94 показаны два варианта обобщенных схем умножения частоты при помощи нелинейных реактивных элементов.

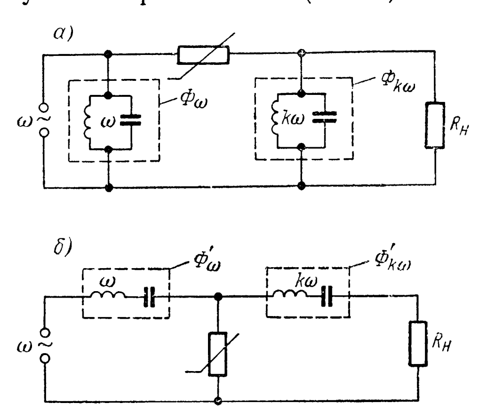


Рис. 14-94. Обобщенные схемы умножения частоты в нелинейной реактивной цепи.

В первом варианте (рис. 14-94, *а*) нелинейный элемент включен последовательно с нагрузкой. Фильтры в этой схеме, условно показанные в виде параллельных колебательных контуров, должны в идеале представлять короткое замыкание для всех частот, кроме одной; фильтр $Ф_{\omega}$ непрозрачен для частоты источника ω, а фильтр $Ф_{k\omega}$ — для частоты k-й гармоники $k\omega$.

В схеме рис. 14-94, *б* нелинейный элемент включен параллельно нагрузке. Фильтрующие двухполюсники, изображенные условно в виде последовательных колебательных контуров, должны представлять короткое замыкание: $Ф'_{\omega}$ — для частоты ω и $Ф'_{k\omega}$ — для частоты $k\omega$. Остальные частоты этими фильтрами не пропускаются.

ГЛАВА ПЯТНАДЦАТАЯ

АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ЦЕПИ

15-1. Определение автоколебательной цепи

Электрическая цепь, в которой устанавливаются незатухающие электрические колебания без всякого периодического воздействия извне, называется автоколебательной цепью (системой).

С энергетической точки зрения автоколебательная цепь представляет собой устройство, преобразующее энергию постоянного электрического тока в энергию создаваемых ею незатухающих колебаний (автоколебаний).

Отсюда следует, что любая цепь аналогичного типа должна содержать, во-первых, источник постоянного тока и, во-вторых, элемент, в котором происходят сами колебания, — колебательную систему. Кроме того, для поддержания незатухающих колебаний в схему необходимо ввести дополнительный элемент, который управлял бы поступлением энергии от источника в контур, т. е. выполнял бы функцию своеобразного клапана.

Работа клапана, несомненно, должна быть согласована с процессами в колебательной системе, иначе ток, поступающий от источника, может не только не поддерживать колебания, а наоборот, даже способствовать их затуханию. Иногда такое согласование осуществляется автоматически, благодаря особым характеристикам элемента — клапана. В других же случаях для этого приходится вводить специальную *цепь обратной связи* (подробнее об этом см. § 15-3).

В соответствии с изложенными соображениями блок-схема простейшей электрической автоколебательной цепи будет иметь вид рис 15-1.

В радиотехнике автоколебательные цепи обычно называются *генераторами с самовозбуждением*, или *автогенераторами*.

В современных радиотехнических устройствах применяются автогенераторы самых различных типов. Однако все они, несмотря на большое многообразие, могут быть разделены на две группы: генераторы гармонических колебаний и генераторы

несинусоидальных, или так называемых релаксационных, колебаний.

Генераторы, относящиеся к первой группе, как известно, используются во всех радиопередающих устройствах в качестве источников электрических колебаний несущей частоты. Они находят применение также в радиоприемных устройствах супергетеродинного типа и т. п. Что касается генераторов, образующих вторую группу, то они используются главным образом в импульсной и измерительной технике. В радиопередающих устройствах специального назначения (радиолокационные устройства, телеметрические системы и т. д.) генераторы релаксационных колебаний, как правило, являются источниками управляющих (модулирующих) напряжений.

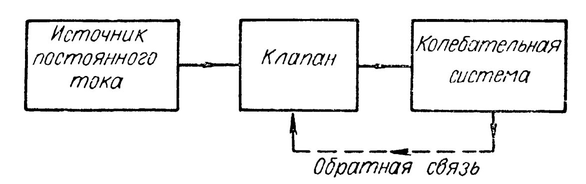


Рис. 15-1. Блок-схема автоколебательной цепи.

15-2. Автоколебания и отрицательное сопротивление

Рассмотрим колебательный контур, в который введено нелинейное сопротивление (рис. 15-2).

Собственные процессы в таком контуре описываются равенством

$$L\frac{di}{dt}+u_R+ri+\frac{1}{C}\int i\,dt=0,$$

где i — ток и u_R — напряжение на нелинейном сопротивлении.

Это равенство приводится к нелинейному дифференциальному уравнению относительно тока

$$\frac{d^2i}{dt^2}+2\alpha_э\frac{di}{dt}+\omega_0^2 i=0. \qquad (15\text{-}1)$$

Здесь

$$\alpha_э(i)=\frac{r+R(i)}{2L}; \qquad (15\text{-}2)$$

$R(i)=\frac{du_R}{di}=R$ — дифференциальное сопротивление нелинейного элемента.

При анализе процессов в цепи будем сначала полагать, что сопротивление R линейно, т. е. $\alpha_э(i)=\mathrm{const}$. Тогда собственный ток в контуре (см. § 8-5)

$$i=I_0e^{-\alpha_э t}\sin(\omega t+\psi_0), \qquad (15\text{-}3)$$

где I_0, ψ_0 — начальные амплитуда и фаза колебаний, а $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha_э^2}$, причем $\omega_0^2 > \alpha_э^2$.

Нетрудно видеть, что характер изменения тока существенно зависит от величины и знака коэффициента $\alpha_э$. Если $\alpha_э$, как в обычной линейной цепи, больше нуля, выражение (15-3) будет представлять типичные затухающие колебания (рис. 15-3, *а*). Если же $\alpha_э$ отрицательно, колебания в контуре не только не затухают, а наоборот, амплитуда их нарастает во времени по экспоненциальному закону:

$$i(t) = I_0 e^{|\alpha_э| t} \sin(\omega t + \psi_0). \qquad (15\text{-}4)$$

График таких колебаний приводится на рис. 15-3, *б*.

Из выражения (15-2) вытекает, что условие $\alpha_э < 0$ будет иметь место в том случае, когда

$$r + R < 0, \qquad (15\text{-}5)$$

т. е. когда контур содержит элемент с отрицательным сопротивлением, абсолютная величина которого $r_n = |R| > r$.

Рис. 15-2. Колебательный контур с нелинейным (отрицательным) сопротивлением.

В действительности ни один линейный элемент не обладает активным сопротивлением с отрицательным знаком. Следовательно, в линейной цепи условие (15-5) никогда не выполняется. Однако это утверждение не распространяется на нелинейные цепи. Нелинейные элементы, как было показано в главе десятой, при определенных условиях могут иметь отрицательные дифференциальные со-

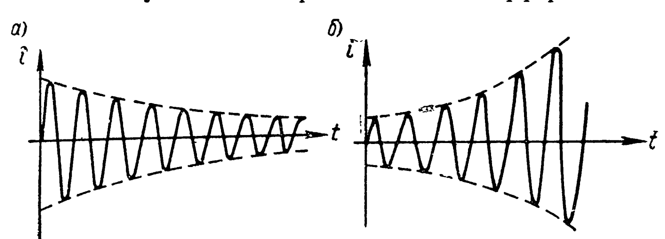


Рис. 15-3. Затухающие (*а*) и нарастающие (*б*) колебания.

противления. Поэтому в цепи с подобным нелинейным элементом удовлетворить неравенству (15-5) принципиально возможно.

Конечно, выражение (15-3) к контуру с нелинейным сопротивлением в общем случае неприменимо. Тем не менее им можно пользоваться в тех случаях, когда амплитуда тока в цепи относительно невелика. Для колебаний с малыми амплитудами любой малый участок вольт-амперной характеристики нелинейного элемента, как уже отмечалось, можно приближенно считать линейным и рассматривать систему в пределах заданного интервала как линейную цепь.

Изложенное позволяет прийти к выводу, что в контуре с отрицательным сопротивлением наблюдается нарастание колебаний (начиная с бесконечно малых их значений), если выполняется условие

$$r_n(0) = |R(0)| > r. \qquad (15\text{-}6)$$

Здесь $r_n(0) = |R(0)|$ — абсолютная величина отрицательного (дифференциального) сопротивления в начальной рабочей точке.

Если бы отрицательное сопротивление было линейным на бесконечном интервале, колебания должны были бы нарастать до бесконечности. В реальных нелинейных системах беспредельный рост амплитуды колебаний, разумеется, невозможен. Наличие нелинейности в автоколебательной цепи неизбежно приводит к ограни-

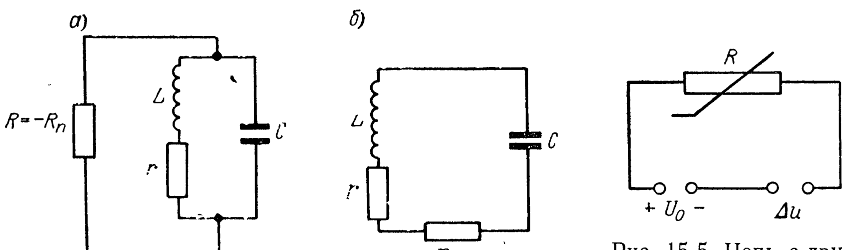


Рис. 15-4. Параллельный контур с отрицательным сопротивлением (*а*) и его эквивалентная схема (*б*).

Рис. 15-5. Цепь с двумя источниками напряжения и отрицательным сопротивлением.

чению нарастания колебаний (см., например, § 15-7 и 15-8). Поэтому амплитуда тока в контуре в процессе установления колебаний при самовозбуждении будет стремиться к какому-то конечному значению, характеризующему стационарный (установившийся) режим.

Таким образом, *для получения автоколебаний необходимо, чтобы цепь имела нелинейный элемент с отрицательным дифференциальным сопротивлением*. Это положение распространяется, как будет показано ниже, на все виды автоколебательных цепей независимо от формы генерируемых ими колебаний.

В автогенераторе с колебательным контуром условие возникновения колебаний, т. е. условие самовозбуждения, определяется неравенством (15-5).

Если отрицательное сопротивление $R = -R_n$ подключается к контуру параллельно (рис. 15-4, *а*), то при малых амплитудах колебаний, когда еще справедливы линейные представления, вместо исходной схемы можно рассматривать цепь, показанную на рис. 15-4, *б*. Самовозбуждение такой цепи согласно (15-6) происходит в том случае, когда

$$r_{n\,\text{вн}}(0) = |R_{\text{вн}}(0)| > r. \qquad (15\text{-}7)$$

Здесь $r_{n\,\text{вн}}(0) = \frac{\rho^2}{R_n(0)}$ — абсолютная величина вносимого в контур отрицательного сопротивления, а $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ — характеристическое сопротивление контура.

Подставляя в неравенство (15-7) значение $r_{n\text{вн}}(0)$, получим

$$R_n(0) < \frac{\rho^2}{r} = R_э, \tag{15-8}$$

т. е. цепь самовозбуждается, если шунтирующее контур отрицательное сопротивление по абсолютной величине меньше эквивалентного сопротивления контура.

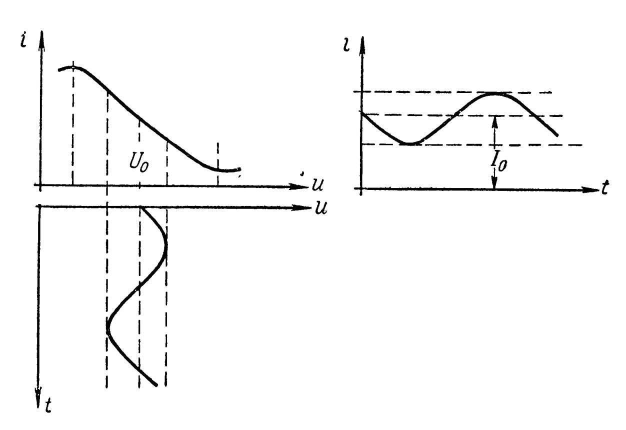


Рис. 15-6. Напряжение и ток в элементе с отрицательным сопротивлением.

В заключение выясним энергетический смысл отрицательного сопротивления. Для этого рассмотрим цепь, содержащую источники постоянного и переменного напряжений и нелинейное сопротивление R (рис. 15-5).

Пусть нелинейный элемент в пределах заданного интервала изменения напряжения имеет вольт-амперную характеристику с падающим участком, т. е. дифференциальное сопротивление его на этом интервале отрицательно (рис. 15-6).

В отсутствие переменного напряжения в цепи будет протекать постоянный ток, величина которого

$$I_0 = \frac{U_0}{R_0},$$

где U_0 — постоянное напряжение;

R_0 — сопротивление нелинейного элемента постоянному току.

В этом случае элемент потребляет от источника мощность

$$P_0 = I_0^2 R_0 = \frac{U_0^2}{R_0}.$$

Предположим, что в цепи наряду с постоянным напряжением U_0 действует также и переменное синусоидальное напряжение $\Delta u(t)$; тогда ток, текущий по сопротивлению, будет изменяться во времени (рис. 15-6). При малых амплитудах напряжения $\Delta u(t)$ переменная составляющая тока оказывается почти гармонической, причем фаза ее отличается от фазы переменного напряжения на 180°. Это значит, что мощность, потребляемая элементом по переменному току, отрицательна, т. е. рассматриваемое сопротивление для переменного тока эквивалентно какому-то источнику энергии.

Включение такого источника в колебательный контур позволяет компенсировать потери энергии на активном сопротивлении. Если мощность, отдаваемая отрицательным сопротивлением, превышает мощность потерь, мы имеем нарастание колебаний. В установившемся режиме эти мощности равны между собой и, следовательно, в контуре наблюдаются незатухающие колебания с постоянной амплитудой.

Отрицательное сопротивление, конечно, нельзя рассматривать как первичный источник энергии. В действительности оно вместе с колебательной системой только преобразует энергию постоянного тока в энергию электрических колебаний.

15-3. Обратная связь в радиотехнических цепях

а) Основные уравнения четырехполюсника с обратной связью

При осуществлении автоколебательных систем, а также в ряде других случаев в радиотехнических цепях применяется так называемая **обратная связь**.

Система с обратной связью (рис. 15-7) характеризуется тем, что один из откликов y, возникающих в ней под внешним воздействием x, подводится обратно к ее входу. В результате воздействие на входе системы оказывается равным не x, а $x_1 = x + y$.

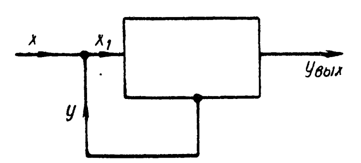


Рис. 15-7. К определению обратной связи.

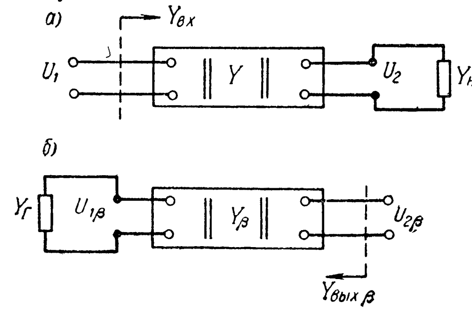


Рис. 15-8. Основной (*а*) и вспомогательный (*б*) четырехполюсники.

Рассмотрим два четырехполюсника, которые будем считать линейными. Даже если в их состав входят нелинейные элементы, цепь при малых колебаниях может рассматриваться как линейная.

Первый из четырехполюсников (рис. 15-8, *а*), который назовем основным, определяется матрицей Y-параметров

$$\|Y\| = \begin{Vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{Vmatrix}. \tag{15-9}$$

Передаточная функция этого четырехполюсника (коэффициент усиления) на основании (14-26) будет

$$K(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22} + Y_н}. \tag{15-10}$$

В частном случае, при холостом ходе четырехполюсника,

$$K(j\omega) = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}}. \tag{15-11}$$

Входное сопротивление цепи в соответствии с (14-24)

$$Y_{вх} = Y_{11} + K(j\omega) Y_{12}. \tag{15-12}$$

Четырехполюсник $\|Y\|$ активный. Поэтому $Y_{21} \neq Y_{12}$. Кроме того, если считать, что $Y_{12} = 0$, то колебания могут проходить через четырехполюсник только в одном направлении — слева направо. Такие цепи называются однонаправленными.

Считаем также, что $Y_{11} = 0$, поэтому и входная проводимость $Y_{вх} = 0$. Указанным требованиям, как известно, в значительной мере удовлетворяет электронная лампа, включенная по схеме с общим катодом.

Второй из четырехполюсников (вспомогательный) — рис. 15-8, *б* характеризуется матрицей Y-параметров

$$\|Y_\beta\| = \begin{Vmatrix} Y_{11_\beta} & Y_{12_\beta} \\ Y_{21_\beta} & Y_{22_\beta} \end{Vmatrix}. \tag{15-13}$$

В последующем нам придется оперировать с передаточной функцией этого четырехполюсника при прохождении колебаний справа налево.

Она, согласно (14-30), выражается следующим образом:

$$\beta(j\omega) = \frac{U_{1\beta}}{U_{2\beta}} = -\frac{Y_{12\beta}}{Y_{11\beta} + Y_г}, \tag{15-14}$$

где $Y_г$ — проводимость нагрузки, подключенной к напряжению $U_{1\beta}$.

В том частном случае, когда $Y_г = 0$,

$$\beta(j\omega) = -\frac{Y_{12\beta}}{Y_{11\beta}}. \tag{15-15}$$

Выходная проводимость цепи вспомогательного четырехполюсника

$$Y_{вых\beta} = Y_{22_\beta} + \beta(j\omega) Y_{21_\beta}.$$

Теперь объединим оба четырехполюсника в одну цепь с обратной связью, показанную на рис. 15-9. Колебания с выхода основного четырехполюсника через цепь обратной связи $\|Y_\beta\|$ подводятся к входу системы.

При подключенной цепи обратной связи коэффициент передачи основного четырехполюсника $K(j\omega)$ несколько изменяется по сравнению с (15-10) и становится равным

$$K_1(j\omega) = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}+Y_\text{н}+Y_{\text{вых}\beta}} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}+Y_\text{н}+Y_{22\beta}+\beta(j\omega)\,Y_{21\beta}}. \quad (15\text{-}16)$$

Надо, однако, иметь в виду, что обычно

$$Y_{\text{вых}\beta} \ll (Y_{22}+Y_\text{н}).$$

Это в особенности справедливо в тех случаях, когда четырехполюсник обратной связи однонаправленный (справа налево), так что $Y_{21\beta} = 0$.

Таким образом, можно считать, что на коэффициент усиления основного четырехполюсника подключение цепи обратной связи не влияет: $K_1(j\omega) \approx K(j\omega)$.

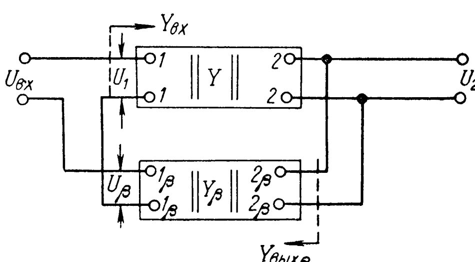


Рис. 15-9. Цепь с обратной связью.

В системе, охваченной обратной связью, входное напряжение

$$U_\text{вх} = U_1 - U_{1\beta} = U_1 - \beta(j\omega)\,U_2 = U_1\,[1-\beta(j\omega)\,K(j\omega)].$$

Отсюда следует, что передаточная функция при наличии обратной связи

$$K_\text{с}(j\omega) = \frac{U_2}{U_\text{вх}} = \frac{K(j\omega)}{1-\beta(j\omega)\,K(j\omega)}. \quad (15\text{-}17)$$

Передаточную функцию цепи обратной связи $\beta(j\omega)$ называют *коэффициентом обратной связи*. Его можно рассчитывать по формуле (15-15), так как согласно принятому нами условию $Y_\text{вх} = 0$ и четырехполюсник $\|Y_\beta\|$ на стороне $1\beta - 1\beta$ работает вхолостую.

Коэффициент усиления $K_\text{с}(j\omega)$ является основным параметром четырехполюсника с обратной связью. Формула (15-17) дает соотношение между $K_\text{с}(j\omega)$ и коэффициентом усиления $K(j\omega)$ в отсутствие обратной связи.

В общем случае $K(j\omega)$ и $\beta(j\omega)$ — комплексные величины. Однако в частных случаях на некоторых частотах они могут быть вещественны. Тогда

$$K_\text{с} = \frac{K}{1-\beta K}. \quad (15\text{-}18)$$

В зависимости от знака коэффициентов β и K обратную связь называют положительной, когда $\beta K > 0$, и отрицательной, если $\beta K < 0$.

б) Положительная обратная связь

Если усилитель нагружен на активное сопротивление и его параметры можно считать вещественными, то, как известно, выходное напряжение его отличается по фазе от входного на 180°, т. е. $K < 0$.

Стало быть, для получения положительной обратной связи необходимо, чтобы и коэффициент обратной связи был отрицательным: $\beta < 0$; это означает, что напряжения на входе и выходе четырехполюсника $\|Y_\beta\|$ также должны быть в противофазе.

В результате напряжение, подводимое через цепь обратной связи к входу усилителя, совпадает по фазе с напряжением источника внешнего воздействия.

Именно по этой причине коэффициент усиления усилителя, охваченного положительной обратной связью,

$$\left|K_c\right| = \frac{|K|}{1 - K_\beta}$$

может оказаться значительно бо̀льшим, чем в отсутствие обратной связи.

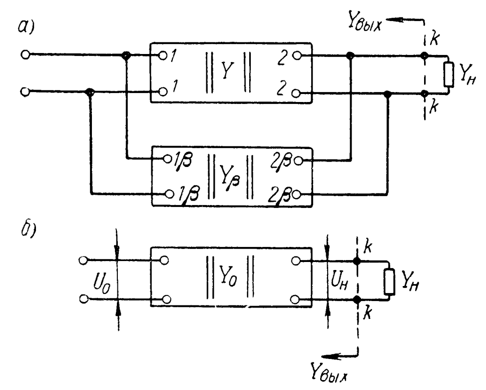


Рис. 15-10. Четырехполюсник, охваченный положительной обратной связью (*а*) и его эквивалентная схема (*б*).

Важное свойство активного четырехполюсника с положительной обратной связью состоит в том, что при выполнении определенных условий он может являться преобразователем энергии заключенного внутри него источника постоянного тока в энергию переменного тока — даже в отсутствие внешнего источника переменного воздействия. Другими словами говоря, четырехполюсник по отношению к внешней цепи может выполнять роль отрицательного сопротивления.

Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим цепь с положительной обратной связью (рис. 15-10, *а*), в которой внешний источник переменного напряжения отсутствует, и рассчитаем проводимость $Y_{вых}$ между точками k-k, к которым могут быть подключены другие (пассивные) элементы цепи.

Из рис. 15-10, *а* видно, что четырехполюсники $\|Y\|$ и $\|Y_\beta\|$ как на входе, так и на выходе соединены между собой в параллель. Поэтому согласно (5-165)

матрица Y-параметров результирующего (эквивалентного) четырехполюсника (рис. 15-10, *б*) равна сумме матриц $\|Y\|$ и $\|Y_\beta\|$:

$$\|Y_0\| = \|Y\| + \|Y_\beta\|. \quad (15\text{-}19)$$

Таким образом, параметры эквивалентного четырехполюсника

$$\left.\begin{aligned} Y_{1\,1\,0} &= Y_{1\,1} + Y_{1\,1\,\beta}, \\ Y_{1\,2\,0} &= Y_{1\,2} + Y_{1\,2\,\beta}, \\ Y_{2\,1\,0} &= Y_{2\,1} + Y_{2\,1\,\beta}, \\ Y_{2\,2\,0} &= Y_{2\,2} + Y_{2\,2\,\beta}. \end{aligned}\right\} \quad (15\text{-}20)$$

В соответствии с (14-29) проводимость

$$Y_{\text{вых}} = Y_{2\,2\,0} + K_0'(j\omega)\, Y_{2\,1\,0}. \quad (15\text{-}21)$$

Здесь $K_0'(j\omega)$ — коэффициент передачи эквивалентного четырехполюсника (рис. 15-10, *б*) при прохождении колебаний справа налево.

Так как к напряжению U_0 внешняя нагрузка не подключена, то согласно (14-30)

$$K_0'(j\,\omega) = \frac{U_0}{U_{\text{н}}} = -\frac{Y_{1\,2\,0}}{Y_{1\,1\,0}}. \quad (15\text{-}22)$$

Подставляя (15-22) и (15-21), получим

$$Y_{\text{вых}} = Y_{2\,2\,0} - \frac{Y_{1\,2\,0}}{Y_{1\,1\,0}} Y_{2\,1\,0}$$

или, приняв во внимание (15-20),

$$Y_{\text{вых}} = Y_{2\,2\,0} - \frac{Y_{1\,2}}{Y_{1\,1\,0}} Y_{2\,1\,0} - \frac{Y_{1\,2\,\beta}}{Y_{1\,1\,0}} Y_{2\,1\,0}.$$

Последнее выражение может быть записано так:

$$Y_{\text{вых}} = Y_{2\,2\,0} + K'(j\omega)\, Y_{2\,1\,0} + \beta(j\omega)\, Y_{2\,1\,0}. \quad (15\text{-}23)$$

Здесь $K'(j\omega) = -\dfrac{Y_{1\,2}}{Y_{1\,1\,0}}$ — передаточная функция основного четырехполюсника (усилителя) при прохождении колебаний справа налево. Величина $K'(j\omega)$ может быть названа к о э ф ф и ц и е н т о м о б р а т н о й п е р е д а ч и у с и л и т е л я; $\beta(j\omega) = -\dfrac{Y_{1\,2\,\beta}}{Y_{1\,1\,0}}$ — коэффициент обратной связи с учетом того, что на зажимах $1_\beta - 1_\beta$ четырехполюсник $\|Y_\beta\|$ нагружен на входную проводимость цепи $\|Y\|$.

Рассмотрим тот частный случай, когда все параметры четырехполюсников, а также коэффициенты K' и β можно считать вещественными величинами.

Тогда (15-23) приобретает вид

$$g_{\text{вых}} = g_{2\,2\,0} + (K' + \beta)\, g_{2\,1\,0}. \quad (15\text{-}24)$$

Проводимость $g_{\text{вых}}$ будет отрицательной, если

$$(K' + \beta)\, g_{2\,1\,0} < -g_{2\,2\,0}$$

или

$$(K' + \beta) < -\frac{g_{2\,2\,0}}{g_{2\,1\,0}}.$$

Стало быть, необходимо, чтобы сумма коэффициентов K' и β была отрицательна:

$$(K' + \beta) < 0, \tag{15-25}$$

а абсолютная величина удовлетворяла неравенству

$$|K' + \beta| > \frac{g_{2\,2\,0}}{g_{2\,1\,0}}. \tag{15-26}$$

Во многих случаях усилитель можно считать однонаправленным. Тогда $K' = 0$ и условия (15-25) и (15-26) приводят к тому, что коэффициент обратной связи β должен быть отрицательным, т. е. необходима положительная обратная связь, причем абсолютная величина β должна быть

$$|\beta| > \frac{g_{2\,2\,0}}{g_{2\,1\,0}}. \tag{15-27}$$

Если $K' \neq 0$, то в зависимости от знака K' обратная передача внутри усилителя может либо способствовать выполнению условия (15-26), или препятствовать ему. Так, если K' отрицательно и по абсолютной величине больше $g_{2\,2\,0}/g_{2\,1\,0}$, т. е.

$$|K'| = \left|\frac{g_{1\,2}}{g_{1\,1\,0}}\right| > \frac{g_{2\,2\,0}}{g_{2\,1\,0}},$$

то даже в отсутствие цепи обратной связи ($\beta = 0$) схема в точках k-k будет представлять отрицательное сопротивление.

Абсолютная величина отрицательной проводимости, которую обозначим $g_n = \frac{1}{R_n}$, при условии, что неравенство (15-26) выполняется, будет

$$g_n = |K' + \beta| g_{2\,1\,0} - g_{2\,2\,0}. \tag{15-28}$$

Применим полученные соотношения к э л е к т р о н н о й л а м п е. В этом случае

$$g_{2\,2} = \frac{1}{R_i},$$
$$g_{2\,1} = S,$$

причем обычно $\frac{1}{R_i} \gg g_{2\,2\beta}$ и $S \gg g_{2\,1\beta}$, так что $g_{2\,2\,0} \approx \frac{1}{R_i}$ и $g_{2\,1\,0} \approx S$.

Вместо неравенства (15-26) получим

$$|K' + \beta| > \frac{1}{R_i S}, \tag{15-29}$$

или, так как $1/R_iS$ равно проницаемости лампы D, то (15-29) перепишется так:

$$|K' + \beta| > D. \tag{15-30}$$

Абсолютная величина отрицательной проводимости, которую при этом будет представлять лампа,

$$g_n = |K' + \beta| S - \frac{1}{R_i} \tag{15-31}$$

или отрицательное сопротивление

$$R_n \approx \frac{R_i}{|K' + \beta| SR_i - 1} = \frac{1}{S[|K' + \beta| - D]}. \tag{15-32}$$

Часто четырехполюсник с электронной лампой можно считать однонаправленным, т. е. $K' = 0$. Тогда вместо (15-30) и (15-32) получим

$$|\beta| > D; \tag{15-33}$$

$$R_n = \frac{1}{S[|\beta| - D]}. \tag{15-34}$$

Рассмотрим схему осуществления отрицательного сопротивления при помощи лампового триода (рис. 15-11).

Постоянные напряжения на аноде u_a и на сетке u_g снимаются с потенциометров $R_{па}$ и $R_{пg}$. Между цепями анода (выхода четырех-

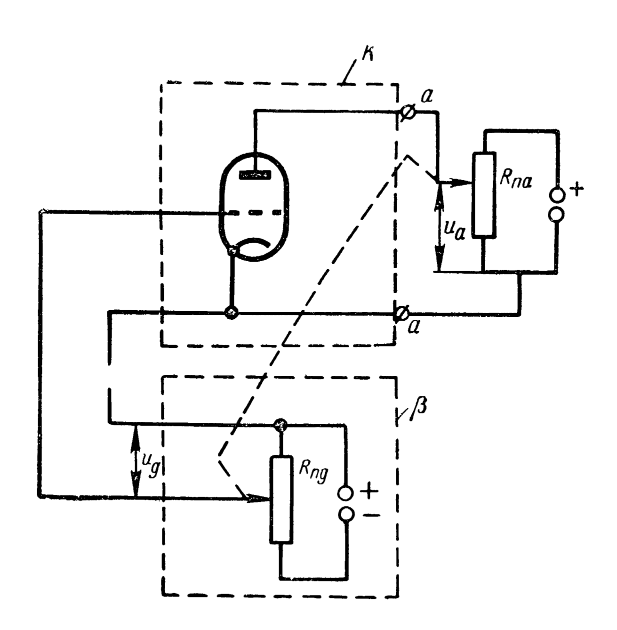


Рис. 15-11. Схема включения триода как отрицательного сопротивления.

полюсника) и сетки (его входа) осуществлена обратная связь, которая действует так, что при изменении анодного напряжения du_a происходит пропорциональное ему изменение напряжения на сетке

$$du_g = \beta du_a,$$

где $\beta = \frac{du_g}{du_a}$ — коэффициент обратной связи.

Это может быть осуществлено, например, путем механической связи движков потенциометров, показанной условно пунктиром на рис. 15-11.

Изменение анодного тока, вызванное одновременным изменением u_g и u_a, будет

$$di_a = \frac{\partial i_a}{\partial u_g} du_g + \frac{\partial i_a}{\partial u_a} du_a = S du_g + \frac{1}{R_i} du_a$$

или

$$di_a = S(du_g + D du_a) = S du_a (\beta + D). \qquad (15\text{-}35)$$

Дифференциальное сопротивление цепи между точками *а-а*

$$R_d = \frac{du_a}{di_a} = \frac{1}{S(\beta + D)}.$$

Теперь положим, что связь между потенциометрами выполнена так, что увеличению анодного напряжения ($du_a > 0$) сопутствует уменьшение напряжения на сетке ($du_g < 0$) и наоборот. Это означает, что коэффициент обратной связи $\beta < 0$. Тогда

$$R_d = \frac{1}{S[D - |\beta|]} = -\frac{1}{S[|\beta| - D]}$$

или абсолютная величина отрицательного сопротивления

$$R_n = \frac{1}{S[|\beta| - D]}.$$

Эта формула совпадает с (15-34).

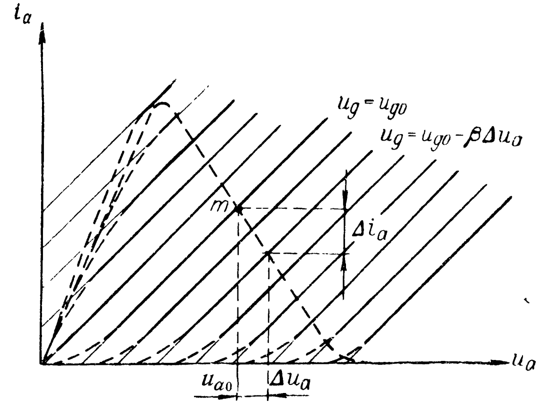


Рис. 15-12. Характеристика триода, охваченного положительной обратной связью.

Из сказанного следует вывод: для того чтобы лампа являлась отрицательным сопротивлением, надо одновременно менять напряжения на сетке и на аноде так, чтобы увеличение одного из них сопровождалось уменьшением другого, т. е. их изменения должны происходить в противофазе. Кроме того, по абсолютной величине коэффициент β должен быть больше проницаемости лампы D.

Для иллюстрации полученных результатов на рис. 15-12 изображено семейство идеализированных (спрямленных) характеристик лампы $i_a = f(u_a)$ при $u_g = \text{const}$. Точкой m отмечен исходный режим, соответствующий постоянным напряжениям: на аноде $u_a = u_{a0}$ и на сетке $u_g = u_{g0}$. Увеличение u_{a0} на некоторую величину Δu_a сопровождается (благодаря действию обратной связи) уменьшением напряжения на сетке на величину $\beta\Delta u_a$. В результате при достаточно большом β анодный ток уменьшается на величину Δi_a.

Вольт-амперная характеристика двухполюсника, включенного между точками *а-а* (см. рис. 15-11), имеет вид падающей кривой, т. е. дифференциальная крутизна ее отрицательна.

Приведенное построение было бы совершенно правильным, если бы лампа была линейной системой. В действительности характеристики лампы нелинейны (пунктирные участки на кривых $i_a = f(u_a)$ при $u_g = \text{const}$). Поэтому полученные результаты можно считать справедливыми лишь при малых изменениях Δu_a и Δi_a. В этих пределах дифференциальное сопротивление действительно отрицательно. В случае же широких пределов изменений токов и напряжений вольт-амперная характеристика приобретает вид пунктирной кривой рис. 15-12; падающий участок составляет лишь часть кривой.

в) Отрицательная обратная связь

Для получения отрицательной обратной связи необходимо, чтобы произведение коэффициентов усиления и обратной связи было отрицательным: $\beta K<0$.

Считая, что коэффициент усиления K представляет собой вещественное отрицательное число, т. е. что напряжение на выходе отличается по фазе от входного напряжения на 180°, приходим к выводу, что коэффициент обратной связи β должен быть положительным. В данном случае цепь обратной связи не меняет фазы усиленного напряжения. Таким образом, напряжение, подведенное через четырехполюсник β к входу усилителя, противоположно по фазе напряжению источника внешнего воздействия. Поэтому отрицательную обратную связь называют иначе противосвязью.

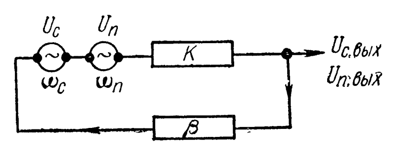


Рис. 15-13. Усилитель, охваченный отрицательной обратной связью.

Естественно, что коэффициент усиления усилителя, охваченного противосвязью,

$$K=\frac{|K|}{1+|\beta K|}$$

всегда оказывается меньшим, чем в отсутствие обратной связи.

С точки зрения величины усиления отрицательная обратная связь не дает никаких преимуществ; однако применение ее в усилителях может быть все же полезным, в частности как средство борьбы с некоторыми видами помех.

Пусть на входе усилителя с отрицательной обратной связью (рис. 15-13), кроме сигнала $U_с$, имеющего частоту $\omega_с$, действует источник помехи $U_п$ с частотой $\omega_п$. Полагая, что коэффициенты усиления K и обратной связи β от частоты не зависят, получим, что как для сигнала, так и для помехи результирующий коэффициент усиления будет одним и тем же и выходные напряжения будут

$$U_{с.\,вых}=\frac{|K|}{1+|\beta K|}U_с;\quad U_{п.\,вых}=\frac{|K|}{1+|\beta K|}U_п.$$

Соотношение интенсивностей сигнала и помехи на выходе устройства получается таким же, как на входе. Никакого выигрыша применение отрицательной обратной связи не дает.

Теперь рассмотрим схему, содержащую кроме усилителя, охваченного противосвязью, предварительный каскад усиления K_0, свободный от действия помех, на входе которого включен источник сигнала (рис. 15-14).

Напряжение сигнала на выходе двухкаскадного усилителя

$$U_{с.\,вых}=\frac{|K_0 K|}{1+|\beta K|}U_с. \qquad (15\text{-}36)$$

Коэффициент усиления предварительного каскада может быть выбран

$$|K_0|=1+|\beta K|. \qquad (15\text{-}37)$$

Тогда этот каскад будет компенсировать уменьшение усиления, получающееся в усилителе с противосвязью. При этом напряжение сигнала на выходе будет

$$U_{\text{с. вых}} = U_{\text{с}} \, |K|,$$

а напряжение, создаваемое помехой, по-прежнему останется

$$U_{\text{п.вых}} = \frac{|K|}{1 + |\beta K|} U_{\text{п}}.$$

Их отношение

$$\frac{U_{\text{с. вых}}}{U_{\text{п. вых}}} = [1 + |\beta K|] \frac{U_{\text{с}}}{U_{\text{п}}}; \tag{15-38}$$

следовательно, соотношение сигнал/помеха на выходе оказывается в $[1 + |\beta K|]$ раз бо́льшим, чем отношение полезного и мешающего напряжений, воздействующих на усилитель.

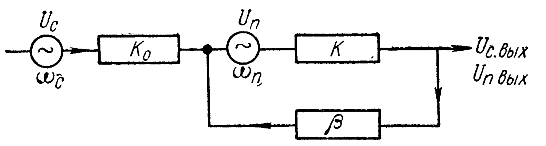


Рис. 15-14. Усилитель, охваченный противосвязью с предварительным каскадом усиления.

Если в усилителе имеют место нелинейные искажения, это может быть учтено путем введения в эквивалентную схему «генератора гармоник», выполняющего роль источника помех. В результате в схеме рис. 15-14 продукты нелинейности, появляющиеся во втором каскаде, будут благодаря противосвязи подавлены. Правда, для этого необходимо располагать предварительным каскадом, свободным от нелинейных искажений. Однако наибольшие нелинейные искажения обычно возникают именно в мощных каскадах, и осуществление маломощных неискажающих усилителей не встречает особых затруднений.

Отрицательная обратная связь может быть полезна и в отношении *стабилизации режима* усилителя. Дело заключается в том, что вследствие непостоянства напряжений источников питания и по другим причинам коэффициент усиления в отсутствие обратной связи не остается неизменным в процессе эксплуатации усилителя. Кроме того, при недостаточно совершенной частотной характеристике усилителя его коэффициент усиления может недопустимо сильно изменяться с частотой.

Положим теперь, что усилитель охвачен отрицательной обратной связью, причем $|\beta K| \gg 1$. Такой режим называют *режимом с глубокой противосвязью*. При этом коэффициент усиления

$$K_{\text{с}} \approx \frac{1}{\beta}. \tag{15-39}$$

Как видно, в режиме глубокой противосвязи коэффициент усиления практически зависит только от коэффициента передачи цепи обратной связи. Эта цепь пассивная, и поддержание постоянства β не встречает больших затруднений.

15-4. Статическая устойчивость цепей с отрицательным сопротивлением

Состояние электрической цепи, при котором все действующие в ней токи и напряжения постоянны или равны нулю, называется *статическим равновесием*.

Равновесие системы считается *устойчивым*, когда после кратковременного воздействия на нее внешнего возмущения она возвращается в исходное состояние. Другими словами, в устой-

чивой цепи после внешнего толчка возникает затухающий процесс, по окончании которого система вновь приходит в состояние равновесия. Если же под влиянием возмущающего воздействия в цепи, находившейся в состоянии равновесия, возникают нарастающие во времени отклики, т. е. она не возвращается в первоначальное положение, такое равновесие неустойчиво.

Пассивные электрические цепи всегда устойчивы, так как они способны только поглощать энергию источника возмущающего воздействия. При расчете пассивных цепей поэтому нет необходимости подвергать специальному исследованию вопрос об устойчивости равновесия в них. Иначе обстоит дело в активных цепях. Они могут не только поглощать энергию из внешней цепи, но и отдавать (генерировать) ее. В определенных условиях сколь угодно малый толчок может привести к тому, что в системе из-за наличия внутренних источников энергии возникают нарастающие во времени токи и напряжения. Равновесие оказывается неустойчивым.

В радиотехнических цепях мы имеем дело с нелинейными активными элементами. Как было доказано А. М. Ляпуновым, при малых воздействиях, которые учитываются при оценке состояния равновесия, нелинейная система может рассматриваться как линейная. Именно так и будем поступать в дальнейшем при исследовании устойчивости нелинейных цепей.

а) Устойчивость цепи постоянного тока с отрицательным сопротивлением

Рассмотрим цепь постоянного тока, составленную из последовательно соединенных линейного R и нелинейного r_n сопротивлений (рис. 15-15). Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента изображена на рис. 15-16. Она имеет падающий участок ab.

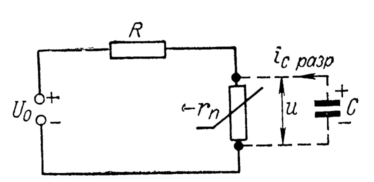


Рис. 15-15. Нелинейная цепь постоянного тока, содержащая элемент типа N.

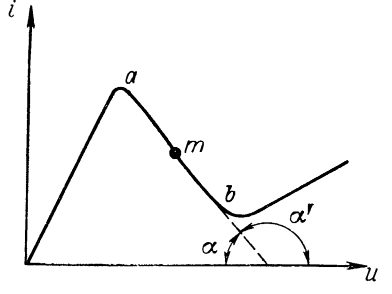


Рис. 15-16. Вольт-амперная характеристика элемента типа N.

В пределах этого участка, например в точке m, дифференциальное сопротивление отрицательно:

$$r_d = \frac{di}{du} = \operatorname{ctg} \alpha' = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Масштабы тока m_i и напряжения m_u считаются одинаковыми.

Абсолютная величина отрицательного сопротивления

$$r_n = \operatorname{ctg} \alpha. \tag{15-40}$$

Элементы, обладающие характеристиками вида рис. 15-16, иногда называют **сопротивлениями типа** N.

Нетрудно видеть, что частным случаем элемента типа N является рассмотренное в предыдущем параграфе выходное сопротивление электронной лампы, охваченной положительной обратной связью. Об этом свидетельствует сопоставление рис. 15-12 и 15-16.

Для нахождения тока в цепи (см. рис. 15-15) воспользуемся графическим приемом, описанным в § 10-5. Из точки $u = U_0$ проводим прямую под углом $\varphi = \operatorname{arcctg} R$ к оси абсцисс (рис. 15-17).

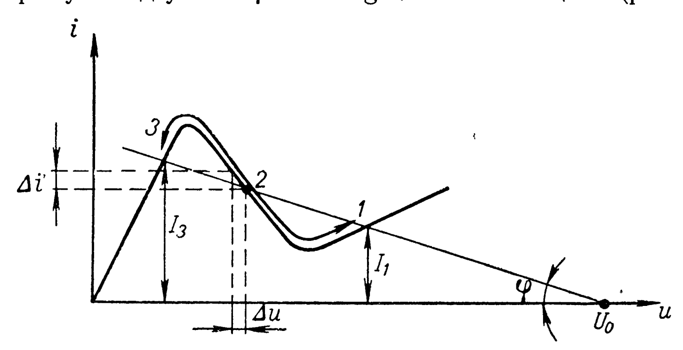


Рис. 15-17. К определению состояния равновесия цепи, содержащей элемент типа N.

Как видно, при выбранных параметрах цепи, прямая пересекает характеристику в трех точках *1*, *2*, *3*, каждая из которых соответствует состоянию статического равновесия. Желая выяснить, все ли эти режимы устойчивы, исследуем характер переходного процесса, возникающего в цепи после выведения ее из состояния равновесия. При исследовании будем иметь дело с малыми, быстро протекающими, изменениями токов и напряжений. Естественно, что в этих условиях нельзя не учитывать влияния реактивных параметров цепи (индуктивности и емкости).

Обращаясь к характеристике рис. 15-16, мы видим, что в точках (a и b), ограничивающих участок с отрицательным сопротивлением, производная di/du равняется нулю. Даже малые изменения тока вызывают весьма большие изменения напряжения. Поэтому особенно существенное влияние на характер переходного процесса в изучаемой цепи оказывают изменения напряжения, вызывающие ток

$$i_C = C \frac{du}{dt}$$

через «паразитную» емкость C элемента, показанную на рис. 15-15. Исходя из этих соображений, при приближенном анализе устой-

чивости схемы будем учитывать только емкость C и пренебрегать индуктивностью цепи.

Обратимся к режиму цепи, соответствующему точке *2* на характеристике, и представим себе, что в силу каких-либо причин (случайное изменение напряжения источника питания, тепловые флюктуации и т. п.) ток в цепи несколько увеличился ($\Delta i > 0$). Из кривой рис. 15-17 следует, что при этом напряжение на элементе уменьшится ($\Delta u < 0$; $\frac{du}{dt} < 0$). Это вызовет появление разрядного тока емкости $i_{C\,\text{разр}} = C\frac{du}{dt}$, направленного как показано на рис. 15-15. Ток через нелинейное сопротивление вследствие этого еще более

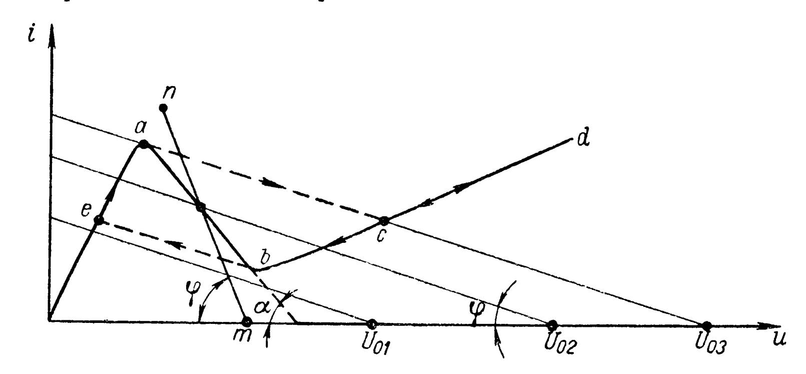


Рис. 15-18. Режим цепи, содержащей элемент типа N, при разных напряжениях питания.

возрастет, что повлечет за собой дальнейшее уменьшение напряжения. Описанный процесс протекает лавинообразно, и система уходит из состояния равновесия. Следовательно, точка *2* неустойчива.

Стрелкой на рис. 15-17 показано направление движения рабочей точки после случайного увеличения тока. Движение рабочей точки будет происходить до тех пор, пока она не займет положение *3*, которое, как нетрудно проверить, соответствует устойчивому равновесию. По мере уменьшения напряжения u ток через сопротивление R

$$i_R = \frac{U_0 - u}{R}$$

возрастает до величины I_3.

Если бы первоначально ток случайно уменьшился ($\Delta i < 0$), изображающая точка пришла бы в состояние *1* (ток $i = I_1$), которое также является устойчивым.

В каком же из двух устойчивых состояний (*1* или *3*) будет в действительности находиться цепь? Ответ на этот вопрос связан с «предысторией» системы. Будем плавно увеличивать напряжение источника U_0. При малой его величине ($U = U_{0\,1}$, рис. 15-18) имеется

лишь одна точка пересечения прямой с характеристикой, одно состояние равновесия, которое является устойчивым. Дальнейшее увеличение напряжения связано с перемещением прямой параллельно самой себе и с движением рабочей точки по верхней части кривой, соответствующей устойчивым положениям равновесия. Когда U_0 становится равным $U_{0\,3}$, изображающая точка быстро пробегает неустойчивый участок *abc* и далее движется вдоль ветви *cd*, дающей опять однозначные величины токов. Уменьшение напряжения связано с обратным движением рабочей точки, но уже вдоль участка *dcb* вплоть до точки *b*, в которой вновь происходит быстрый переход на верхнюю ветвь кривой.

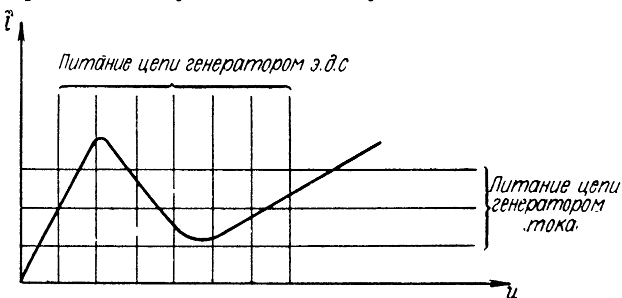


Рис. 15-19. Режимы цепи, содержащей элемент типа *N*, при питании генератором э. д. с. и генератором тока.

При изменении напряжения переходные процессы, происходящие на участке *abc*, воспринимаются как «скачки» из точки *a* в точку *c* при увеличении напряжения и из точки *b* в точку *e* при его уменьшении.

При меньшей величине линейного сопротивления *R* прямые составляют больший угол φ с осью абсцисс. Нетрудно видеть, что если $\varphi > \alpha$ (прямая *mn* на рис. 15-18), то при любом значении U_0 получается лишь одно состояние равновесия и оно устойчиво.

Таким образом, можно сделать вывод, что *цепь постоянного тока, содержащая сопротивление типа N, устойчива при любых величинах питающего напряжения, если линейное сопротивление R меньше абсолютного значения отрицательного сопротивления* r_n:

$$R < r_n. \qquad (15\text{-}41)$$

Отсюда же следует, что при питании сопротивления типа *N* от генератора э. д. с. ($R \to 0$) цепь устойчива (прямые вертикальны и при разных напряжениях генератора перемещаются вдоль оси абсцисс), а при питании генератором тока ($R \to \infty$) цепь может быть неустойчивой (прямые горизонтальны и при разных токах генератора перемещаются вдоль оси ординат). Сказанное поясняется рис. 15-19.

Кроме сопротивлений типа N, существуют нелинейные элементы, также обладающие отрицательным сопротивлением, но имеющие иной вид характеристики (рис. 15-20).

Эти элементы называют **сопротивлениями типа** S. К ним, в частности, относятся газоразрядные приборы: неоновая лампа, вольтова дуга, газотрон и др.

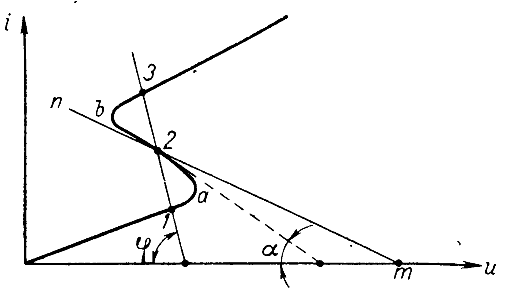


Рис. 15-20. Вольт-амперная характеристика элемента типа S.

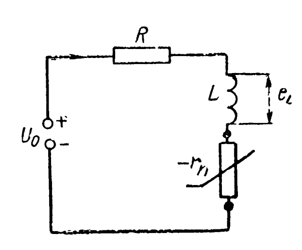


Рис. 15-21. Нелинейная цепь, содержащая элемент типа S.

Характеристика (рис. 15-20) также имеет падающий участок ab. В граничных точках этого участка крутизна $\frac{di}{du} = \infty$; даже небольшие изменения напряжения приводят к большим изменениям тока. Поэтому при анализе устойчивости цепи, содержащей сопротивление типа S, необходимо учитывать индуктивность цепи L, э. д. с. которой пропорциональна производной di/dt.

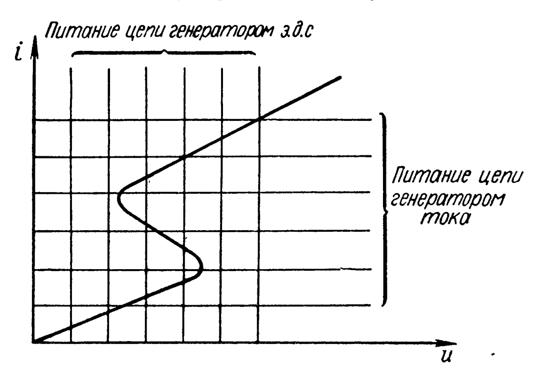


Рис. 15-22. Режимы цепи, содержащей элемент типа S, при питании генератором э. д. с. и генератором тока.

Применяя к схеме, содержащей сопротивление типа S (рис. 15-21), тот же метод анализа, который был использован выше, и принимая во внимание индуктивность цепи L, приходим к заключению, что и в этом случае возможны три состояния равновесия (точки *1*, *2*, *3*), из которых устойчивыми являются точки *1* и *3*. Однако в отличие от цепи с сопротивлением N рассматриваемая цепь будет устойчивой при любом напряжении питания в том случае, если угол $\varphi < \alpha$ (прямая mn на рис. 15-20), т. е. если сопротивление R больше, чем r_n:

$$R > r_n. \qquad (15\text{-}42)$$

При питании сопротивления типа S от генератора тока ($R \to \infty$) цепь устойчива при любых значениях тока, что иллюстрируется горизонтальными прямыми рис. 15-22. Если же цепь питается от генератора э. д. с. ($R \to 0$), то в ней возможны положения неустойчивого равновесия, о чем свидетельствуют вертикальные прямые рис. 15-22; некоторые из них пересекают вольт-амперную характеристику в трех точках.

б) Устойчивость состояния колебательного контура с отрицательным сопротивлением

В общем случае для решения вопроса об устойчивости заданной системы следует обратиться к дифференциальному уравнению, описывающему свободный режим в ней.

Если это дифференциальное уравнение линейное, с постоянными коэффициентами

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0, \qquad (15\text{-}43)$$

решение его имеет вид

$$y(t) = A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{k_2 t} + \ldots + A_n e^{k_n t}, \qquad (15\text{-}44)$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий;

$k_1, k_2, \ldots, k_n$ — корни характеристического уравнения.

Система устойчива в том случае, если все слагаемые решения (15-44), определяющего колебания, возникшие в системе под действием внешнего толчка, затухают во времени. Это означает, что все корни характеристического уравнения должны быть отрицательными, или, если корни комплексны, отрицательными должны быть их вещественные части.

Этот критерий применим к исследованию вопросов устойчивости колебательного контура, содержащего отрицательное сопротивление, абсолютная величина которого

$$|R(i)| = r_n(i).$$

Дифференциальное уравнение контура имеет вид (15-1).

Хотя $r_n(i)$ — нелинейное сопротивление, но, как уже отмечалось ранее (стр. 740), при изучении устойчивости цепи система может трактоваться как линейная и в качестве r_n тогда следует понимать дифференциальное сопротивление нелинейного элемента в исходной точке.

Корни характеристического уравнения для рассматриваемой цепи будут

$$k_{1,2} = -\alpha_э \pm \sqrt{\alpha_э^2 - \omega_0^2}, \qquad (15\text{-}45)$$

где

$$\alpha_э = \frac{r_э}{2L} = \frac{r - r_n}{2L}.$$

Для того чтобы корни (или их действительные части, если корни комплексны) были отрицательны, необходимо выполнение неравенства $r_э > 0$, где $r_э = r - r_п$ или

$$r > r_п. \qquad (15\text{-}46)$$

Таким образом, *колебательный контур устойчив в том случае, если его сопротивление потерь превышает величину отрицательного сопротивления.*

Состояния устойчивого равновесия контура могут иметь разный характер в зависимости от его параметров.

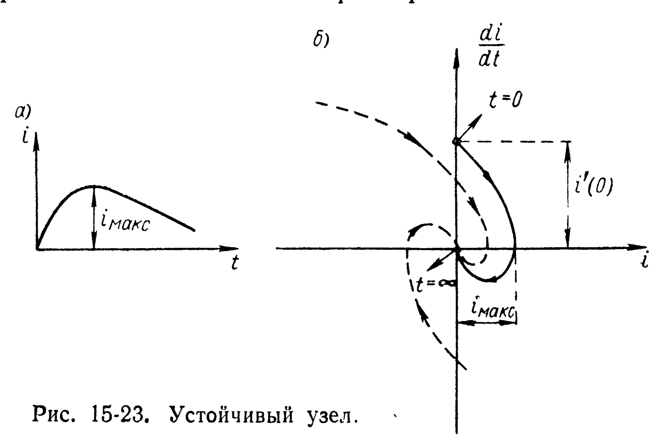


Рис. 15-23. Устойчивый узел.

Так, если

$$\alpha_э^2 > \omega_0^2,$$

оба корня вещественны и отрицательны. В этом случае, система, будучи выведена из состояния равновесия, возвращается в него; в контуре наблюдается апериодический процесс, подробно рассмотренный в § 8-5.

На рис. 15-23 приведена временная диаграмма тока (*а*), а также показан фазовый портрет процесса (*б*). Начальное положение изображающей точки характеризуется значениями:

$$i(0) = 0; \quad \left[\frac{di}{dt}\right]_{t=0} = i'(0).$$

В последующем точка скользит по фазовой траектории, достигая в конечном результате (при $t = \infty$) начала координат ($i = 0$; $\frac{di}{dt} = 0$). Такая точка равновесия носит наименование устойчивого узла.

На рис. 15-24 пунктиром показаны некоторые фазовые траектории, наблюдаемые в случае равновесия этого типа при иных (по сравнению с рассмотренными) начальных условиях.

Другой вид устойчивого равновесия характеризуется тем, что $\alpha_э^2 < \omega_0^2$.

При этом оба корня комплексно сопряженные с отрицательной вещественной частью. Процесс возвращения системы в исходное состояние носит колебательный характер, как это было показано на рис. 15-3, *а*. Фазовый портрет представляет собой в данном случае закручивающуюся спираль (рис. 15-24, *а*), по которой изображающая точка движется в направлении начала координат.

Точка на фазовой плоскости, характеризующая этот вид равновесия, называется **у с т о й ч и в ы м ф о к у с о м**.

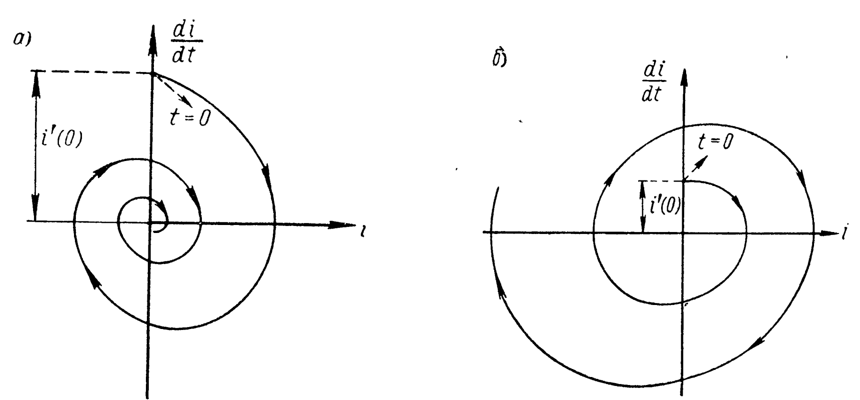


Рис. 15-24. Устойчивый фокус (*а*) и неустойчивый фокус (*б*).

Если условие (15-46) не выполняется и

$$r_n > r, \tag{15-47}$$

равновесие неустойчиво.

Возможны два основных вида неустойчивого равновесия контура. Первый из них характеризуется тем, что при $r_n > r$ соблюдается неравенство $\omega_0^2 > \alpha_э^2$. Этот вид равновесия характеризуется точкой, называемой **н е у с т о й ч и в ы м ф о к у с о м**.

Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные с положительной вещественной частью.

В этом случае свободный процесс имеет характер нарастающих во времени колебаний с частотой $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (см. рис. 15-3, *б*). Под воздействием сколь угодно малого толчка система уходит из состояния равновесия — происходит самовозбуждение колебаний.

Условие неустойчивости (15-47) является в то же время условием самовозбуждения [ср. (15-47) с неравенством (15-6)].

Фазовый портрет равновесия этого типа изображен на рис. 15-24, *б*. Фазовая траектория имеет вид «раскручивающейся спирали», начинающейся с точки $i = 0$; $\frac{di(0)}{dt} = i'(0)$.

Другой вид неустойчивого равновесия имеет место в том случае, когда при $r_n > r$ выполняется неравенство $\alpha_э^2 > \omega_0^2$; при этом оба корня — вещественны, положительны.

Временная диаграмма и фазовая траектория для этого вида равновесия изображены на рис. 15-25. Система выходит из точки рав-

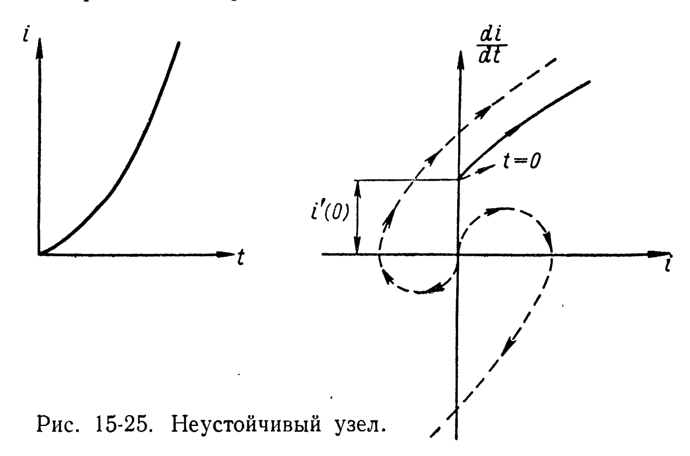


Рис. 15-25. Неустойчивый узел.

новесия, называемой **неустойчивым узлом**, совершая движение по апериодической нарастающей кривой.

На рис. 15-25 показаны также (пунктиром) фазовые траектории, соответствующие некоторым другим начальным условиям. Они также относятся к случаю равновесия типа «неустойчивый узел».

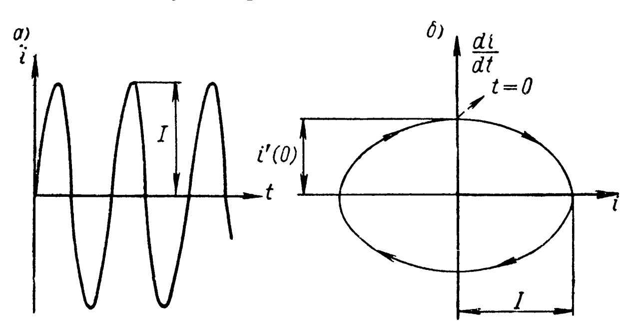


Рис. 15-26. Центр.

Возможен, наконец, еще один вид равновесия, при котором $r = r_n$, т. е. $\alpha_э = 0$.

Оба корня в этом случае мнимые; после отклонения от состояния равновесия ток в контуре совершает колебания с неизменной амплитудой, как это видно на временной диаграмме (рис. 15-26, *а*) и фазовом портрете (рис. 15-26, *б*).

Это состояние системы характеризуется точкой на фазовой плоскости, которую называют ц е н т р о м. Амплитуда колебаний системы около состояния равновесия не превышает исходной амплитуды. Если первоначальный толчок достаточно мал, то и периодические отклонения от равновесного состояния оказываются столь же малыми.

В том случае, когда отрицательное сопротивление R_n включено параллельно колебательному контуру (см. рис. 15-4), условие устойчивости принимает вид $r > r_{n\ вн}$ или, учитывая, что $r_{n\ вн} = \frac{\rho^2}{R_n}$, получим, что система устойчива, если

$$R_n > \frac{\rho^2}{r} = R_э. \qquad (15\text{-}48)$$

в) Критерий Найквиста

Равновесие активной цепи, охваченной положительной обратной связью, в определенных условиях может оказаться неустойчивым.

Действительно, представим себе, что напряжение, получаемое на выходе четырехполюсника обратной связи, $U_{1\beta}$ (рис. 15-27, *а*) по фазе совпадает, а по величине превосходит напряжение, возникшее в силу каких-либо причин на входе системы между точками *b-b*. Тогда при сколь угодно малом возмущении колебания в системе будут лавинообразно нарастать и состояние равновесия будет неустойчивым.

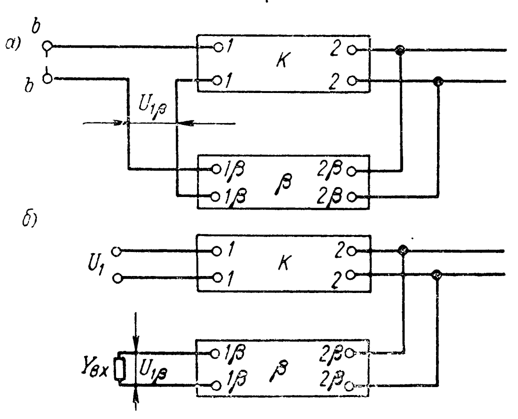


Рис. 15-27. К формулировке критерия Найквиста.

Для исследования характера равновесия активного четырехполюсника, охваченного обратной связью, можно воспользоваться простым и наглядным методом, предложенным Найквистом.

Разомкнем систему в точках 1β — 1β и подключим к этим точкам нагрузку, проводимость которой равна входной проводимости основного четырехполюсника $Y_{вх}$ (рис. 15-27, *б*).

Коэффициент передачи полученного таким путем четырехполюсника (разомкнутой системы), равен произведению коэффициентов передачи $K(j\omega)$ и $\beta(j\omega)$, т. е.

$$K_\Sigma(j\omega) = \frac{U_{1\beta}}{U_1} = K(j\omega)\,\beta(j\omega).$$

Так как

$$K(j\omega) = K(\omega)\, e^{-j\varphi_k},$$
$$\beta(j\omega) = \beta(\omega)\, e^{-j\varphi_\beta},$$

где φ_k и φ_β — фазовые углы четырехполюсников K и β, то

$$K_\Sigma(j\omega) = K_\Sigma(\omega)\, e^{-j\varphi_\Sigma} = K(\omega)\,\beta(\omega)\, e^{-j(\varphi_k + \varphi_\beta)}. \qquad (15\text{-}49)$$

Модуль коэффициента передачи разомкнутой системы равен произведению модулей $K(\omega)$ и $\beta(\omega)$:

$$K_\Sigma(\omega) = K(\omega)\,\beta(\omega), \qquad (15\text{-}50)$$

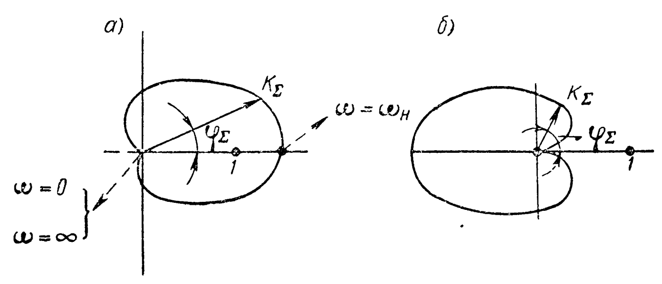


Рис. 15-28. Диаграммы Найквиста.

а фазовый угол его равен сумме фазовых углов φ_k и φ_β:

$$\varphi_\Sigma = \varphi_k + \varphi_\beta. \qquad (15\text{-}51)$$

Замкнутая система будет неустойчива, если хотя бы для одной частоты $\omega_н$ окажутся выполненными два условия:

$$\left.\begin{aligned} K_\Sigma(\omega_н) &= K(\omega_н)\,\beta(\omega_н) > 1, \\ \varphi_\Sigma(\omega_н) &= \varphi_k(\omega_н) + \varphi_\beta(\omega_н) = 2n\pi. \end{aligned}\right\} \qquad (15\text{-}52)$$

Если же ни для одной из частот условия (15-52) не выполняются, то замкнутая система устойчива.

Этим положениям можно придать наглядную графическую трактовку. Будем строить в полярных координатах амплитудно-фазовую характеристику

$$K_\Sigma(\omega) = f(\varphi_\Sigma)$$

для всех частот от $\omega = 0$ до $\omega = \infty$ (рис. 15-28).

Конец вектора $K_\Sigma(\omega)$ будет при этом описывать кривую, называемую **годографом** амплитудно-фазовой характеристики. Каждая точка годографа соответствует определенной частоте.

При рассмотрении частотных характеристик обычных усилителей (§ 14-3, п. «в») было показано, что как на очень низких частотах ($\omega \to 0$), так и на частотах весьма высоких ($\omega \to \infty$) коэффициент

усиления стремится к нулю. Отсюда следует, что годограф амплитудно-фазовой характеристики представляет собой замкнутую фигуру, начинающуюся и заканчивающуюся в начале координат.

Если эта фигура охватывает точку с координатами (*1*, *0*), условия (15-52) для частоты $\omega = \omega_н$ выполняются и система неустойчива (рис. 15-28, *а*). Если же точка (*1*, *0*) остается вне годографа,то ни для какой из частот условия (15-52) не выполняются и система устойчива (рис. 15-28, *б*).

Теперь может быть сформулирован критерий устойчивости Найквиста: *замкнутая система четырехполюсника, охваченного положительной обратной связью, устойчива, если годограф амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы не охватывает точку (1, 0).*

Рассмотренные в настоящем параграфе критерии устойчивости систем с отрицательным сопротивлением весьма удобны для исследования радиотехнических цепей: Известны и некоторые другие критерии устойчивости, на изучении которых мы не останавливаемся, так как в радиотехнике они применяются сравнительно редко.

В заключение следует подчеркнуть, что основой для определения всех критериев устойчивости являются рассуждения о знаках действительных частей корней характеристического уравнения системы (см. п. «б» этого параграфа). В частности, хотя критерий Найквиста был связан с видом частотных характеристик четырехполюсников, составляющих систему, однако можно показать, что этот же критерий может быть обоснован и с более общих позиций, базирующихся на отрицательности действительных корней характеристического уравнения системы.

15-5. Ламповый автогенератор гармонических колебаний с обратной связью

Изложенные в предыдущих параграфах соображения позволяют заключить, что в автогенераторе функции клапана, управляющего поступлением энергии от источника постоянного тока в колебательную систему, выполняет элемент с отрицательным дифференциальным сопротивлением.

Большинство нелинейных элементов, используемых в автоколебательных цепях, принадлежит к сопротивлениям типа *N* (электронные лампы, транзисторы и т. п.). В схеме автогенераторов их следует подключать к колебательному контуру (по переменному току) параллельно (см. рис. 15-4, *а*).

Вопрос о способах включения отрицательных сопротивлений в колебательный контур подробно обсуждается в § 15-13.

Рассмотрим физические особенности лампового автогенератора гармонических колебаний с обратной связью, получившего в современной радиотехнике наиболее широкое применение.

Простейшая схема генератора подобного типа, предложенная немецким физиком Мейснером, изображена на рис. 15-29. Как видно из рисунка, здесь используется трансформаторная обратная связь между анодной и сеточной цепями лампы ($L_{св}$ — катушка обратной связи).

Предположим, что на контуре L, C под влиянием каких-то причин (например, вследствие флюктуации анодного тока) возникло переменное напряжение с частотой $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Тогда в сеточной цепи, благодаря наличию обратной связи, также появится напряжение аналогичной частоты, которое затем усиливается лампой.

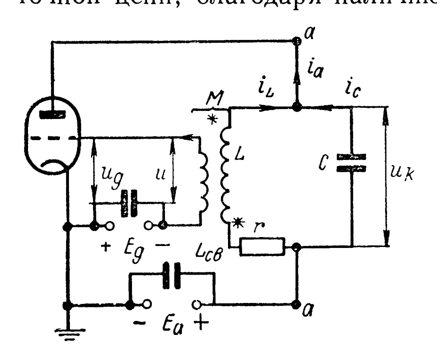


Рис. 15-29. К анализу процессов в автогенераторе гармонических колебаний.

Если напряжение обратной связи u, т. е. переменная составляющая напряжения между сеткой и катодом, сдвинуто по фазе относительно переменной составляющей анодного напряжения u_a на 180° (обратная связь положительна), то образующееся на контуре усиленное напряжение будет поддерживать ранее возникшие там электрические колебания. Другими словами, сопротивление части схемы рис. 15-29, расположенной слева от точек *а-а*, оказывается отрицательным. Если же это условие не выполняется, колебания, наоборот, будут даже ослабляться.

Отсюда следует, что при наличии необходимых фазовых соотношений, а также при достаточной величине обратной связи в схеме действительно могут установиться автоколебания. (Подробнее фазовые соотношения в цепях автогенератора рассмотрены в § 15-11).

Определим коэффициент обратной связи $\beta(j\omega)$ рассматриваемого автогенератора. Согласно формуле (15-14)

$$\beta(j\omega) = \frac{U_g}{U_a}, \qquad (15\text{-}53)$$

где $U_g = U$ и U_a — комплексные амплитуды сеточного и анодного напряжений.

Так как напряжение на аноде $U_a = -U_к = -(r + j\omega L)I_L \approx \approx -j\omega L I_L$, где $U_к$ — напряжение на контуре, а напряжение на сетке $U_g = \pm j\omega M I_L$, то

$$\beta(j\omega) \approx \pm \frac{M}{L}.$$

Здесь за положительное направление тока i_L принималось направление, указанное на рис. 15-29 стрелкой. Что же касается знака перед $\omega M I_L$ в формуле для U_g, то выбор его зависит от способа включения катушки обратной связи в сеточную цепь лампы. Очевидно, напряжения u и u_a будут находиться в противофазе, если

$$\beta(j\omega) = -\frac{M}{L}. \tag{15-54}$$

15-6. Дифференциальное уравнение лампового автогенератора гармонических колебаний. Условие самовозбуждения

Выше были сформулированы общие принципы генерирования автоколебаний. Теперь перейдем к количественному анализу процессов в ламповом автогенераторе гармонических колебаний с обратной связью.

Интересующие нас уравнения Кирхгофа для схемы, изображенной на рис. 15-29, имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} i_a &= i_L + i_C; \\ L\frac{di_L}{dt} + ri_L - \frac{1}{C}\int i_C\,dt &= 0; \\ u_g = -E_g + u &= -E_g \pm M\frac{di_L}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{15-55}$$

Физический смысл первого уравнения системы (15-55) не требует пояснений. Второе уравнение определяет сумму падений напряжения на элементах колебательного контура. Наконец, третье уравнение (написанное в предположении, что сеточные токи отсутствуют), характеризует напряжение на управляющей сетке лампы. Переменная составляющая этого напряжения $u = \pm M\frac{di_L}{dt}$.

[В дальнейшем будем полагать, что $u = M\frac{di_L}{dt}$, т. е. что анодная и сеточная катушки включены встречно (рис. 15-29)].

Преобразуем систему уравнений. Для этого продифференцируем второе уравнение дважды по t:

$$L\frac{d^3 i_L}{dt^3} + r\frac{d^2 i_L}{dt^2} - \frac{1}{C}\cdot\frac{di_C}{dt} = 0.$$

Подставляя сюда значение тока $i_C = i_a - i_L$, после несложных преобразований будем иметь

$$\frac{d^3 i_L}{dt^3} + \frac{r}{L}\cdot\frac{d^2 i_L}{dt^2} - \frac{1}{LC}\left(\frac{di_a}{dt} - \frac{di_L}{dt}\right) = 0. \tag{15-56}$$

Воспользуемся далее соотношениями:

$$\frac{di_L}{dt}=\frac{1}{M}u;\quad \frac{d^2i_L}{dt^2}=\frac{1}{M}\cdot\frac{du}{dt}\text{ и }\frac{d^3i_L}{dt^3}=\frac{1}{M}\cdot\frac{d^2u}{dt^2}.$$

Тогда (15-56) принимает вид

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{r}{L}\cdot\frac{du}{dt}-\frac{M}{LC}\cdot\frac{di_a}{dt}+\frac{1}{LC}u=0. \tag{15-57}$$

В выражение (15-57), кроме неизвестной функции $u(t)$, входит еще функция $i_a(t)$.

Анодный ток лампы в общем случае, как известно, зависит от сеточного u_g и анодного u_a напряжений, т. е.

$$i_a=f(u_g, u_a).$$

Поэтому

$$\frac{di_a}{dt}=\frac{\partial i_a}{\partial u_g}\cdot\frac{du_g}{dt}+\frac{\partial i_a}{\partial u_a}\cdot\frac{du_a}{dt}=S\frac{du_g}{dt}+\frac{1}{R_i}\cdot\frac{du_a}{dt},$$

где S — крутизна характеристики;

R_i — внутреннее сопротивление лампы.

Так как анодное напряжение

$$u_a=E_a-u_\text{к}=E_a-\left(ri_L+L\frac{di_L}{dt}\right),$$

то

$$\frac{du_a}{dt}=-r\frac{di_L}{dt}-L\frac{d^2i_L}{dt^2}=-\frac{r}{M}u-\frac{L}{M}\cdot\frac{du}{dt}.$$

Согласно третьему уравнению системы (15-55) производная

$$\frac{du_g}{dt}=\frac{du}{dt}.$$

Следовательно,

$$\frac{di_a}{dt}=\left(S-\frac{L}{MR_i}\right)\frac{du}{dt}-\frac{r}{MR_i}u.$$

Подставляя значение di_a/dt в равенство (15-57), окончательно будем иметь

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{1}{L}\left(r+\frac{L}{CR_i}-\frac{MS}{C}\right)\frac{du}{dt}+\omega_0^2\left(1+\frac{r}{R_i}\right)u=0. \tag{15-58}$$

Таким образом, процессы в исследуемой системе описываются дифференциальным уравнением (15-58). Это уравнение, как и следовало ожидать, оказывается нелинейным. Коэффициенты его зависят от искомой функции u, так как внутреннее сопротивление R_i и крутизна характеристики S лампы в общем случае являются функциями u.

Если внутреннее сопротивление лампы велико, так что $R_i \gg r$ и, кроме того, $R_i \gg R_э=\frac{L}{Cr}$, где $R_э$ — входное сопротивление

контура при резонансе, то уравнение (15-58) принимает более простой вид:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{L}\left(r - \frac{MS}{C}\right)\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0. \qquad (15\text{-}59)$$

Займемся качественным рассмотрением этого уравнения.

Нетрудно видеть, что множитель $r_э = r - \frac{MS}{C}$, входящий в коэффициент перед производной du/dt, имеет размерность сопротивления. Величина r здесь характеризует собственное сопротивление потерь контура. Что же касается второго слагаемого, то оно имеет отрицательный знак и, следовательно, является отрицательным сопротивлением.

Выше уже отмечалось, что электронная лампа, охваченная положительной обратной связью, при определенных условиях может выполнять роль отрицательного сопротивления. В рассматриваемой схеме слагаемое

$$r_{вн} = -\frac{MS}{C}$$

представляет собой отрицательное сопротивление, вносимое в колебательный контур со стороны такой лампы. Величина этого сопротивления, как легко видеть, зависит от взаимоиндуктивности или, другими словами, от величины обратной связи. Чем больше коэффициент M, тем больше абсолютное значение вносимого в контур сопротивления.

Итак, величина $r - \frac{MS}{C}$ в уравнении (15-59) есть результирующее сопротивление контура при наличии обратной связи.

Определим условие самовозбуждения генератора. В соответствии с общими принципами, изложенными в § 15-2 и 15-4, будем полагать, что рассматриваемая система в окрестностях начальной рабочей точки линейна, и процессы в ней описываются линейным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\alpha_{э0}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0, \qquad (15\text{-}60)$$

где

$$\alpha_{э0} = \frac{1}{2L}\left(r - \frac{MS_0}{C}\right),$$

а $S_0 = S(0)$ — крутизна характеристики лампы в начальной рабочей точке.

Тогда условие самовозбуждения (см. аналогичное рассуждение в § 15-2) будет иметь вид

$$r - \frac{MS_0}{C} < 0. \qquad (15\text{-}61)$$

При выполнении неравенства (15-61) сопротивление $r_э$ контура оказывается отрицательным, и автоколебания в системе нарастают.

Обратимся к дифференциальному уравнению (15-58). Сопротивление контура в этом случае

$$r_э = r + \frac{L}{CR_i} - \frac{MS_0}{C},$$

т. е. здесь появляется дополнительный член $\frac{L}{CR_i} = \frac{\rho^2}{R_i}$, учитывающий шунтирующее действие внутреннего сопротивления лампы.

Проведя рассуждения, аналогичные предыдущим, можно показать, что самовозбуждение автогенератора наступает при условии

$$r + \frac{L}{CR_i} - \frac{MS_0}{C} < 0,$$

или в иной форме записи

$$\frac{M}{L} > \frac{1}{R_i S_0} + \frac{Cr}{S_0 L}.$$

Так как отношение M/L равно абсолютному значению коэффициента обратной связи β,

$$\frac{1}{R_i S_0} = D,$$

где D — проницаемость лампы, а $\frac{L}{Cr} = R_э$, то окончательно будем иметь

$$|\beta| > D + \frac{1}{S_0 R_э}. \qquad (15\text{-}62)$$

При $D = 0$ (т. е. $R_i = \infty$) это неравенство переходит в выражение

$$|\beta| > \frac{1}{S_0 R_э},$$

аналогичное условию (15-61). В дальнейшем вместо $|\beta|$ будем писать просто β, понимая под этим абсолютное значение коэффициента связи.

Таким образом, для самовозбуждения автогенератора при заданных параметрах контура и лампы необходимо, чтобы коэффициент обратной связи был больше величины

$$\beta_{кр} = D + \frac{1}{S_0 R_э}.$$

Последняя называется *критическим коэффициентом обратной связи*.

Условие самовозбуждения автогенератора нетрудно также получить, используя основные положения теории устойчивости.

В исследуемой схеме автоколебания будут возникать лишь в том случае, когда состояние равновесия ее в начальной рабочей точке неустойчиво.

Чтобы выяснить, является ли исходное статическое состояние генератора устойчивым, воспользуемся критерием Найквиста. Для этого определим коэффициент передачи схемы с разомкнутой цепью обратной связи (рис. 15-30).

При малых амплитудах входных колебаний комплексная амплитуда напряжения на контуре будет

$$U_к = \frac{\mu U_1}{R_i + Z_э} Z_э.$$

Если $R_i \gg z_э$, то

$$U_к \approx U_1 S_0 Z_э.$$

Ток, текущий через индуктивную ветвь контура, как обычно,

$$I_L = \frac{U_к}{j\omega L}.$$

Следовательно, комплексная амплитуда выходного напряжения

$$U_2 = I_L j\omega M = \frac{MS_0 Z_э}{L} U_1,$$

и коэффициент передачи разомкнутой системы принимает вид

$$K_\Sigma (j\omega) = K(j\omega)\,\beta\,(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{MS_0}{L} Z_э.$$

Входное сопротивление параллельного контура, как известно, определяется выражением

$$Z_э = \frac{1}{Y_э} = \frac{1}{\frac{1}{R_э} - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R_э^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}} e^{j\varphi},$$

где

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{\frac{1}{R_э}}.$$

Поэтому модуль коэффициента передачи $K_\Sigma j(\omega) = K_\Sigma (\omega) e^{-j\varphi_\Sigma}$ равен

$$K_\Sigma (\omega) = \frac{MS_0}{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R_э^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}} =$$

$$= \frac{MS_0}{L} R_э \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{M}{L} S_0 R_э \cos \varphi.$$

Отсюда видно, что амплитудно-фазовая характеристика системы (т. е. зависимость K_Σ от $\varphi_\Sigma = -\varphi$ в полярной системе координат) представляет собой окружность с диаметром $\frac{M}{L} S_0 R_э$ (рис. 15-31).

Если эта окружность охватывает точку с координатами (*1*,*0*), то согласно критерию Найквиста исходная система будет находиться в состоянии неустойчивого равновесия. Другими словами, автогенератор самовозбуждается при условии

$$\frac{M}{L} S_0 R_э > 1 \text{ или } \frac{M}{L} = \beta > \frac{1}{S_0 R_э}.$$

Полученное выражение совпадает с неравенством (15-62) при $D = 0$.

Условие самовозбуждения автогенератора можно также получить непосредственно из анализа цепи, изображенной на рис. 15-4, *а*.

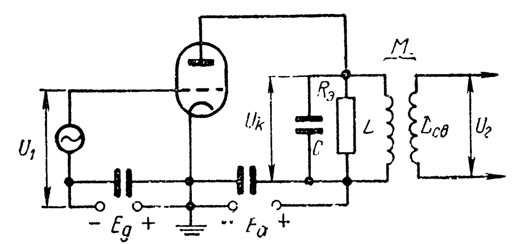


Рис. 15-30. К определению условия самовозбуждения автогенератора.

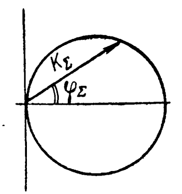


Рис. 15-31. Амплитудно-фазовая характеристика автогенератора с разомкнутой обратной связью.

Так как абсолютное значение отрицательного сопротивления лампы, охваченной обратной связью, согласно формуле (15-34)

$$R_n = \frac{1}{S_0 [\,|\beta| - D]},$$

из неравенства (15-8) имеем

$$\frac{1}{S_0 (\beta - D)} < R_э.$$

Это выражение легко приводится к виду (15-62).

15-7. Квазилинейная теория автогенератора. Установившийся режим

В предыдущем параграфе фактически была рассмотрена так называемая линейная теория лампового генератора, в основе которой лежит замена исходного нелинейного дифференциального уравнения соответствующим линейным уравнением. Эта теория позволила нам установить условие самовозбуждения генератора [см. неравенство (15-62)]. Однако решение линейного дифференциального уравнения не отражает в достаточной степени сущность процессов, протекающих в автогенераторе. Линейная теория, например, не позволяет определить амплитуду колебаний в стационарном состоянии, так как из решения уравнения (15-60) следует, что колебания при условии (15-61) должны нарастать до бесконечности.

Стационарные амплитуды напряжений и токов, очевидно, можно найти лишь при условии учета нелинейности характеристики электронной лампы, ибо эта нелинейность, как уже говорилось, и является в конечном счете причиной установления автоколебаний в генераторе. В самом деле, при увеличении «размаха» колебаний усилительные способности лампы ухудшаются (напряжение на сетке заходит в области с малыми значениями крутизны), и нарастание колебаний в конце концов прекращается.

В установившемся состоянии автогенератор создает электрические колебания, форма которых из-за влияния нелинейности отличается в какой-то степени от синусоидальной. Если однако нагрузкой генератора является колебательный контур с высокой добротностью, приближенно можно полагать, что напряжение на контуре, а следовательно, и напряжение на сетке лампы изменяются во времени по гармоническому закону. Влиянием высших гармонических составляющих анодного тока в этом случае можно пренебречь, так как образующееся за счет их падение напряжения на контуре оказывается малым.

Такое допущение означает, что вместо обычной крутизны S, которая является функцией мгновенного напряжения на сетке, можно воспользоваться средней крутизной

$$S_{\text{ср}} = \frac{I_{a1}}{U_g},$$

где I_{a1} — амплитуда первой гармоники анодного тока и U_g — амплитуда напряжения на сетке. Величина средней крутизны, как это показано в § 10-2, зависит только от амплитуды напряжения на сетке лампы.[1]

Приведенные соображения составляют основу **квазилинейной теории автогенератора гармонических колебаний**, разработанной советским ученым Ю. Б. Кобзаревым. Согласно этой теории крутизна (средняя) лампы в пределах любого периода колебаний считается постоянной (т. е. система как бы линейна) и вместе с тем $S_{\text{ср}}$, как уже только что отмечалось, является функцией амплитуды колебаний.

Используем квазилинейную теорию для определения стационарных амплитуды и частоты колебаний.

В соответствии с изложенным будем полагать, что переменные токи и напряжения в цепях автогенератора изменяются во времени по гармоническому закону. Тогда вместо системы интегро-дифференциальных уравнений (15-55) для установившегося состояния можно написать систему алгебраических уравнений, в которую входят соответствующие комплексные амплитуды:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{I}_{a1} = \boldsymbol{I}_L + \boldsymbol{I}_C; \\ r\boldsymbol{I}_L + j\omega L\boldsymbol{I}_L - \frac{1}{j\omega C}\boldsymbol{I}_C = 0; \\ \boldsymbol{U}_g = j\omega M\boldsymbol{I}_L. \end{gathered}$$

Здесь ω — угловая частота автоколебаний.

---

[1] Мы полагаем, что реакцией анодной цепи можно пренебречь, т. е. проницаемость лампы равна нулю. В общем же случае $S_{\text{ср}} = \dfrac{I_{a1}}{U_g + DU_a}$.

Подставляя во второе уравнение значения $I_L = \frac{U_g}{j\omega M}$ и $I_C = I_{a1} - I_L = I_{a1} - \frac{U_g}{j\omega M}$, получим

$$U_g\left(\frac{L}{M} - j\frac{r}{\omega M} - \frac{1}{\omega^2 MC}\right) = \frac{1}{j\omega C} I_{a1}. \qquad (15\text{-}63)$$

Так как $\frac{I_{a1}}{U_g} = S_{\text{ср}}$ (переменные составляющие сеточного напряжения и анодного тока изменяются в фазе), из (15-63) будем иметь

$$1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - j\left(\frac{r}{\omega L} - \frac{\omega_0^2}{\omega} MS_{\text{ср}}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 0 \qquad (15\text{-}64)$$

и

$$\frac{r}{L} - \omega_0^2 MS_{\text{ср}}(U_g) = 0. \qquad (15\text{-}65)$$

Эти выражения и определяют параметры автоколебаний в стационарном состоянии.

Из равенства (15-64) видно, что угловая частота автоколебаний в установившемся режиме

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

т. е. ω совпадает с резонансной частотой контура. Этот результат получается в предположении, что внутреннее сопротивление $R_i \to \infty$.

Стационарная амплитуда напряжения U_g на сетке лампы согласно равенству (15-65) представляет собой величину, при которой

$$S_{\text{ср}}(U_g) = \frac{r}{\omega_0^2 LM} = \frac{rC}{M}. \qquad (15\text{-}66)$$

15-8. Мягкое и жесткое самовозбуждение автогенератора

Чтобы рассчитать U_g, необходимо иметь функцию $S_{\text{ср}}(U_g)$. Последняя обычно задается в виде графика. Поэтому ниже рассмотрим графический способ определения стационарной амплитуды.

Прежде чем перейти к изложению этого способа, выясним характер изменения средней крутизны в зависимости от амплитуды сеточного напряжения.

Практически средняя крутизна вычисляется на основании измерения амплитуды сеточного напряжения и амплитуды тока в контуре, которая затем пересчитывается в амплитуду первой гармоники анодного тока, при разомкнутой цепи обратной связи. Дей-

ствительно, полагая, что ток в контуре изменяется во времени по гармоническому закону, получим

$$I_{a1}=\frac{I_к}{Q},$$

где Q — добротность контура; следовательно,

$$S_{ср}=\frac{1}{Q}\cdot\frac{I_к}{U_g}. \qquad (15\text{-}67)$$

Функция $I_к = f(U_g)$ называется колебательной характеристикой генератора. Вид этой функции существенно зависит от положения начальной рабочей точки на характеристике лампы $i_a = f(u_g)$. Если начальная точка находится на середине линейного участка

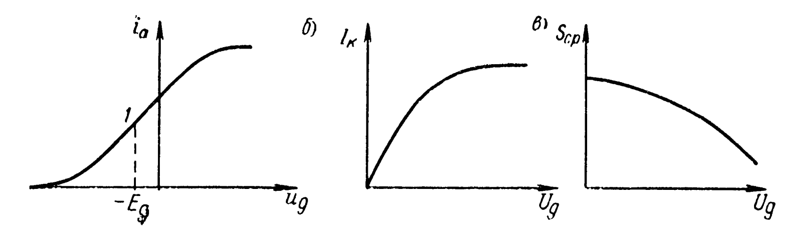


Рис. 15-32. Колебательная характеристика генератора и зависимость $S_{ср}(U_g)$ при малом напряжении смещения.

этой зависимости (точка *1* на рис. 15-32, *а*), то колебательная характеристика имеет вид рис. 15-32, *б*. Из рисунка следует, что вначале амплитуда тока в контуре растет почти пропорционально амплитуде сеточного напряжения, а затем рост ее вследствие нелинейности замедляется. На основании (15-67) нетрудно прийти к выводу, что такой колебательной характеристике соответствует кривая $S_{ср}(U_g)$, показанная на рис. 15-32, *в*. Отличительной особенностью этой кривой является непрерывное уменьшение $S_{ср}$ с ростом U_g.

Если же начальная рабочая точка сильно смещена влево (рис. 15-33, *а*), колебательная характеристика будет иметь иной вид (рис. 15-33, *б*). При малых амплитудах сеточного напряжения анодный ток, а вместе с ним и ток в контуре растут очень медленно. Затем при достаточно больших амплитудах напряжения на сетке скорость нарастания $I_к$ увеличивается. В области «насыщения» нарастание тока, как и в предыдущем случае, прекращается. Средняя крутизна $S_{ср}$ с ростом U_g сначала увеличивается, а потом начинает монотонно убывать (рис. 15-33, *в*).

Перейдем к определению стационарной амплитуды колебаний. Пусть средняя крутизна с увеличением амплитуды сеточного напряжения уменьшается (рис. 15-34). Чтобы найти амплитуду напряжения на сетке в стационарном состоянии, построим на этом же

графике прямую, параллельную оси абсцисс с ординатой rC/M — так называемую прямую обратной связи. Точка пересечения кривой $S_{ср}(U_g)$ с указанной прямой, как нетрудно видеть, и удовлетворяет условию (15-66). Следовательно, абсцисса этой точки определяет для заданной величины обратной связи стационарную амплитуду сеточного напряжения.

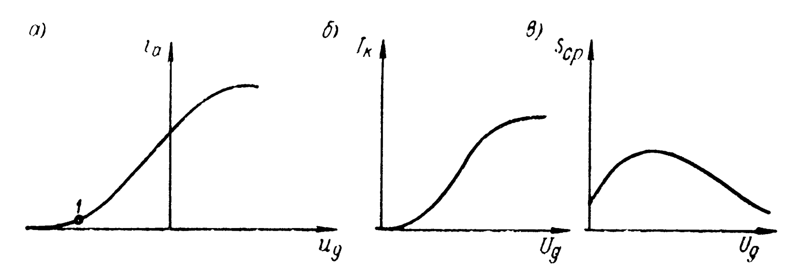


Рис. 15-33. Колебательная характеристика генератора и зависимость $S_{ср}(U_g)$ при большом напряжении смещения.

По мере увеличения коэффициента M прямая обратной связи опускается, и амплитуда колебаний увеличивается (точка пересечения движется по кривой $S_{ср}(U_g)$ вправо). Если же коэффициент обратной связи уменьшается, амплитуда автоколебаний также уменьшается.

В случае малых значений взаимоиндуктивности прямая обратной связи может вообще не пересекать кривую $S_{ср}(U_g)$. Это значит, что

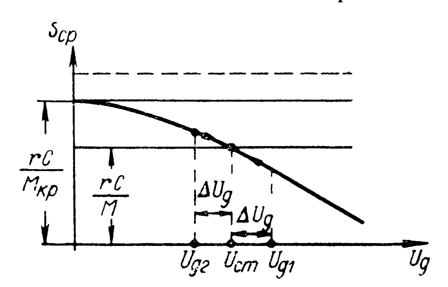


Рис. 15-34. К определению стационарной амплитуды автоколебаний.

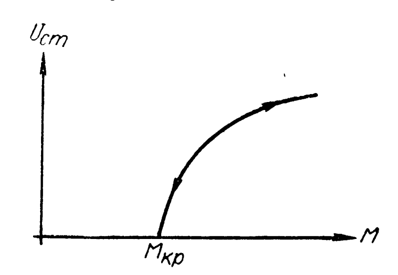


Рис. 15-35. Зависимость амплитуды автоколебаний от величины обратной связи в мягком режиме.

при такой величине обратной связи установившиеся колебания в системе не существуют, т. е. автогенератор не возбуждается.

На рис. 15-34 подобная прямая показана пунктиром.

Таким образом, *амплитуда автоколебаний в установившемся режиме является функцией величины обратной связи.* Изменяя степень связи между сеточной и анодной цепями автогенератора, можно получить колебания различной интенсивности.

Зависимость амплитуды $U_{ст}$ от величины M (или β) показана на рис. 15-35. Из рисунка видно, что установившиеся колебания в генераторе имеют место, если $M > M_{кр}$. Здесь $M_{кр}$ есть критическая взаимоиндуктивность, величина которой удовлетворяет соотношению

$$S_{ср}(0) = \frac{rC}{M_{кр}},$$

т. е. $M_{кр}$ соответствует прямой обратной связи, проходящей через точку $S_{ср}$ (0) — см. рис. 15-34.

Так как при бесконечно малых амплитудах колебаний средняя крутизна равна обычной крутизне характеристики в начальной точке, то

$$M_{кр} = \frac{rC}{S_{ср}(0)} = \frac{rC}{S_0}.$$

Следовательно, условие $M > M_{кр}$ можно переписать в виде

$$M > \frac{rC}{S_0}.$$

Нетрудно заметить, что это неравенство совпадает с обычным условием самовозбуждения генератора [см. выражение (15-61)].

Критическому значению взаимоиндуктивности, разумеется, соответствует критический коэффициент обратной связи $\beta_{кр} = \frac{M_{кр}}{L}$ (см. § 15-6).

Рассмотренные особенности автоколебательного процесса характеризуют так называемое мягкое самовозбуждение. При таком режиме автоколебания в генераторе устанавливаются без всякого внешнего электрического толчка. В самом деле, пусть величина M превышает критическое значение. Тогда для любого напряжения на сетке с амплитудой $U_g < U_{ст}$ выполняется неравенство $S_{ср} > \frac{rC}{M}$, т. е. существует, как говорят, избыток крутизны, при котором активное сопротивление контура оказывается отрицательным. В результате даже сколь угодно малые колебания с частотой ω_0, появившиеся на сетке хотя бы вследствие тепловой флюктуации электронов контура, будут нарастать до тех пор, пока не наступит равенство (15-66).

Чтобы автоколебания в генераторе существовали в течение длительного промежутка времени, точка пересечения кривой $S_{ср}(U_g)$ с прямой обратной связи должна быть точкой устойчивого состояния системы. Заметим, что речь здесь идет не об устойчивости состояния равновесия (статической устойчивости), а об устойчивости колебательного процесса.

Пусть амплитуда напряжения на сетке под влиянием каких-то случайных факторов несколько увеличилась и стала равной $U_{g1} = U_{ст} + \Delta U_g$, где $\Delta U_g > 0$. Тогда при новой амплитуде коле-

баний средняя крутизна $S_{ср}(U_{g1})$ оказывается меньше величины rC/M, т. е. в системе появляется н е д о с т а т о к   к р у т и з н ы (рис. 15-35). В результате амплитуда колебаний начинает уменьшаться и в конце концов принимает значение $U_{ст}$.

Если исходная амплитуда уменьшилась ($U_{g2} = U_{ст} - \Delta U_g$), то $S_{ср}(U_{g2}) > \frac{rC}{M}$. Теперь автоколебания в генераторе вследствие избытка крутизны должны нарастать, и система вновь возвратится в исходное состояние. (Направления движения точки по кривой $S_{ср}(U_g)$ на рис. 15-35 указаны стрелками.) Таким образом, при мягком режиме самовозбуждения амплитуда колебаний в стационарном состоянии системы устойчива.

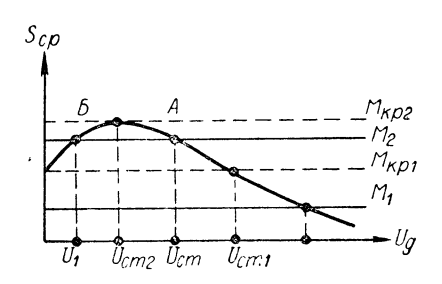


Рис. 15-36. К анализу процессов в автогенераторе с двумя стационарными состояниями.

Аналитически условие устойчивости стационарной амплитуды колебаний на основании проведенных рассуждений можно представить в виде

$$\frac{dS_{ср}}{dU_g} < 0. \qquad (15\text{-}68)$$

Изменение стационарной амплитуды колебаний как функции коэффициента M в режиме мягкого самовозбуждения характеризуется одной и той же кривой независимо от того, увеличивается или уменьшается величина M (рис. 15-35). В соответствии с этим появление и исчезновение (срыв) автоколебаний происходит при одном и том же коэффициенте обратной связи $\beta_{кр}$.

Перейдем к рассмотрению другого случая. Пусть функция $S_{ср}(U_g)$ имеет вид, изображенный на рис. 15-36.

Теперь прямая обратной связи при некоторых значениях M может пересекать кривую средней крутизны в двух точках (точки $А$ и $Б$ на рис. 15-36). Это значит, что уравнение (15-65) имеет два решения, и, следовательно, автогенератор обладает двумя стационарными состояниями. Однако состояние системы в точке $Б$ неустойчиво, так как здесь $\frac{dS_{ср}}{dU_g} > 0$. Поэтому малейшее отклонение амплитуды напряжения на сетке от значения U_1 (рис. 15-36) приведет либо к исчезновению (срыву) автоколебаний, либо к переходу системы в новое стационарное состояние, определяемое точкой $А$.

Состояние системы в точке $А$ устойчиво, ибо здесь средняя крутизна с увеличением амплитуды U_g уменьшается. Стало быть, автогенератор при выбранной величине обратной связи мог бы создавать колебания с амплитудой $U_{ст}$. Но для этого системе необходимо сообщить начальный электрический толчок, превышающий по величине значение U_1. Другими словами, при запуске автогенератора на-

пряжение на сетке лампы должно как бы «перескочить» через интервал $[0, U_1]$, что, очевидно, возможно, если система находится под воздействием внешнего возбуждающего напряжения.

Рассматриваемый режим, в отличие от мягкого самовозбуждения, характеризует так называемое жесткое самовозбуждение генератора.

Чтобы автогенератор мог самовозбуждаться без внешнего толчка, его необходимо перевести в исходное состояние, соответствующее мягкому режиму. Последнее нетрудно осуществить путем увеличения обратной связи.

На рис. 15-36 нанесена прямая обратной связи $M = M_1$, пересекающая кривую $S_{ср}(U_g)$ уже только в одной точке. Ясно, что

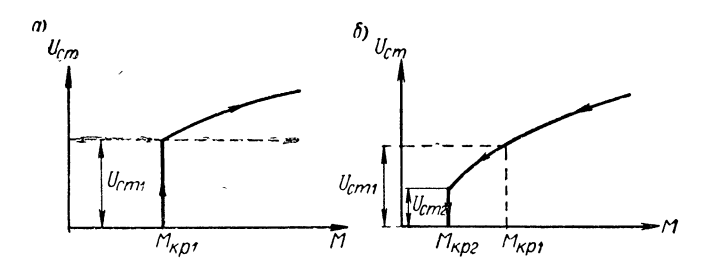


Рис. 15-37. Зависимость амплитуды автоколебаний от величины обратной связи в жестком режиме.

при таком значении коэффициента M самовозбуждение генератора будет происходить без всякого воздействия извне.

Нетрудно понять, что подобное самовозбуждение будет иметь место, если $M > M_{кр1}$, где $M_{кр1}$ — значение взаимоиндуктивности, удовлетворяющее равенству

$$S_0 = \frac{rC}{M_{кр1}}.$$

При $M = M_{кр1}$ автогенератор создает колебания с амплитудой $U_{ст1}$ (рис. 15-36). Увеличение коэффициента обратной связи, разумеется, приводит к росту амплитуды напряжения на сетке, т. е. к увеличению амплитуды автоколебаний. График изменения величины $U_g = U_{ст}$ в зависимости от величины M (если M увеличивается) представлен на рис. 15-37, *а*.

Интересно проследить, как будет изменяться амплитуда автоколебаний, если M уменьшается. Очевидно, уменьшение коэффициента обратной связи, как обычно, приводит к уменьшению амплитуды $U_{ст}$. Однако при $M \leqslant M_{кр1}$ автоколебания вопреки ожиданиям не срываются. Пусть, например, коэффициент M стал равен $M_2 < M_{кр1}$. В этом случае вновь имеем устойчивые автоколебания, амплитуда которых меньше, чем $U_{ст1}$ (рис. 15-36).

Срыв автоколебаний в генераторе наступит только тогда, когда M станет меньше величины $M_{кр2}$. Значению $M = M_{кр2}$ соответствует амплитуда напряжения на сетке $U_{ст2}$.

Кривая изменения $U_{ст}$ при уменьшении M приведена на рис. 15-37, *б*.

Таким образом, для жесткого режима самовозбуждения характерно наличие двух критических коэффициентов обратной связи: $\beta_{кр1} = \frac{M_{кр1}}{L}$ соответствует установлению автоколебаний, а $\beta_{кр2} = \frac{M_{кр2}}{L}$ — их срыву.

15-9. Установление колебаний в автогенераторе

Закон, характеризующий установление колебаний в автогенераторе, можно определить, найдя решение нелинейного дифференциального уравнения (15-58).

Наиболее полная теория автоколебательных систем, описываемых уравнениями (15-58) и (15-59), была создана в Советском Союзе Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым, Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси, А. А. Андроновым и др. В развитии нелинейной теории автоколебаний значительную роль сыграли работы А. М. Ляпунова и А. Пуанкаре.

Весьма простым методом приближенного решения нелинейного уравнения автогенератора синусоидальных колебаний является так называемый **метод медленно меняющихся амплитуд**. Его предложил Ван-дер-Поль, а строгое математическое обоснование дали Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси.

К изучению этого метода мы сейчас и перейдем.

Будем искать приближенное решение уравнения (15-59) в виде

$$u(t) = U(t)\sin\omega t, \tag{15-69}$$

где $U(t)$ — медленно меняющаяся амплитуда;

ω — частота колебаний.

Из выражения (15-69) следует, что автоколебания в генераторе можно представить как обычные гармонические колебания с переменной амплитудой (огибающей).

Пусть характеристика лампы $i_a = f(u_g)$ аппроксимируется неполным полиномом третьей степени:

$$i_a = a_0 + a_1 u_g + a_3 u_g^3; \qquad a_1 > 0 \text{ и } a_3 < 0.$$

При такой аппроксимации

$$S = \frac{di_a}{du_g} = a_1 + 3a_3 u_g^2 = S_0 - 3|a_3|u_g^2.$$

Подставляя выражение для S в исходное уравнение и полагая, что $u_g = -E_g + u = u$ (напряжение начального смещения E_g равно нулю), получим

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{r}{L} - \frac{MS_0}{LC} + 3\,|\,a_3\,|\,\frac{M}{LC}u^2\right)\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0.$$

Обозначив

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha_{э0} &= \frac{r}{L} - \omega_0^2 MS_0 = 2\alpha_0, \\ \gamma &= 3\,|\,a_3\,|\,\omega_0^2 M, \end{aligned}\right\} \qquad (15\text{-}70)$$

будем иметь

$$\frac{d^2u}{dt^2} + (2\alpha_0 + \gamma u^2)\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0. \qquad (15\text{-}71)$$

Дифференцируя далее выражение (15-69) по переменной t, находим

$$\frac{du}{dt} = \frac{dU}{dt}\sin\omega t + \omega U\cos\omega t.$$

Аналогично

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2U}{dt^2}\sin\omega t + 2\omega\frac{dU}{dt}\cos\omega t - \omega^2 U\sin\omega t.$$

Аналитически условия медленности изменения амплитуды $U(t)$ во времени записываются следующим образом:

$$\frac{dU}{dt} \ll \omega_0 U; \qquad \frac{d^2U}{dt^2} \ll \omega_0^2 U. \qquad (15\text{-}72)$$

По смыслу первое неравенство означает, что за время, равное периоду колебаний T_0, амплитуда должна меняться на величину $\Delta U \approx T_0\frac{dU}{dt}$, много меньшую, чем U. Второе неравенство накладывает аналогичные ограничения на скорость изменения приращения амплитуды:

$$\frac{d(\Delta U)}{dt} \ll \frac{1}{T_0}U.$$

Учитывая соотношения (15-72), приближенно можно написать:

$$\frac{du}{dt} \approx \omega U\cos\omega t;$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} \approx 2\omega\frac{dU}{dt}\cos\omega t - \omega^2 U\sin\omega t.$$

Подставив приближенные значения du/dt и d^2u/dt^2 в уравнение (15-71), получим

$$2\omega\frac{dU}{dt}\cos\omega t - \omega^2 U\sin\omega t + 2\alpha_0\omega U\cos\omega t + \\ + \omega\gamma U^3\sin^2\omega t\cos\omega t + \omega_0^2 U\sin\omega t = 0. \qquad (15\text{-}73)$$

Член, содержащий произведение $\sin^2 \omega t \cos \omega t$, нетрудно привести к виду

$$\omega\gamma U^3 \sin^2 \omega t \cos \omega t = \frac{1}{4} \omega\gamma U^3 \cos \omega t - \frac{1}{4} \omega\gamma U^3 \cos 3\omega t.$$

Появившееся здесь слагаемое $\frac{1}{4} \omega\gamma U^3 \cos 3\omega t$ при дальнейших рассуждениях можно не учитывать в соответствии с исходным предположением о синусоидальном характере автоколебаний.

Принимая во внимание изложенное, вместо (14-73) имеем

$$\left(2\frac{dU}{dt} + 2\alpha_0 U + \frac{1}{4}\gamma U^3\right)\cos \omega t - (\omega^2 U - \omega_0^2 U)\sin \omega t = 0. \quad (15\text{-}74)$$

Нетрудно видеть, что равенство (15-74) будет удовлетворено, если коэффициенты при функциях $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ порознь равны нулю, т. е. если

$$\frac{dU}{dt} + \left(\alpha_0 + \frac{1}{8}\gamma U^2\right) U = 0 \quad (15\text{-}75)$$

и

$$(\omega^2 - \omega_0^2)\, U = 0. \quad (15\text{-}76)$$

Полученные уравнения определяют амплитуду и частоту колебаний автогенератора. Из равенства (15-76), например, сразу же следует, что частота автоколебаний равна (приближенно) резонансной частоте контура.

Чтобы решить уравнение (15-75), устанавливающее закон изменения амплитуды колебаний, перепишем его в виде

$$\frac{d(U^2)}{dt} + \left(2\alpha_0 + \frac{1}{4}\gamma U^2\right) U^2 = 0.$$

Применяя метод разделения переменных, получим

$$\frac{d(U^2)}{\left(2\alpha_0 + \frac{1}{4}\gamma U^2\right) U^2} = -dt$$

или после разложения левой части равенства на простейшие дроби

$$\frac{d(U^2)}{U^2} - \frac{d\left(2\alpha_0 + \frac{1}{4}\gamma U^2\right)}{2\alpha_0 + \frac{1}{4}\gamma U^2} = -2\alpha_0\, dt.$$

Почленное интегрирование последнего выражения дает

$$\ln(U^2) - \ln\left(2\alpha_0 + \frac{1}{4}\gamma U^2\right) = -2\alpha_0 t + C_0$$

или же

$$\ln\left(\frac{1}{4}\gamma + \frac{2\alpha_0}{U^2}\right) = 2\alpha_0 t - C_0;$$

здесь C_0 — произвольная постоянная интегрирования.

Отсюда вытекает, что

$$\frac{1}{4}\gamma + \frac{2\alpha_0}{U^2} = e^{-C_0} e^{2\alpha_0 t};$$

следовательно,

$$U = \frac{\sqrt{2\alpha_0}}{\sqrt{e^{-C_0} e^{2\alpha_0 t} - \frac{1}{4}\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{Ae^{2\alpha_0 t} - \frac{\gamma}{8\alpha_0}}}, \qquad (15\text{-}77)$$

где

$$A = \frac{e^{-C_0}}{2\alpha_0}.$$

Если α_0 отрицательно (условие самовозбуждения выполняется), то при $t \to \infty$

$$U|_{t\to\infty} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{\gamma}{8\alpha_0}}} = \sqrt{\frac{8|\alpha_0|}{\gamma}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3|a_3|}} \sqrt{S_0 - \frac{rC}{M}} = U_{\text{ст}}. \qquad (15\text{-}78)$$

Это и есть стационарная амплитуда автоколебаний. Она, как видно из (15-78), не зависит от начальных условий и определяется лишь параметрами автогенератора.

Используя (15-78), формулу (15-77) нетрудно привести к виду

$$U(t) = \frac{U_{\text{ст}}}{\sqrt{1 + Be^{-|\alpha_0|t}}}, \qquad (15\text{-}79)$$

где B — неизвестная постоянная.

Обозначим начальную амплитуду напряжения на сетке $U_{t=0} = U(0)$. Тогда согласно (15-79)

$$U(0) = \frac{U_{\text{ст}}}{\sqrt{1+B}}.$$

Отсюда

$$B = \frac{U^2_{\text{ст}}}{U^2(0)} - 1.$$

Таким образом,

$$U(t) = \frac{U_{\text{ст}}}{\sqrt{1 + \left[\frac{U^2_{\text{ст}}}{U^2(0)} - 1\right] e^{-|\alpha_0|t}}}. \qquad (15\text{-}80)$$

Характер изменения функции $U(t)$ при заданной величине эквивалентного коэффициента затухания α_0 зависит только от соотношения между начальной и установившейся амплитудами колебаний. Если, например, $U(0) = U_{\text{ст}}$, то $U(t) = U_{\text{ст}}$; это значит,

что в системе сразу же, без всякого переходного процесса, устанавливается стационарное состояние. График изменения напряжения на сетке для этого случая показан на рис. 15-38, *а*.

Если же начальная амплитуда напряжения $U(0)$ меньше стационарной амплитуды, в генераторе, как следует из (15-79), наблюдается нарастание колебаний (рис. 15-38, *б*).

Наконец, при $U(0) > U_{ст}$ амплитуда колебаний с течением времени уменьшается, стремясь в пределе к значению $U_{ст}$ (рис. 15-38, *в*).

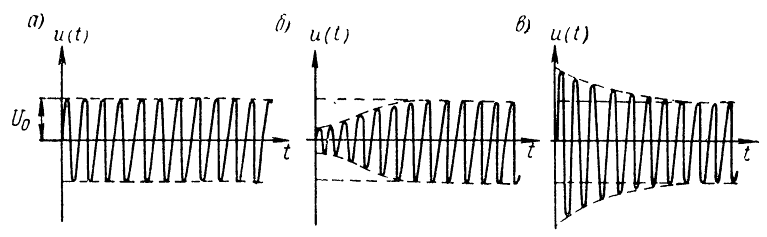


Рис. 15-38. Установление колебаний в автогенераторе при различных начальных условиях.

Полученные соотношения характеризуют установление автоколебаний в мягком режиме самовозбуждения. Действительно, в рассмотренной системе процесс развивается при любых начальных условиях, в том числе и при бесконечно малых начальных амплитудах напряжения на сетке лампы.

Аналогичным образом можно было бы исследовать самовозбуждение автогенератора и в жестком режиме. Однако в этом случае зависимость анодного тока лампы от сеточного напряжения пришлось бы аппроксимировать полиномом более высокой степени.

15-10. Фазовые портреты автогенератора гармонических колебаний

Весьма наглядное представление об установлении автоколебаний дает фазовый портрет генератора. Практически его можно построить путем графического интегрирования уравнения автогенератора на фазовой плоскости, используя, например, метод Льенара (см. § 10-12, *а*).

Обратимся к уравнению (15-71), описывающему режим мягкого самовозбуждения генератора. Для удобства рассуждений введем новую независимую переменную $\tau = \omega_0 t$ — «безразмерное время». Тогда, учитывая, что

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \omega_0 \frac{du}{d\tau} \quad \text{и} \quad \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}\right) = \omega_0^2 \frac{d^2u}{d\tau^2},$$

вместо (15-71) получим

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + \frac{1}{\omega_0}(2\alpha_0 + \gamma u^2)\frac{du}{d\tau} + u = 0.$$

Проинтегрируем последнее уравнение по τ; в результате будем иметь

$$\int \frac{d^2u}{d\tau^2}\,d\tau + \frac{2\alpha_0}{\omega_0}\int \frac{du}{d\tau}\,d\tau + \frac{\gamma}{\omega_0}\int u^2 \frac{du}{d\tau}\,d\tau + \int u\,d\tau =$$
$$= \frac{du}{d\tau} + \frac{2\alpha_0}{\omega_0}\left(1 + \frac{\gamma}{6\alpha_0}u^2\right)u + \int u\,d\tau = 0.$$

При написании этого равенства мы использовали соотношение

$$\int u^2 \frac{du}{d\tau}\,d\tau = \int u^2\,du = u^3 - 2\int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3.$$

Введем вместо функции $u(\tau)$ функцию $i(\tau) = i_L(\tau)$, характеризующую ток в индуктивной ветви контура. Так как $u = u_C = M\frac{di}{dt} = \omega_0 M\frac{di}{d\tau}$, уравнение для $i(\tau)$ принимает вид

$$\frac{d^2 i}{d\tau^2} + \frac{2\alpha_0}{\omega_0}\left[1 + \frac{\gamma}{6\alpha_0}\omega_0^2 M^2\left(\frac{di}{d\tau}\right)^2\right]\frac{di}{d\tau} + i = 0. \qquad (15\text{-}81)$$

Входящий сюда коэффициент α_0 в режиме самовозбуждения, как обычно, меньше нуля.

На этом в принципе можно было бы и закончить промежуточные преобразования, так как форма полученного нелинейного уравнения удовлетворяет условиям применимости метода Льенара. Однако уравнение (15-81) целесообразно привести к виду, обычно принятому в теории автоколебательных систем.

Обозначим

$$-\frac{\alpha_0}{\omega_0} = -\frac{r}{2\rho}\left(\frac{MS_0}{rC} - 1\right) = \varepsilon$$

и

$$\omega_0 M\sqrt{\frac{\gamma}{6\,|\alpha_0|}}\,i = x\,.$$

Тогда окончательно будем иметь

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - 2\varepsilon\left[1 - \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2\right]\frac{dx}{d\tau} + x = 0\,. \qquad (15\text{-}82)$$

Здесь ε — безразмерная величина, которую можно рассматривать как параметр автоколебательной системы, а x — безразмерная функция, пропорциональная току i. Действительно, из выражений (15-70) следует, что $[\alpha_0] = 1/сек$, и $[\gamma] = 1/в^2 \cdot сек$. Поэтому $[x] = ом \times \times \sqrt{\frac{1/в^2\cdot сек}{1/сек}}\,a = 1$.

Перейдем к построению фазовых траекторий автоколебательного процесса. Пусть $\frac{dx}{d\tau} = y$ и $\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{dy}{d\tau}$.

Из уравнения (15-82), получаем

$$\frac{dy}{d\tau} = 2\varepsilon(1 - y^2)\,y - x\,.$$

Следовательно, фазовая траектория в данном случае определяется уравнением

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-F(y) - x}{y},$$

где $F(y) = -2\varepsilon(1 - y^2)\,y$.

В соответствии с методом Льенара сначала на фазовую плоскость (x, y) нужно нанести характеристическую кривую

$$x = -F(y) = 2\varepsilon(1 - y^2)\,y.$$

График этой кривой представляет собой кубическую параболу (рис. 15-39), форма которой зависит от значения ε. (Если $\varepsilon \ll 1$, кривая $x = -F(y)$ приближается к прямой $x = 0$).

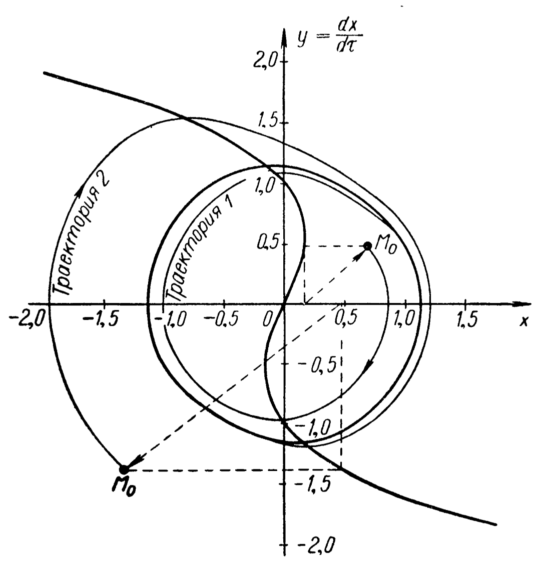


Рис. 15-39. К построению фазовой траектории установления автоколебаний методом Льенара $\varepsilon = 0{,}2$.

Предположим, что начальное состояние автогенератора изображается точкой M_0. Осуществляя графические построения, порядок которых изложен в § 10-12, п. «а», получим линию, напоминающую спираль. Эта линия постепенно приближается к замкнутой (сплошной) кривой (рис. 15-39). Последняя представляет собой п р е д е л ь н ы й ц и к л, характеризующий стационарное состояние автогенератора.

Изображающая точка, разумеется, может двигаться по спирали, приближаясь к предельному циклу при $t \to \infty$ как с внутренней его стороны (траектория *1*), так и с внешней стороны (траектория *2*). Легко видеть, что в первом случае интенсивность колебаний при самовозбуждении генератора нарастает во времени, а во втором — убывает.

Если исходное состояние автоколебательной системы соответствует положению $x = y = 0$, то в начале координат получаем точку равновесия типа «неустойчивый фокус».

Из рис. 15-39 видно, что предельный цикл по форме отличается от эллипса или круга, причем различие будет тем заметнее, чем больше величина ε. Это значит, что автоколебания, создаваемые генератором, строго говоря, не являются гармоническими. (На-

помним, что синусоидальным колебаниям соответствует фазовая траектория в виде эллипса или окружности).

Однако при малых значениях ε предельный цикл получается весьма близким к эллипсу и, следовательно, автоколебания оказываются почти гармоническими (рис. 15-40, *а*).

Из выражения для ε можно заключить, что величина ε уменьшается по мере увеличения добротности $Q = \frac{\rho}{r}$ колебательного контура. Стало быть, чем выше качество контура, тем автоколебания ближе по форме к гармоническим. Этот вывод находится в полном согласии с качественными рассуждениями, которые были изложены в квазилинейной теории.

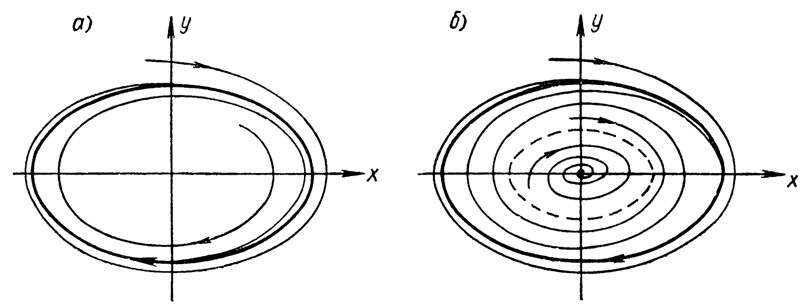


Рис. 15-40. Предельные циклы автогенератора почти гармонических колебаний.

Рассмотренный предельный цикл автогенератора в мягком режиме представляет устойчивое состояние системы. В самом деле, после малых возмущений, приводящих к отклонению изображающей точки от предельного цикла, последняя, как показывают графические построения, вновь асимптотически приближается к предельной линии.

Из анализа нелинейного дифференциального уравнения лампового автогенератора вытекает, что при жестком режиме самовозбуждения система будет иметь два предельных цикла (рис. 15-40, *б*). Первый предельный цикл, изображенный на фазовой плоскости сплошной линией, характеризует устойчивое динамическое состояние автогенератора, а второй (пунктирная линия) — неустойчивое состояние. Очевидно, эти циклы соответствуют тем двум стационарным состояниям, существование которых было установлено в квазилинейной теории автогенератора.

15-11. Обобщенная схема автогенератора гармонических колебаний. Правило фаз и правило амплитуд

В предыдущих параграфах мы провели подробный анализ процессов в автогенераторах с трансформаторной обратной связью. Однако на практике, кроме них, используются и другие типы авто-

колебательных систем. Поэтому было бы полезно получить некоторые общие соотношения, применимые к любому типу автогенератора гармонических колебаний независимо от способа создания обратной связи.

Представим автогенератор гармонических колебаний в виде обобщенной схемы с обратной связью (рис. 15-41) и рассмотрим ее свойства.

Пусть вначале цепь обратной связи разомкнута, а к сетке лампы подводится гармоническое воздействие u_g с частотой ω, т. е. схема работает в режиме усиления электрических колебаний.

Рис. 15-41. Обобщенная схема автогенератора гармонических колебаний.

Напряжение на сетке и аноде лампы в этом случае будут связаны между собой известным соотношением

$$U_a = -U_к = K(j\omega)\,U_g, \qquad (15\text{-}83)$$

где $U_к$ — комплексная амплитуда напряжения на анодной нагрузке;

$K(j\omega)$ — коэффициент усиления разомкнутой системы.

Предположим далее, что в какой-то момент мы отключили источник внешнего напряжения u_g и мгновенно замкнули цепь обратной связи. В результате таких манипуляций на управляющей сетке лампы вместо напряжения u_g появится напряжение обратной связи $u = u'_g$. Если обратную связь подобрать так, чтобы эти напряжения были равны между собой, напряжения и токи в цепях лампы не изменятся (предполагается, что включение обратной связи не меняет анодной нагрузки). Но теперь в схеме происходит уже не усиление, а генерирование электрических колебаний с постоянными амплитудой и частотой.

Отсюда следует, что условие стационарности автоколебательного процесса в генераторе можно представить в виде

$$U'_g = U_g. \qquad (15\text{-}84)$$

Так как согласно (15-83) $U_g = \frac{1}{K(j\omega)} U_a$, а $U'_g = \beta(j\omega)\,U_a$, где $\beta(j\omega)$ — коэффициент обратной связи, то вместо (15-84) будем иметь

$$\beta(j\omega)\,U_a = \frac{1}{K(j\omega)} U_a,$$

или

$$K(j\omega)\,\beta(j\omega) = 1. \qquad (15\text{-}85)$$

Развернем последнее выражение.

Согласно квазилинейной теории комплексная амплитуда напряжения на анодной нагрузке

$$\boldsymbol{U}_\text{к} = \boldsymbol{I}_{a1} Z_a(j\omega) \approx \boldsymbol{S}_\text{ср} \boldsymbol{U}_g Z_a(j\omega).$$

Здесь $\boldsymbol{S}_\text{ср} = S_\text{ср}\, e^{j\varphi_S}$ — средняя крутизна характеристики, которая в общем случае может быть величиной комплексной;

$Z_a(j\omega) = z_a(\omega) e^{j\varphi_a}$ — входное сопротивление четырехполюсника.

Реакцией анодной цепи мы, как и в предыдущих рассуждениях, пренебрегаем. Следовательно,

$$\boldsymbol{U}_a = -\boldsymbol{U}_\text{к} = -\boldsymbol{S}_\text{ср} \boldsymbol{U}_g Z_a$$

и

$$K(j\omega) = K(\omega)\, e^{-j\varphi_K} \approx -\boldsymbol{S}_\text{ср} Z_a(j\omega) = S_\text{ср} z_a e^{j(\pi+\varphi_S+\varphi_a)},$$

где $K(\omega) \approx S_\text{ср} z_a(\omega)$ и $\varphi_K = -(\pi + \varphi_S + \varphi_a)$.

Коэффициент обратной связи в автогенераторе также может иметь комплексное значение

$$\beta(j\omega) = \beta(\omega)\, e^{-j\varphi_\beta}.$$

Подставляя выражение для $K(j\omega)$ и $\beta(j\omega)$ в (15-85), получим

$$K(j\omega)\beta(j\omega) = = S_\text{ср} z_a \beta e^{j(\pi+\varphi_S+\varphi_a-\varphi_\beta)} = 1. \quad (15\text{-}86)$$

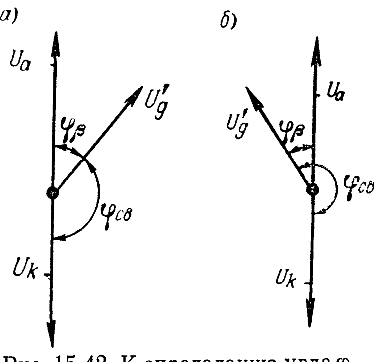


Рис. 15-42. К определению угла $\varphi_\text{св}$.

Введем в рассмотрение величину $\varphi_\text{св} = \pi - \varphi_\beta$. Физически эта величина определяет фазовый сдвиг между напряжением обратной связи U'_g и напряжением на нагрузке анодной цепи U, причем $\varphi_\text{св} < \pi$, если вектор U'_g опережает по фазе $U_\text{к}$ (при $\varphi_\beta > 0$) и, наоборот, $\varphi_\text{св} > \pi$, если U'_g отстает по фазе от $U_\text{к}$ (рис. 15-42, *а* и *б* соответственно). Тогда вместо (15-86) будем иметь

$$K(j\omega)\beta(j\omega) = S_\text{ср} z_a \beta e^{j(\varphi_\text{св}+\varphi_S+\varphi_a)} = 1. \quad (15\text{-}87)$$

Нетрудно видеть, что условие (15-87) будет выполняться, если, во-первых,

$$K(\omega)\beta(\omega) = S_\text{ср}(U_g) z_a(\omega)\beta(\omega) = 1 \quad (15\text{-}88)$$

и, во-вторых,

$$\sum \varphi_i = \varphi_\text{св}(\omega) + \varphi_S(\omega) + \varphi_a(\omega) = 2n\pi, \quad (15\text{-}89)$$

где φ_i — различные фазовые сдвиги, а $n = 0, 1, 2, \ldots$

Таким образом, условие стационарности колебаний в автогенераторе аналитически представляется в виде двух равенств. Рассмотрим их физический смысл.

Условие (15-89), как легко заметить, устанавливает связь между фазовыми соотношениями в элементах автогенератора и поэтому называется условием баланса фаз, или правилом фаз. Оно утверждает, что *в установившемся режиме сумма всех фазовых сдвигов при обходе системы по замкнутому пути должна быть равна целому числу* 2π. Частота, при которой это требование выполняется, и является частотой возможных автоколебаний $\omega_г$.

Поясним изложенное на примере схемы с трансформаторной обратной связью (см. рис. 15-29).

Пусть в контуре автогенератора возникли колебания, частота которых ω больше резонансной частоты ω_0. При таком условии сопротивление нагрузки в анодной цепи лампы (т. е. входное сопротивление контура) будет иметь емкостный характер, следовательно, $\varphi_a < 0$ (точнее $-\frac{\pi}{2} < \varphi_a < 0$).

Далее, в диапазоне обычных радиочастот, где используются подобные автогенераторы, электронная лампа ведет себя как безынерционный элемент, т. е. сеточное напряжение и анодный ток ее изменяются в фазе. Поэтому среднюю крутизну $S_{ср}$ на таких частотах можно считать величиной вещественной ($\varphi_S = 0$).

Так как коэффициент обратной связи в рассматриваемой схеме есть тоже величина вещественная (φ_β равно 0 или π), то $\varphi_{св}$ равно или π, или 0, и равенство (15-89) с учетом изложенного на частоте $\omega > \omega_0$ выполняться не будет. То же самое можно сказать и о колебаниях с частотой $\omega < \omega_0$.

Очевидно, правило фаз будет выполнено только в том случае, когда $\omega = \omega_0$ и, кроме того, $\varphi_{св} = 0$, т. е. $\varphi_\beta = \pi$.

Равенство (15-88) устанавливает зависимость между средней крутизной лампы в стационарном режиме и величинами z_a и β на частоте автоколебаний $\omega_г$. Следовательно, (15-88) определяет амплитуду колебаний в стационарном состоянии. По этой причине оно называется условием баланса амплитуд.

Легко убедиться, что (15-88), если его применить к автогенератору с трансформаторной связью $[z_a(\omega_г) = R_э;\ \beta = \frac{M}{L}]$, совпадает с выражением (15-66).

Рассмотрим теперь режим самовозбуждения автогенератора.

Для установления автоколебаний необходимо, чтобы в замкнутой системе выполнялись условия самовозбуждения, которые в данном случае удобно записать в виде соотношений (15-52).

Нетрудно заметить, что условие $\varphi_\Sigma(\omega) = 2n\pi$ эквивалентно только что рассмотренному условию баланса фаз.

Что же касается неравенства

$$K_\Sigma(\omega) = K(\omega)\,\beta(\omega) > 1,$$

то его в нашем случае можно переписать так:

$$S_{\text{ср}}(0)\,z_a(\omega_\text{г})\,\beta(\omega_\text{г}) > 1\,. \qquad (15\text{-}90)$$

Если от (15-90) совершить обратный переход к соотношениям между напряжениями u_g и u'_g, получится, что $U'_g > U_g$. А это значит, что амплитуда напряжения обратной связи при условии (15-90) превышает амплитуду напряжения U_g, характеризующую исходное состояние разомкнутой системы. В результате колебания в автогенераторе будут нарастать.

Условия (15-88) и (15-90) можно объединить в одно выражение:

$$S_{\text{ср}}\,z_a\,\beta \geqslant 1,$$

или

$$K_\Sigma(\omega_\text{г}) = K(\omega_\text{г})\,\beta(\omega_\text{г}) \geqslant 1\,. \qquad (15\text{-}91)$$

Последнее носит название п р а в и л а а м п л и т у д.

При пользовании этим правилом необходимо помнить, что знаку «больше» ($>$) соответствует крутизна S_0 в начальной рабочей точке, а знаку равенства — средняя крутизна стационарного состояния.

15-12. Устойчивость автоколебательного процесса

В § 15-10 при анализе предельных циклов автогенератора мы частично уже касались вопросов устойчивости автоколебательного процесса. Теперь эти вопросы целесообразно рассмотреть в общем виде.

Прежде всего необходимо иметь в виду, что автоколебательный процесс будет устойчивым (по отношению к малым возмущениям), если устойчивы амплитуда и частота колебаний. В соответствии с этим условия устойчивости амплитуды автоколебаний и частоты будем искать по отдельности.

Как было установлено в § 15-8, стационарная амплитуда в автогенераторе с трансформаторной обратной связью оказывается устойчивой, если

$$\frac{dS_{\text{ср}}}{dU_g} < 0\,. \qquad (15\text{-}92)$$

Покажем, что условие (15-92) имеет универсальный характер.

Пусть частота автоколебаний постоянна, а амплитуда напряжения на сетке лампы под влиянием каких-то причин увеличилась и стала равна $U_g = U_{\text{ст}} + \Delta U_g$, где $\Delta U_g \ll U_{\text{ст}}$, а величина $U_{\text{ст}}$ соответствует стационарному состоянию. В результате такого изменения баланс амплитуд в автогенераторе нарушается:

$$K_\Sigma(U_g) = K(U_g)\,\beta \neq 1\,.$$

Для возвращения системы в исходное положение необходимо, чтобы величина $K_\Sigma(U_{ст}+\Delta U_g)$ стала меньше единицы. В противном случае, при $K_\Sigma > 1$, амплитуда колебаний продолжала бы нарастать.

Разлагая функцию $K_\Sigma(U_g)$ в степенной ряд и ограничиваясь двумя членами разложения, получим

$$K_\Sigma(U_{ст}+\Delta U_g) \approx K_\Sigma(U_{ст}) + \left.\frac{\partial K_\Sigma}{\partial U_g}\right|_{U_{ст}} \Delta U_g.$$

Учитывая, что

$$K_\Sigma(U_{ст}) = K(U_{ст})\,\beta = 1,$$

будем иметь

$$K_\Sigma(U_{ст}+\Delta U_g) \approx 1 + \left.\frac{\partial K_\Sigma}{\partial U_g}\right|_{U_{ст}} \Delta U_g.$$

Следовательно, поставленное выше условие будет выполнено, если

$$\left.\frac{\partial K_\Sigma}{\partial U_g}\right|_{U_{ст}} < 0. \qquad (15\text{-}93)$$

Так как $\frac{\partial K_\Sigma}{\partial U_g} = \frac{\partial S_{ср}}{\partial U_g} z_a \beta$, неравенство (15-93) переходит в выражение (15-92).

Аналогичный результат получается и в том случае, когда стационарная амплитуда уменьшается, т. е. $U_g = U_{ст} - \Delta U_g$.

Перейдем теперь к определению условия устойчивости частоты, предполагая, что амплитудные соотношения в автоколебательной системе удовлетворяют правилу амплитуд, т. е. $\beta(\omega) K(\omega) \geqslant 1$. Это условие, несомненно, должно быть связано с правилом фаз, ибо всякое изменение частоты неизбежно влечет за собой изменение исходных фазовых соотношений в автогенераторе.

Выясним вначале, как изменяется частота автоколебаний при нарушении баланса фаз. В соответствии с этим будем считать, что вместо (15-89) имеем

$$\theta = \Sigma \varphi_i = 2n\pi + \Delta\varphi. \qquad (15\text{-}94)$$

Здесь полагаем, что $\Delta\varphi > 0$, причем $\Delta\varphi \ll \frac{\pi}{2}$.

При этом условии напряжение обратной связи u'_g должно опережать по фазе возбуждающее напряжение u_g. Действительно, из выражений, приведенных § 15-11, вытекает, что

$$\boldsymbol{U}'_g = \beta(j\omega)\boldsymbol{U}_a = \beta(j\omega)\boldsymbol{K}(j\omega)\boldsymbol{U}_g = \boldsymbol{U}_g\beta(\omega)\boldsymbol{K}(\omega)e^{j\Sigma\varphi_i} = \boldsymbol{U}_g e^{j\Sigma\varphi_i}.$$

Подставляя сюда значение $\Sigma\varphi_i$ из (15-94), получим

$$\boldsymbol{U}'_g = \boldsymbol{U}_g e^{j(2n\pi+\Delta\varphi)} = \boldsymbol{U}_g e^{j\Delta\varphi}.$$

В режиме автоколебаний напряжение обратной связи, как следует из наших рассуждений, за каждый цикл будет изменяться по фазе в сторону опережения, т. е.

$$u'_g = U\cos[\omega_г t + \varphi(t)],$$

где $\varphi(t)$ — нарастающая функция.

Мгновенная частота колебаний в этом случае оказывается равной

$$\omega(t) = \omega_г + \frac{d\varphi}{dt}.$$

Так как $d\varphi/dt$ положительна, то $\omega(t) > \omega_г$. Следовательно, нарушение баланса фаз в сторону опережения ($\theta = 2n\pi + \Delta\varphi$) приводит к увеличению частоты автоколебаний.

Аналогично можно показать, что если $\theta = \Sigma\varphi_i = 2n\pi - \Delta\varphi$, частота автоколебаний уменьшается.

Предположим, что стационарная частота автоколебаний случайно увеличилась и стала равна $\omega_г + \Delta\omega$, причем $\Delta\omega \ll \omega_г$. Для возвращения автогенератора в исходное состояние нужно, чтобы увеличение частоты привело к установлению таких фазовых соотношений в генераторе, при которых величина суммарного сдвига фаз была бы меньше $2n\pi$. Тогда, как мы только что отметили, частота автоколебаний будет уменьшаться и в конце концов примет первоначальное значение.

Напишем приближенное выражение для суммарного фазового сдвига $\theta = \Sigma\varphi_i$ на частоте колебаний $\omega_г + \Delta\omega$. Последнее может быть получено, если функцию $\theta(\omega_г + \Delta\omega)$ в окрестностях точки $\omega = \omega_г$ разложить в степенной ряд и ограничиться двумя первыми членами:

$$\theta(\omega_г + \Delta\omega) \approx \theta(\omega_г) + \left.\frac{\partial\theta}{\partial\omega}\right|_{\omega_г} \Delta\omega.$$

Так как по условию $\theta(\omega_г) = 2n\pi$, то

$$\theta(\omega_г + \Delta\omega) \approx 2n\pi + \left.\frac{\partial\theta}{\partial\omega}\right|_{\omega_г} \Delta\omega.$$

В соответствии с изложенным для возвращения системы в исходное состояние необходимо, чтобы $\theta(\omega_г + \Delta\omega) \approx 2n\pi - \Delta\varphi$, а это будет иметь место, если

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial\omega}\right|_{\omega_г} < 0. \qquad (15\text{-}95)$$

Можно показать, что выполнение условия (15-95) обеспечивает возвращение системы в исходное состояние и в том случае, когда частота автоколебаний случайно уменьшается.

Таким образом, неравенство (15-95) есть условие устойчивости частоты автоколебаний. Перепишем его в развернутом виде. Используя выражение (15-89), получим

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial\omega}\right|_{\omega_г} = \frac{\partial\,\Sigma\varphi_i}{\partial\omega} = \frac{\partial\varphi_S}{\partial\omega} + \frac{\partial\varphi_a}{\partial\omega} + \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\omega} < 0.$$

В большинстве схем автогенераторов гармонических колебаний коэффициент обратной связи практически не зависит от частоты (см. следующий параграф). Поэтому

$$\frac{\partial\varphi_\beta(\omega)}{\partial\omega} \approx 0.$$

Как мы уже говорили, в рассматриваемом диапазоне частот средняя крутизна есть величина вещественная, так что $\varphi_S \equiv 0$, и

$$\frac{\partial \varphi_S}{\partial \omega} = 0.$$

Учитывая эти приближения, вместо (15-95) будем иметь

$$\left.\frac{\partial \varphi_a(\omega)}{\partial \omega}\right|_{\omega_г} < 0. \qquad (15\text{-}96)$$

В главе четвертой были изучены фазовые характеристики последовательного (рис. 4-8, *б*) и параллельного (рис. 4-22) колебательных контуров. Из их рассмотрения следует, что характеристика параллельного контура удовлетворяет условию устойчивости частоты автоколебаний (15-96), а характеристика последовательного контура — нет.

Найдем производную $d\varphi_a/d\omega$ для анодной нагрузки в виде параллельного контура. Принимая во внимание, что в окрестностях резонансной частоты

$$\omega_0 = \omega_г,$$

$$\varphi_a \approx -2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -2Q\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0},$$

получим

$$\left.\frac{\partial \varphi_a}{\partial \omega}\right|_{\omega_г} = -2Q\frac{1}{\omega_0}.$$

Величина

$$\sigma = \left|\omega_0 \frac{\partial \varphi_a}{\partial \omega}\right|_{\omega_г} = 2Q$$

носит название **фиксирующей способности контура**.

Чем больше значение σ, тем круче в окрестностях точки $\omega_г = \omega_0$ идет фазовая характеристика анодной нагрузки и тем, очевидно, выше устойчивость частоты автоколебаний. Именно по этой причине для увеличения постоянства частоты в автогенераторах приходится применять колебательные системы с весьма высокой добротностью.

15-13. Схемы *L*, *C*-автогенераторов гармонических колебаний

Известно много разных вариантов осуществления *L*, *C*-генераторов гармонических колебаний. Общим для них является наличие колебательного контура (или системы контуров) с высокой добротностью. *L*, *C*-генераторы с самовозбуждением можно разбить на две основные группы: а) генераторы с обратной связью; б) генераторы на приборах с внутренним отрицательным сопротивлением. Рассмотрим основные особенности и важнейшие соотношения для тех и других схем.

а) Схемы L, C-автогенераторов гармонических колебаний с обратной связью

В схемах с обратной связью необходимое для самовозбуждения колебаний отрицательное сопротивление достигается благодаря включению нелинейного элемента (электронной лампы, транзистора) в систему с положительной обратной связью. При этом для получения стационарного режима необходимо, чтобы параметры схемы удовлетворяли определенным, установленным выше, условиям.

В предыдущих параграфах была рассмотрена схема автогенератора с трансформаторной обратной связью.

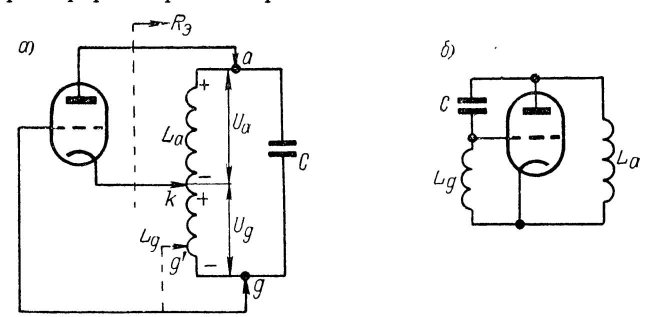


Рис. 15-43. Два варианта изображения индуктивной трехточечной схемы.

Количественно степень обратной связи в этой схеме определяется соотношением взаимоиндуктивности M и индуктивности контура L. Согласно (15-54) модуль коэффициента обратной связи

$$\left|\beta(j\omega)\right| = \beta = \frac{M}{L}. \tag{15-97}$$

Из рассмотрения обобщенной схемы автогенератора (см. рис. 15-41), следует, что трансформаторная обратная связь отнюдь не является единственно возможной. Можно применить и многие другие варианты четырехполюсника, включенного в цепи нелинейного элемента. Необходимо только, чтобы этот четырехполюсник являлся колебательной системой с высокой добротностью и чтобы его передаточная функция (коэффициент обратной связи) удовлетворял правилу амплитуд и правилу фаз.

Широкое применение находят так называемые потенциометрические схемы. В этих схемах нагрузка анодной цепи представляет собой потенциометр, к которому подводится напряжение U_a, а снимается напряжение обратной связи U_g, вводимое в цепь сетки. Так как потенциометр подключается к цепи тремя точками — анод a, сетка g и катод k, — такие схемы называют трехточечными.

Основными разновидностями потенциометрических схем являются: индуктивная, или автотрансформаторная (рис. 15-43), и емкостная (рис. 15-44) трехточечные схемы.

На этих схемах для простоты не показаны источники питания, а также активные сопротивления контуров.

В первой из схем роль потенциометра играет индуктивность контура $L = L_a + L_g$, с части L_g которой снимается напряжение обратной связи (рис. 15-43, *а*). Для выполнения правила фаз, т. е. для того, чтобы напряжения на сетке и на аноде были противоположны по фазе, включение должно быть произведено так, как показано на рис. 15-43, *а*. Если бы мы поменяли местами зажимы g и k, напряжения U_g и U_a оказались бы в фазе.

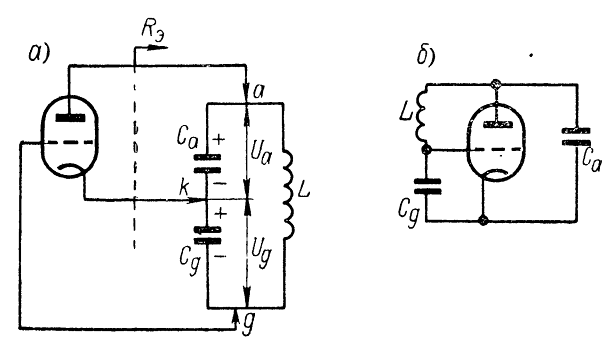


Рис. 15-44. Два варианта изображения емкостной трехточечной схемы.

Пренебрегая активным сопротивлением индуктивной ветви контура, получим, что коэффициент обратной связи

$$\beta = \frac{L_g}{L_a}; \tag{15-98}$$

так же, как и в трансформаторной схеме, коэффициент обратной связи не зависит от частоты.

Индуктивную схему можно изобразить и несколько иначе — как показано на рис. 15-43, *б*.

В емкостной схеме (рис. 15-44, *а*) потенциометром является емкостная ветвь контура. С емкости C_g снимается напряжение обратной связи.

Если пренебрегать потерями в емкостных элементах схемы, коэффициент обратной связи

$$\beta = \frac{C_a}{C_g}. \tag{15-99}$$

На рис. 15-44, *б* дано иное начертание емкостной схемы, принципиально не отличающееся от исходной схемы рис. 15-44, *а*.

Регулировку коэффициента обратной связи в трехточечных схемах можно производить, изменяя величину реактивного сопротивления включенного между сеткой и катодом. В индуктивной схеме удобно с этой целью перемещать щуп g вдоль катушки, подключая

его к тому или иному витку, как это показано пунктиром на рис. 15-43, *а* (положение g').

Нагрузкой анодной цепи является колебательный контур, который в индуктивной схеме включен как контур второго вида, а в емкостной — как контур третьего вида.

Поэтому

$$R_э = p^2 Q \rho;$$

в индуктивной схеме коэффициент включения

$$p = \frac{L_a}{L},$$

а в емкостной схеме

$$p = \frac{C}{C_a}.$$

Из рассмотрения индуктивного варианта потенциометрической схемы (рис. 15-43, *а*) следует, что изменение положения щупа k приводит к одновременному изменению как величины сопротивления нагрузки $R_э$, так и коэффициента обратной связи. Увеличение β влечет за собой уменьшение $R_э$.

Если контакт g стоит в своем нижнем положении, между коэффициентом включения p и коэффициентом обратной связи β существует простая зависимость. Действительно, в этом случае

$$p = \frac{L_a}{L_a + L_g} = \frac{1}{1 + \frac{L_g}{L_a}} \quad \text{или}$$

$$p = \frac{1}{1+\beta}$$

и сопротивление нагрузки

$$R_э = \frac{1}{(1+\beta)^2} Q \rho. \qquad (15\text{-}100)$$

Нетрудно убедиться в том, что это выражение справедливо и для емкостной схемы.

Схемы рис. 15-43, *б* и 15-44, *б* являются частными случаями обобщенной потенциометрической схемы (рис. 15-45), в которой между каждыми двумя электродами лампы включены реактивные сопротивления x_{ag}, x_{gk} и x_{ak}.

Эти сопротивления могут представлять собой то или иное сочетание индуктивностей и емкостей. Цепь, составленная из их последовательного соединения, при частоте генерации должна являться настроенным колебательным контуром, т. е.

$$x_{ag} + x_{gk} + x_{ak} = 0. \qquad (15\text{-}101)$$

Правило фаз в схеме рис. 15-45 может быть выполнено в двух случаях.

1. Если сопротивление, включенное между сеткой и анодом, имеет емкостный характер, остальные два сопротивления должны быть индуктивными; тогда система приводится к трехточечной индуктивной схеме (рис. 15-43). Таким образом,

$$\text{если } x_{ag} < 0, \text{ то } x_{gk} > 0; \ x_{ak} > 0. \qquad (15\text{-}102)$$

2. Если сопротивление, включенное между сеткой и анодом, имеет индуктивный характер, остальные два сопротивления должны быть емкостными; генератор в этом случае эквивалентен трехточечной емкостной схеме (рис. 15-44). Итак, если

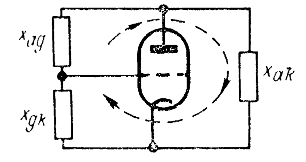


Рис. 15-45. Обобщенная потенциометрическая схема.

$$x_{ag}>0, \text{ то } x_{gk}<0;\ x_{ak}<0. \quad (15\text{-}103)$$

Выполнение условия (15-102) или (15-103) является необходимым, но недостаточным для самовозбуждения. Должно соблюдаться также и правило амплитуд, которое для этой схемы, очевидно, имеет вид

$$\frac{x_{gk}}{x_{ak}}>\beta_{\text{кр}}. \quad (15\text{-}104)$$

При низких частотах можно совсем не принимать во внимание междуэлектродные емкости и индуктивности выводов лампы. Однако уже при умеренно высоких частотах реактивные сопротивления внутриламповых емкостей становятся одного порядка с сопротивлениями элементов контура и часто могут их заменять.

Рассмотрим схему рис. 15-46, где реактивностью, включенной между сеткой и анодом, является междуэлектродная емкость C_{ag}. Согласно (15-102) в этой схеме возможно самовозбуждение, если сопротивления x_{gk} и x_{ak} имеют индуктивный характер. Это будет иметь место, если резонансные частоты колебательных контуров ω_{0gk} и ω_{0ak} будут выше частоты генерируемых колебаний $\omega_{\text{г}}$. Следовательно, в данной схеме самовозбуждение возможно на частоте, удовлетворяющей неравенствам:

$$\left.\begin{aligned}\omega_{\text{г}}&<\omega_{0gk},\\ \omega_{\text{г}}&<\omega_{0ak}.\end{aligned}\right\} \quad (15\text{-}105)$$

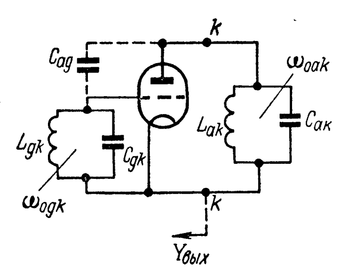


Рис. 15-46. Автогенератор с обратной связью через емкость C_{ag}.

К тем же выводам придем, если будем рассматривать систему (рис. 15-46) как четырехполюсник, в котором внешняя обратная связь отсутствует ($\beta = 0$), а обратное воздействие выхода цепи на ее вход осуществляется благодаря тому, что четырехполюсник не однонаправленный, т. е. за счет наличия обратной проводимости, равной согласно (14-60)

$$Y_{12} = -j\,\omega\, C_{ag}.$$

В § 15-3, п. «а» было показано, что и при $\beta = 0$ выходное сопротивление четырехполюсника (между точками k-k) может быть отрицательным, если только коэффициент обратной передачи четырехполюсника

$$K'(j\,\omega) = -\frac{Y_{12}}{Y_{11}} = \frac{j\,\omega\, C_{ag}}{Y_{11}} \quad (15\text{-}106)$$

отрицателен, а по абсолютной величине превышает величину

$$\frac{g_{22}}{g_{21}} = D.$$

Ясно, что такое положение окажется возможным, если контур, включенный между сеткой и катодом, будет представлять сопротивление индуктивного характера. Тогда $Y_{11} = -j\frac{1}{\omega L_э}$.

Согласно (15-23) выходное сопротивление (влево от точек k-k)

$$Y_{вых} = Y_{22} + K'(j\omega) Y_{21}.$$

Здесь в соответствии с (14-62)

$$Y_{22} = g_{22} + j\omega(C_{ag} + C_{ak}).$$

Полагая $Y_{21} = g_{21} = S$, найдем, что

$$Y_{вых} = g_{22} + j\omega(C_{ag} + C_{ak}) + SK'(j\omega). \tag{15-107}$$

При соответствующем выборе Y_{11} активная составляющая выходного сопротивления, как показано выше, отрицательна. Для компенсации реактивной составляющей $j\omega(C_{ag} + C_{ak})$ контур, включенный между анодом и катодом, так же, как и сеточный контур, должен представлять индуктивное сопротивление.

Итак, рассматриваемая система может трактоваться как автогенератор, в котором необходимая положительная обратная связь осуществляется через обратную проводимость Y_{12}.

Если схема предназначается для усиления (а не генерирования) колебаний, то возникновение в ней автоколебаний, т. е. нарушение ее статической устойчивости, является вредным; такую генерацию называют п а р а з и т н о й. Для борьбы с ней принимаются различные меры. Важнейшая из них — всемерное уменьшение емкости C_{ag} и экранирование анодной цепи от сеточной. Это достигается, как известно, применением ламп с экранированным анодом (тетрод, пентод). В некоторых случаях используются специальные схемы н е й т р а л и з а ц и и нежелательного действия емкости C_{ag}.

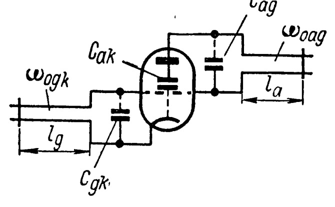


Рис. 15-47. Автогенератор с колебательными системами, включенными между сеткой и катодом и между анодом и сеткой.

В технике метровых и дециметровых волн широко применяются автогенераторы гармонических колебаний, принципиальная схема которых показана на рис. 15-47.

Здесь для создания сопротивления x_{ak} используется междуэлектродная емкость C_{ak}, так что

$$x_{ak} = -\frac{1}{\omega C_{ak}}.$$

Сопротивлением x_{ag} является входное сопротивление колебательного контура, составленного из емкости C_{ag} и входного сопротивления отрезка короткозамкнутой линии, длина l_a которого, очевидно, должна быть выбрана так, чтобы на входе он был эквивалентен индуктивности.

Роль сопротивления x_{gk} играет аналогичная колебательная система, состоящая из емкости C_{gk} и отрезка короткозамкнутой линии l_g.

Так как $x_{ak} < 0$, то согласно (15-103) необходимо, чтобы $x_{ag} > 0$ и $x_{gk} < 0$.

Это означает, что резонансная частота контура, включенного между анодом и сеткой, ω_{0ag} должна быть выше частоты генерируемых колебаний $\omega_г$, а резонансная частота ω_{0gk} должна быть ниже частоты $\omega_г$. Иначе говоря, в этой схеме возможно самовозбуждение на частотах, удовлетворяющих условию

$$\omega_{0gk} < \omega_г < \omega_{0ag}. \tag{15-108}$$

Настройку схемы удобно производить, изменяя длину отрезков линий l_a и l_g, т. е. перемещая короткозамыкающие мостики вдоль линий.

Источники питания генератора могут быть включены по одной из двух схем, которые мы рассмотрим на примере генератора с трансформаторной обратной связью.

В так называемой схеме последовательного питания (см. рис. 15-29) источник постоянного анодного напряжения E_a, нагрузка (колебательный контур) и лампа включены между собой последовательно. Поэтому в соединительных проводах проходят как постоянная I_{a0}, так и переменные $I_{a\sim}$ слагающие анодного тока. Источник E_a заблокирован достаточно большой емкостью, представляющей ничтожно малое сопротивление для переменного тока. Благодаря этому переменные токи замыкаются помимо источника E_a. В противном случае имели бы место нежелательные потери энергии переменного тока во внутреннем сопротивлении источника. Для постоянной слагающей анодного тока катушка контура представляет пренебрежимо малое сопротивление.

По такому же принципу на рис. 15-29 построена схема питания сеточной цепи. Источник постоянного смещения E_g, катушка обратной связи и промежуток сетка — катод лампы соединены последовательно.

В схеме параллельного питания (рис. 15-48) постоянные и переменные токи во внешних относительно лампы участках разделены, т. е. замыкаются по различным цепям. Постоянная слагающая анодного тока I_{a0} проходит по пути: источник E_a, разделительный дроссель $L_р$, имеющий ничтожно малое сопротивление для постоянного тока, промежуток анод — катод лампы. В колебательный контур постоянный ток не ответвляется, этому препятствует разделительный конденсатор $C_р$. Для переменных слагающих анодного тока дроссель $L_р$ представляет чрезвычайно большое сопротивление ($\omega L_р \gg R_э$). Поэтому переменные токи практически не ответвляются в цепь источника постоянного напряжения, а замыкаются через емкость $C_р$, сопротивление которой ничтожно мало $\left(\frac{1}{\omega C_р} \ll R_э\right)$, колебательный контур и промежуток анод — катод лампы.

По параллельной схеме выполнена также цепь сетки (рис. 15-48). Постоянный ток I_{g0} проходит через источник E_g, дроссель L_{pg} и промежуток сетка — катод лампы. Для переменных токов сетки $I_{g\sim}$ создана другая цепь: промежуток сетка — катод, разделительная емкость C_{pg} и катушка обратной связи.

Возможны, наконец, схемы, в которых анодная цепь выполнена по принципу параллельного, а сеточная — последовательного питания или наоборот.

В § 15-8 было показано, что при достаточно большом по абсолютной величине напряжении смещения, получаемом от специального источника, самовозбуждение автогенератора может оказаться жестким, что в большинстве случаев нежелательно. Во избежание

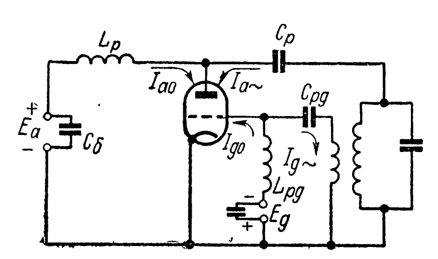


Рис. 15-48. Схема параллельного питания цепей автогенератора.

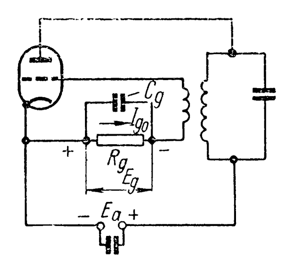


Рис. 15-49. Схема автогенератора с автоматическим смещением за счет сеточного тока.

этого в автогенераторах предпочитают пользоваться так называемым **автоматическим смещением** за счет сеточного тока, осуществляемым по схеме, приведенной на рис. 15-49. Взамен постороннего источника постоянного напряжения в цепь сетки включено сопротивление R_g, называемое обычно сопротивлением утечки сетки. Постоянная составляющая сеточного тока I_{g0} проходит через сопротивление в направлении, указанном на рисунке стрелкой, создавая на нем падение напряжения

$$E_g = I_{g0}R_g. \qquad (15\text{-}109)$$

Как видно из схемы, это напряжение выполняет роль отрицательного смещения.

Рассмотрим процесс возбуждения колебаний в схеме, содержащей сопротивление утечки сетки. Исходная рабочая точка (рис. 15-50) соответствует напряжению на сетке, равному нулю, так как источник смещения отсутствует. При этом крутизна S_0 относительно велика, значит, критический коэффициент обратной связи $\beta_{кр} = \frac{MS_0}{C}$ мал, самовозбуждение происходит мягко и при сравнительно небольшом коэффициенте обратной связи $\beta > \beta_{кр}$.

По мере нарастания колебаний в цепи сетки появляются импульсы тока, как это показано на рис. 15-50; постоянная слагающая

этих импульсов I_{g0} создает отрицательное смещение на сетке, в результате чего исходная рабочая точка скользит вниз по характеристике лампы. По окончании переходного процесса устанавливается динамическое равновесие, при котором амплитуда колебаний и постоянный сеточный ток имеют стационарную (неизменную во времени) величину. Блокировочный конденсатор C_g выбирается достаточно большой емкости так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{\omega C_g} \ll R_g. \qquad (15\text{-}110)$$

Благодаря этому переменные слагающие сеточного тока не создают сколько-нибудь заметного падения напряжения на сопротивлении R_g и на последнем действует практически постоянное напряжение E_g.

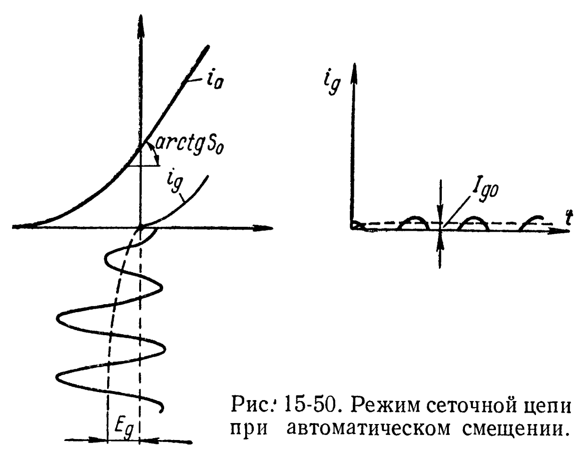


Рис. 15-50. Режим сеточной цепи при автоматическом смещении.

Итак, в схеме с сопротивлением утечки удается осуществить мягкое самовозбуждение колебаний и вместе с тем работать в стационарном режиме с отрицательным смещением. Это приводит к уменьшению угла отсечки анодного тока, т. е. способствует более высокому к. п. д. по анодной цепи и меньшим потерям в цепи сетки. Кроме того, достоинством работы с автоматическим смещением является отсутствие дополнительного источника постоянного напряжения.

На рис. 15-51, *а* показано построение колебательной характеристики $I_к = f(U_g)$ для схемы с автоматическим смещением. Здесь нанесено семейство кривых $I_к(U_g)$, соответствующих разным постоянным значениям E_g. При $E_g = 0$ колебательная характеристика имеет вид рис. 15-32. С увеличением абсолютной величины отрицательного смещения она деформируется, как это было показано на рис. 15-33.

Когда амплитуда колебаний очень мала, то для схемы автоматического смещения колебательная характеристика совпадает с ха-

рактеристикой, соответствующей $E_g = 0$. Однако при возрастании U_g и связанном с этим увеличении E_g точки результирующей характеристики смещаются, скользя с одной кривой семейства на другую. В результате колебательная характеристика имеет вид кривой, показанной жирной линией на рис. 15-51, *а*. На основании этой зависимости построен график $S_{ср}$ (U_g) — рис. 15-51, *б*.

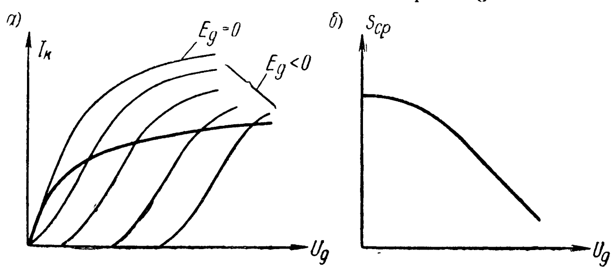


Рис. 15-51. Колебательная характеристика при автоматическом смещении.

Средняя крутизна монотонно уменьшается с увеличением U_g, что еще раз подтверждает мягкий характер самовозбуждения.

Наряду с электронными лампами в схемах автогенераторов в качестве управляемых нелинейных элементов применяются и т р а н з и с т о р ы. Основной характер закономерностей здесь тот же, что и в ламповых генераторах. Необходимо лишь учитывать те раз-

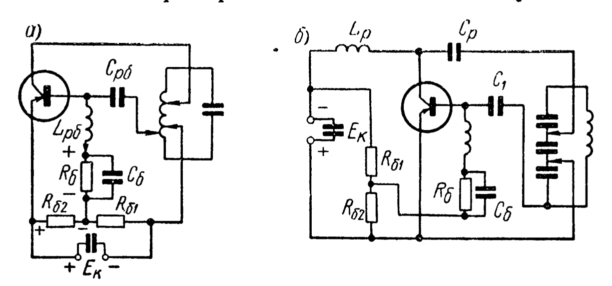


Рис. 15-52. Индуктивная (*а*) и емкостная (*б*) схемы автогенераторов на транзисторах.

личия в характеристиках и параметрах электронной лампы и транзистора, о которых говорится в § 14-4.

На рис. 15-52 приведены некоторые схемы автогенераторов гармонических колебаний на транзисторах.

Первая из них (рис. 15-52, *а*) является трехточечной индуктивной схемой с последовательным питанием цепи коллектора и с параллельным питанием цепи базы. Отрицательное напряжение смещения базы, обеспечивающее мягкое возбуждение колебаний, подается с части $R_{б2}$ потенциометра $R_{б1}$ — $R_{б2}$. В режиме автоколебаний дополнительно возникает положительное автоматичес-

кое смещение, создаваемое постоянным током базы на сопротивлении $R_б$. Благодаря этому абсолютная величина смещения уменьшается и в генераторе устанавливаются колебания с желательным углом отсечки коллекторного тока.

На рис. 15-52, *б* изображен другой вариант генератора на транзисторе, построенный по трехточечной емкостной схеме. Здесь принято параллельное питание как коллекторной цепи, так и цепи базы.

б) Схемы *L*, *C*-автогенераторов с внутренним отрицательным сопротивлением

Современная техника располагает приборами, обладающими отрицательным дифференциальным сопротивлением благодаря происходящим в них внутренним физическим процессам. При использовании таких элементов надобность в положительной обратной связи отпадает. Подобные приборы будем называть **элементами с внутренним отрицательным сопротивлением**. Их вольт-амперные характеристики имеют падающий участок и по своему виду могут относиться или к типу *N*, или к типу *S*.

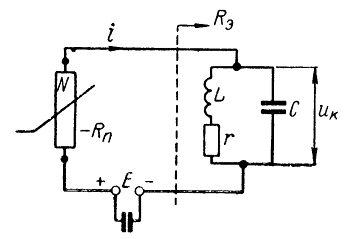


Рис. 15-53. Автогенератор на сопротивлении типа *N*.

Рассмотрим некоторые схемы и количественные соотношения, характеризующие работу автогенераторов гармонических колебаний, построенных на элементах с внутренним отрицательным сопротивлением.

Пусть сопротивление типа *N* включено параллельно колебательному контуру с высокой добротностью (рис. 15-53). Напряжение *E* источника постоянного тока выбирается так, чтобы исходная точка оказалась в середине падающего участка характеристики, изображенной на рис. 15-54.

Как следует из (15-48), условие самовозбуждения схемы имеет вид

$$R_э > R_п(0), \qquad (15\text{-}111)$$

где $R_п(0)$ — абсолютная величина дифференциального отрицательного сопротивления в исходной точке.

Самовозбудившиеся колебания напряжения на контуре $u_к$ в начальные моменты времени имеют малую амплитуду (кривые *а* на рис. 15-54), так что рабочая точка не выходит за пределы падающего участка характеристики, близкого по своей форме к прямой линии. Переменная слагающая тока *i* практически синусоидальна, и отношение амплитуд напряжения на контуре $U_к$ и переменного тока в неразветвленной части цепи *I* составляет

$$R_п(0) = \frac{U_к}{I}. \qquad (15\text{-}112)$$

По мере роста интенсивности колебаний рабочая точка начинает выходить за пределы участка с отрицательной крутизной и форма тока искажается (кривые *б* на рис. 15-54). Имея в виду высокую добротность контура, можно утверждать, что напряжение $u_к$, создаваемое в основном первой гармоникой тока, имеет по-прежнему гармоническую форму. Целесообразно поэтому для анализа цепи воспользоваться квазилинейным методом и ввести в рассмотрение величину среднего отрицательного сопротивления

$$R_{nср}(U_к) = \frac{U_к}{I_1}, \tag{15-113}$$

где I_1 — амплитуда первой гармоники тока.

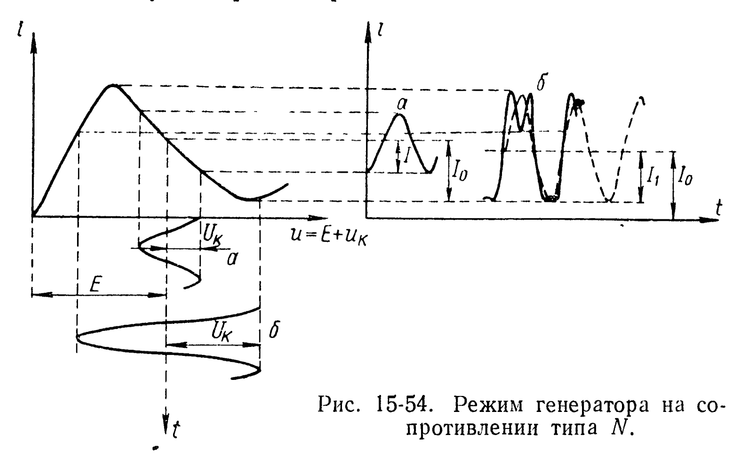


Рис. 15-54. Режим генератора на сопротивлении типа *N*.

Как видно из рис. 15-54 (кривые *б*), искажения тока таковы, что амплитуда первой гармоники его растет медленнее, чем амплитуда напряжения. Поэтому с возрастанием $U_к$ среднее отрицательное сопротивление увеличивается согласно кривой, показанной на рис. 15-55. Рост $R_{nср}$ ограничивает нарастание колебаний. В результате устанавливается стационарная амплитуда колебаний $U_{к0}$, характеризуемая точкой пересечения прямой $R_э$ и кривой $R_{nср}(U_к)$. В этом режиме

$$R_э = R_{nср}(U_{к0}). \tag{15-114}$$

Легко сообразить, что условие устойчивости стационарной амплитуды заключается в том, чтобы производная $R_{nср}$ по $U_к$ была положительна:

$$\left.\frac{dR_{nср}}{dU_к}\right|_{U_{к0}} > 0. \tag{15-115}$$

Зависимость $R_{nср}(U_к)$ вида рис. 15-55 этому удовлетворяет.

Из приведенного анализа следует, что сопротивление типа *N* должно включаться параллельно колебательному контуру. При

таком включении оказывается возможным выполнение условий: самовозбуждения (15-111), а также стационарности (15-114) и устойчивости (15-115) амплитуды.

Возвращаясь к (15-111) и приняв во внимание, что

$$R_э = Q\rho = \frac{Q}{\omega_0 C},$$

получим

$$\omega_0 < \frac{Q}{CR_n(0)}. \qquad (15\text{-}116)$$

Это важное соотношение свидетельствует о том, что при заданных параметрах системы — $R_n(0)$; Q; C — имеется некоторое предельное (максимальное) значение частоты генерируемых колебаний. Возбуждение колебаний с частотой, превосходящей величину

$$\omega_{пред} = \frac{Q}{CR_n(0)}, \qquad (15\text{-}117)$$

в данной схеме невозможно.

Для повышения предельной частоты необходимо стремиться к увеличению добротности контура и к уменьшению постоянной времени

$$\tau_n = CR_n(0). \qquad (15\text{-}118)$$

Весьма простым примером автоколебательной системы, использующей нелинейный элемент с внутренним отрицательным сопротивлением, является динатронный автогенератор (рис. 15-56).

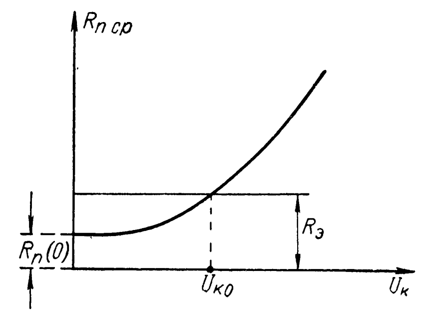


Рис. 15-55. Зависимость $R_{nср}(U_к)$ для генератора на сопротивлении типа N.

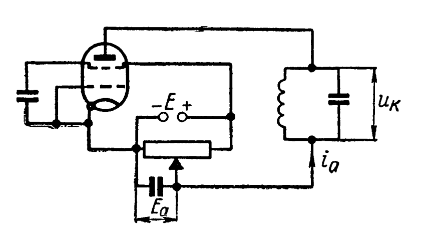


Рис. 15-56. Динатронный автогенератор.

В качестве отрицательного сопротивления, включенного параллельно колебательному контуру, здесь используется промежуток анод — катод четырехэлектродной лампы (тетрода).

Вольт-амперная характеристика $i_a = f(u_a)$ такой лампы имеет вид рис. 15-57. При напряжениях на аноде, меньших напряжения на экранной сетке, анодный ток, вследствие динатронного эффекта анода, с ростом u_a уменьшается. В результате зависимость $i_a = f(u_a)$ приобретает вид характеристики типа N.

Таким образом, принцип действия этого генератора основан на динатронном эффекте. Однако подобный эффект не отличается высокой стабильностью. Кроме того, сопротивление R_n (0) оказывается весьма большим. Поэтому, как это следует из (15-116), для возбуждения колебаний высокой частоты необходимо располагать контуром с весьма большой добротностью и малой емкостью. По этим причинам динатронные автогенераторы на практике применяются очень редко.

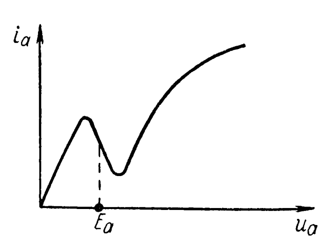


Рис. 15-57. Вольт-амперная характеристика тетрода.

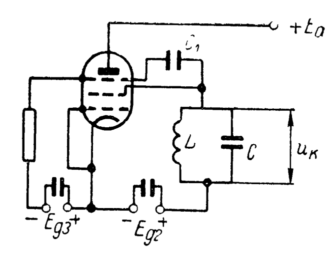


Рис. 15-58. Схема транзитронного генератора.

Более широкое применение в современных радиоустройствах получил т р а н з и т р о н н ы й г е н е р а т о р, схема которого показана на рис. 15-58.

Колебательный контур L, C включен в цепь второй (экранной) сетки пентода. Переменное напряжение на контуре $u_к$ через емкость C_1 подводится также и к третьей сетке. Таким образом, в динамическом режиме одновременно и синфазно изменяются напряжения на второй сетке u_{g2} (относительно исходного напряжения E_{g2}) и на третьей сетке u_{g3} (относительно E_{g3}).

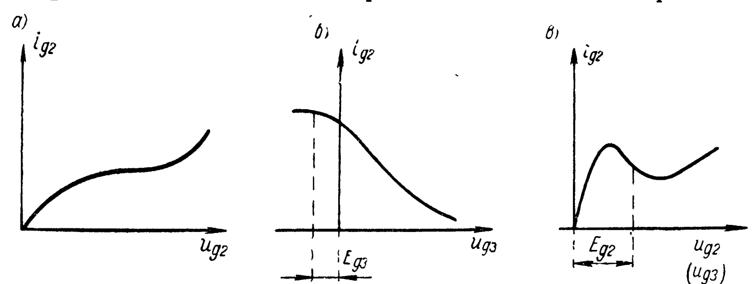


Рис. 15-59. Характеристики пентода.

Для того чтобы уяснить, как влияет на ток второй сетки i_{g2} одновременное изменение u_{g2} и u_{g3}, надо рассмотреть зависимости $i_{g2} = f(u_{g2})$ и $i_{g2} = f(u_{g3})$ при условии, что напряжения на остальных электродах неизменны.

Как видно из рис. 15-59, *а* увеличение u_{g2} влечет за собой возрастание i_{g2}, причем имеется область напряжений, в пределах

которой u_{g2} мало влияет на величину тока i_{g2}, так как электроны, имея при этих напряжениях достаточную скорость, пролетают сквозь сетку g_2 и, попадая в сферу действия анода, уходят к последнему.

Действие напряжения третьей сетки u_{g3} на ток i_{g2} имеет противоположный характер: с увеличением u_{g3} ток i_{g2} уменьшается (рис. 15-59, *б*).

Когда варьируется напряжение u_{g2} и одновременно и пропорционально ему изменяется напряжение u_{g3}, то i_{g2} сперва увеличивается (рис. 15-59, *в*), так как преимущественное влияние имеет напряжение на второй сетке, затем, при дальнейшем увеличении напряжений, на величине тока сказывается главным образом напряжение u_{g3} и ток уменьшается; наконец, при достаточно больших напряжениях величина u_{g3} практически не оказывает влияния на ток i_{g2} и последний вновь возрастает.

Таким образом, в описанных условиях кривая зависимости $i_{g2} = f(u_{g2})$ имеет падающий участок и промежуток вторая сетка — катод ведет себя как нелинейное сопротивление типа N, параллельно которому, как видно из схемы рис. 15-58, включен колебательный контур.

Транзитронный генератор значительно совершеннее динатронного, но также обладает тем недостатком, что величина $R_n(0)$ составляет несколько тысяч (или десятков тысяч) ом, что приводит к необходимости иметь контур с весьма высокой добротностью.

Большой интерес представляет использование в схеме автогенератора так называемого туннельного диода. Он представляет собой полупроводниковый прибор, отличающийся от обычных диодов во много раз бóльшим содержанием примесей. Следствием этого являются низкое удельное сопротивление кристалла и чрезвычайно малая толщина *p-n* перехода, не превышающая $\sim 10^{-6}$ *см*, в то время как эта толщина у обычных диодов имеет величину $\sim 10^{-4}$ *см*.

Вольт-амперная кривая туннельного диода обладает падающим участком и имеет типичный вид характеристики типа N.

Замечательной особенностью туннельного диода как элемента типа N является относительно малая абсолютная величина отрицательного сопротивления, определенная в средней точке падающего участка характеристики. Измерения показывают, что $R_n(0) \approx \approx 10 - 100$ *ом*.

С другой стороны, вследствие малой толщины переходного слоя емкость *p-n* перехода оказывается довольно значительной, порядка десятков пикофарад; в среднем можно считать $C_d \approx 50$ *пф*.

Для использования туннельного диода в схеме автогенератора гармонических колебаний его следует включить параллельно колебательному контуру. Если генератор предназначен для создания колебаний весьма высоких частот, роль емкости контура может выполнять емкость диода. Тогда схема автогенератора приобретает вид рис. 15-60.

Напряжение источника постоянного тока E выбирается такой величины, чтобы исходная рабочая точка оказалась в середине падающего участка характеристики. Колебательный контур составлен из индуктивности L и емкости C_d. Блокировочный конденсатор $C_б$ и дроссель $L_б$ защищают цепь постоянного тока от токов высокой частоты. Так как $C_б \gg C_d$, то на величине емкости контура конденсатор $C_б$ практически не сказывается. В схеме (рис. 15-60) $r_к$ — эквивалентное сопротивление потерь в кристалле и в элементах контура.

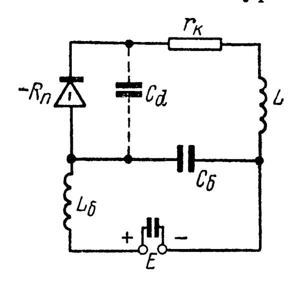


Рис. 15-60. Автогенератор на туннельном диоде.

Несмотря на относительно большую величину емкости диода, постоянная времени

$$\tau_n = C_d R_n(0)$$

оказывается малой, потому что, как указано выше, $R_n(0)$ у туннельного диода мало. В результате даже при невысокой добротности контура предельная частота оказывается весьма высокой.

Так, например, при $R_n(0) = 100$ *ом*, $C_d = 50$ *пф* постоянная времени $\tau_n = 5 \cdot 10^{-9}$ *сек*, и, если $Q = 100$, предельная частота в соответствии с (15-117) будет

$$f_{пред} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{Q}{2\pi\tau_n} = 3{,}18 \cdot 10^3 \textit{ Мгц}.$$

Итак, генератор на туннельном диоде может быть использован в широком диапазоне частот, вплоть до СВЧ.

В автогенераторах, применяемых в радиоэлектронике используются, как правило, нелинейные элементы типа N. Однако возможно построение генераторов и на сопротивлениях типа S, например, на вольтовой дуге. Элемент S должен быть включен в колебательный контур генератора последовательно. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим схему, в которой нелинейное отрицательное сопротивление включено последовательно с элементами контура r, L и C (рис. 15-61). Контур питается от генератора тока, создающего постоянный ток $I_г$.

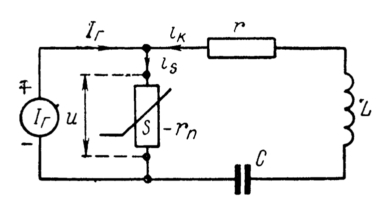


Рис. 15-61. Автогенератор на сопротивлении типа S.

Согласно (15-42) условие самовозбуждения в данном случае имеет вид

$$r < r_n(0), \qquad (15\text{-}119)$$

где $r_n(0)$ — абсолютная величина дифференциального отрицательного сопротивления в исходной точке.

Вольт-амперная характеристика элемента S в обращенной системе координат $u = f(i)$ изображена на рис. 15-62. При малых колебаниях тока (кривые a на рис. 15-62) переменная слагающая напряжения u имеет гармоническую форму и сопротивление в исходной точке

$$r_n(0) = \frac{U}{I_к}. \qquad (15\text{-}120)$$

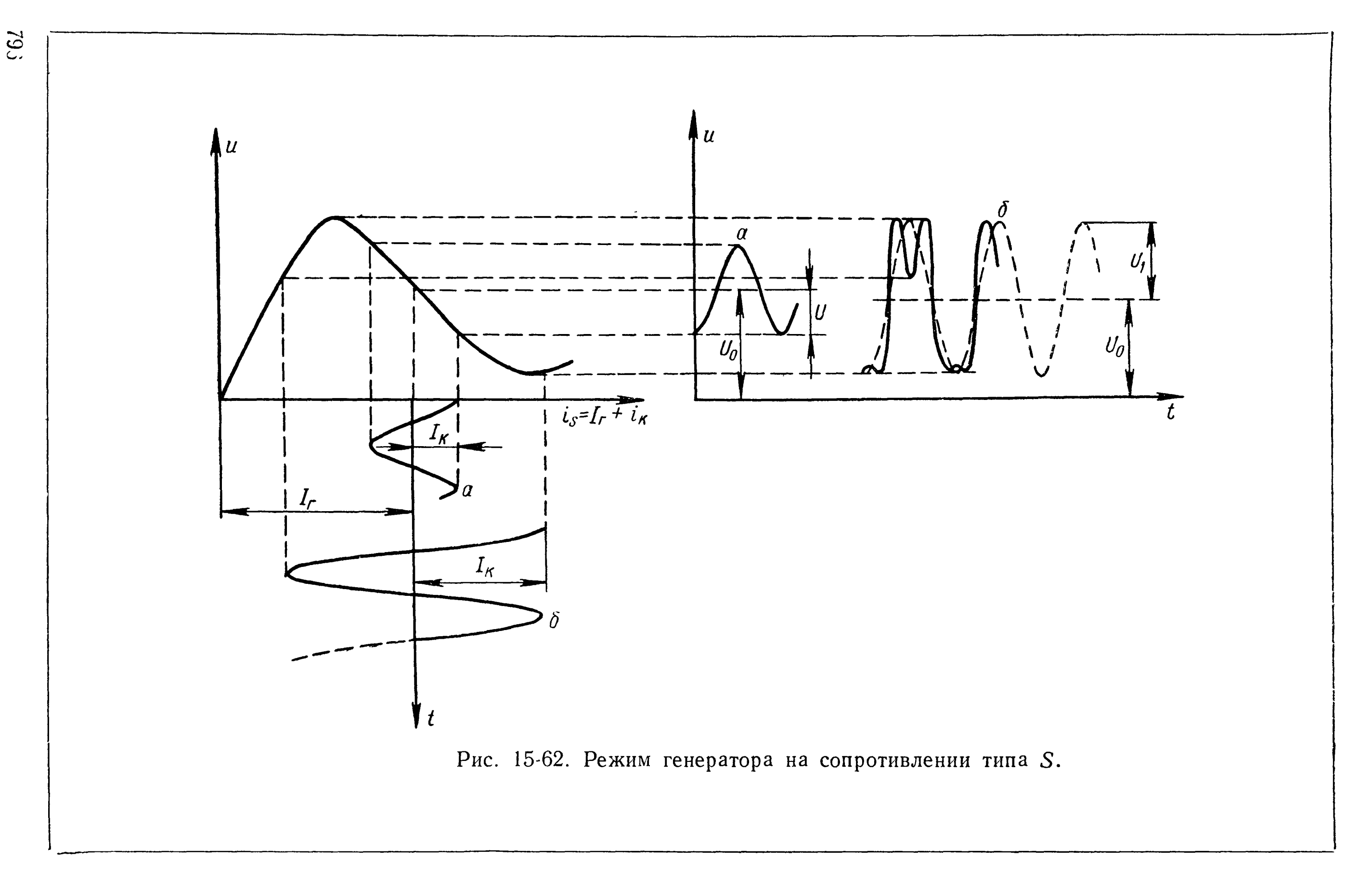


Рис. 15-62. Режим генератора на сопротивлении типа S.

Когда в процессе установления колебаний интенсивность их увеличивается, напряжение на нелинейном элементе искажается так, что первая гармоника напряжения U_1 растет медленнее, чем амплитуда тока (кривые *б* на рис. 15-62). В результате среднее сопротивление

$$r_{n\text{ср}}(I_\text{к}) = \frac{U_1}{I_\text{к}} \qquad (15\text{-}121)$$

с увеличением амплитуды тока контура уменьшается (рис. 15-63) в отличие от сопротивления типа N, которое, наоборот, с увеличением амплитуды колебаний возрастает (см. рис. 15-55).

Точка m пересечения прямой r и кривой $r_{n\text{ср}}(I_\text{к})$ характеризует стационарный режим, для которого

$$r_{n\text{ср}}(I_{\text{к}0}) = r. \qquad (15\text{-}122)$$

Здесь $I_{\text{к}0}$ — амплитуда первой гармоники тока контура в стационарном режиме.

Легко убедиться в том, что амплитуда колебаний, определяемая точкой m, устойчива и что условием устойчивости амплитуды является выполнение неравенства

$$\left.\frac{dr_{n\text{ср}}}{dI_\text{к}}\right|_{I_{\text{к}0}} < 0. \qquad (15\text{-}123)$$

Рис. 15-63. Зависимость $r_{n\text{ср}}(I_\text{к})$ для генератора на сопротивлении типа S.

Итак, действительно, включение элемента типа S последовательно в колебательный контур обеспечивает возможность самовозбуждения (15-119), а также выполнение условий стационарности (15-121) и устойчивости (15-123) амплитуды.

Дуговые генераторы, построенные по схеме, аналогичной рис. 15-61, широко применялись в первые десятилетия существования радиотехники. Они были первыми источниками незатухающих колебаний высокой частоты и впоследствии были вытеснены более совершенными ламповыми генераторами.

15-14. Автогенераторы гармонических колебаний на *R*, *C*

При изучении гармонических автоколебаний мы полагали, что колебательная система автогенератора имеет вид контура, состоящего, как обычно, из индуктивности и емкости (или из нескольких индуктивностей и емкостей). Однако автоколебания, близкие к гармоническим, оказывается, можно получить и в том случае, когда вместо обычной колебательной системы используется совокупность активных сопротивлений и емкостей. Автогенераторы подобного типа коротко называют *R*, *C*-генераторами.

Чтобы познакомиться с принципом работы *R*, *C*-генераторов, обратимся к схеме простейшего усилителя с активным сопротивлением в анодной цепи (рис. 15-64).

Введем в эту схему обратную связь. Тогда усилитель электрических колебаний при определенных условиях может превратиться в автогенератор. Для этого необходимо, чтобы получающаяся замкнутая система удовлетворяла правилам фаз и амплитуд.

Если эти правила выполняются только на какой-то одной частоте $\omega_\text{г}$, система будет создавать гармонические автоколебания данной частоты $\omega_\text{г}$.

Известно, что фаза анодного напряжения в усилителе на сопротивлении отличается от фазы сеточного напряжения на 180°. Следовательно, напряжение обратной связи должно быть сдвинуто по фазе относительно анодного напряжения также на 180°. Последнее утверждение, разумеется, справедливо лишь при условии, что обратная связь не изменяет характера анодной нагрузки лампы.

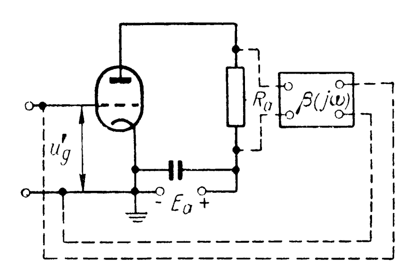


Рис. 15-64. Усилитель на сопротивлении с обратной связью.

В качестве цепи обратной связи, удовлетворяющей изложенным требованиям, можно, например, использовать совокупность трех идентичных ячеек R, C, изображенных на рис. 15-65.

Если величины сопротивлений R много больше сопротивления R_a, то анодная нагрузка лампы практически будет определяться только этим сопротивлением.

Очевидно, что отдельная ячейка R, C может сдвинуть по фазе выходное напряжение относительно входного на угол, меньший 90°. Однако три таких ячейки при некоторой частоте колебаний обеспечивают фазовый сдвиг напряжения точно на 180°.

Таким образом, схема автогенератора гармонических колебаний на R, C принимает вид рис. 15-66.

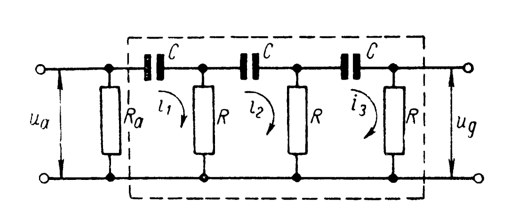


Рис. 15-65. Совокупность трех идентичных ячеек R, C.

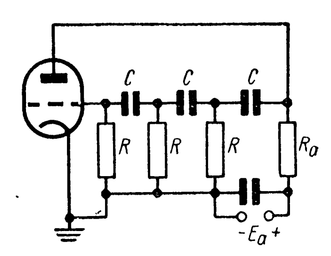


Рис. 15-66. Однoламповый автогенератор гармонических колебаний на R, C.

Чтобы определить коэффициент обратной связи $\beta(j\omega)$ для этой схемы, рассмотрим цепь, показанную на рис. 15-65. Составляя для нее уравнения контурных токов, получим:

$$\left(R+\frac{1}{j\omega C}\right)\dot{I}_1-\dot{I}_2R=\dot{U}_a;$$

$$-R\dot{I}_1+\left(2R+\frac{1}{j\omega C}\right)\dot{I}_2-\dot{I}_3R=0;$$

$$-R\dot{I}_2+\left(2R+\frac{1}{j\omega C}\right)\dot{I}_3=0.$$

Из решения этой системы уравнений находим, что

$$I_3 = \frac{U_a}{R} \frac{1}{-\left[5\left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2 - 1\right] + j\left[\left(\frac{1}{\omega CR}\right)^3 - 6\frac{1}{\omega CR}\right]}$$

и

$$U_g = I_3 R.$$

Следовательно, коэффициент обратной связи

$$\beta(j\omega) = \frac{U_g}{U_a} = \frac{1}{-\left[5\left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2 - 1\right] + j\left[\left(\frac{1}{\omega CR}\right)^3 - 6\frac{1}{\omega CR}\right]}. \quad (15\text{-}124)$$

Для выполнения правила фаз необходимо, чтобы $\beta(j\omega)$ был равен целому отрицательному числу. Последнее будет иметь место, если в выражении (15-124)

$$\left(\frac{1}{\omega CR}\right)^3 - 6\frac{1}{\omega CR} = 0. \quad (15\text{-}125)$$

Уравнение (15-125) и определяет частоту колебаний, на которой может самовозбуждаться автогенератор,

$$\omega_г = \frac{1}{\sqrt{6}RC}. \quad (15\text{-}126)$$

В соответствии с правилом амплитуд коэффициент усиления системы $K(\omega_г)$ при разомкнутой цепи обратной связи на частоте колебаний $\omega_г$ должен быть больше, чем $1/\beta(\omega_г)$. Из равенства (15-124) видно, что

$$\beta(\omega_г) = \frac{1}{5 \cdot 6 - 1} = \frac{1}{29}.$$

Значит, в режиме самовозбуждения необходимо иметь $K(\omega_г) > 29$.

В установившемся состоянии анодный ток лампы, несомненно, будет отличаться от синусоидального из-за нелинейности ее характеристики. Высшие гармоники анодного тока в данном случае играют значительно бо́льшую роль, чем в генераторе с колебательным контуром L, C. Происходит это потому, что «колебательная система», состоящая из емкостей и активных сопротивлений большой величины, в отличие от контура L, C обладает весьма низкими фильтрующими свойствами. В результате форма напряжения в генераторе R, C получается заметно искаженной.

Для исправления формы автоколебаний в схему вводят инерционную нелинейность. В качестве инерционной нелинейности обычно используют термосопротивление, величина которого растет с увеличением температуры (например, обыкновенную лампочку накаливания).

Если такое термосопротивление (термистор) включить в катодную цепь лампы автогенератора (рис. 15-67), то оно будет ограничи-

вать нарастание колебаний. В самом деле, при прохождении по термистору анодного тока на нем образуется (за счет переменной составляющей тока) переменное напряжение $u_т$, которое вместе с напряжением u_g оказывается включенным в сеточную цепь лампы, т. е. между электродами сетка — катод. Так как напряжение $u_т$ сдвинуто по фазе относительно напряжения u_g на 180°, в схеме, помимо положительной обратной связи, возникает также и отрицательная обратная связь. Коэффициент отрицательной связи β' зависит от величины термосопротивления $R_т$, а она, в свою очередь, является функцией амплитуды тока. С увеличением интенсивности колебаний абсолютное значение коэффициента β' возрастает. В результате происходит автоматическое регулирование амплитуды тока относительно какого-то фиксированного уровня.

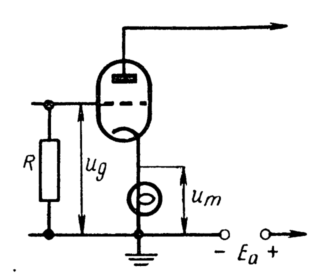


Рис. 15-67. Включение в схему автогенератора инерционной нелинейности.

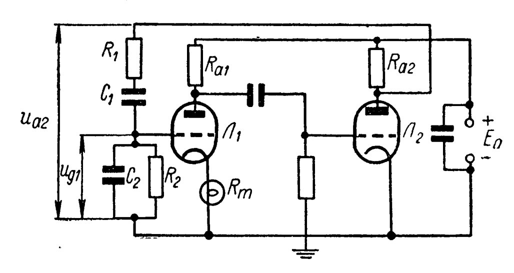


Рис. 15-68. Двухламповый автогенератор гармонических колебаний на R, C.

Таким образом, *автоколебания в генераторе с инерционной нелинейностью будут устанавливаться даже в том случае, когда лампа работает в линейном режиме.* Так как термосопротивление на интервале времени, соответствующем периоду колебаний, ведет себя подобно линейному элементу, автоколебания при этом будут весьма близки к гармоническим.

Рассмотренный выше R, C-генератор может быть использован для получения гармонических колебаний в некотором диапазоне частот. Из формулы (15-126) видно, что частота автоколебаний $\omega_г$ обратно пропорциональна произведению R, C.

Стало быть, изменяя, например, емкости конденсаторов C от $C_{макс}$ до $C_{мин}$ при $R = \mathrm{const}$, мы осуществим перестройку автогенератора по частоте от $\omega_{мин}$ до $\omega_{макс}$, причем $\frac{\omega_{макс}}{\omega_{мин}} = \frac{C_{макс}}{C_{мин}}$.

Уместно напомнить, что частота автоколебаний в генераторе с контуром L, C обратно пропорциональна $\sqrt{LC}$ и, следовательно, при $L = \mathrm{const}$ отношение $\omega_{0макс}/\omega_{0мин}$ будет равно лишь $\sqrt{\frac{C_{макс}}{C_{мин}}}$.

На практике одноламповый генератор R, C применяется весьма редко. Объясняется это тем, что для перестройки такого генератора необходимо согласованно изменять сразу три величины. Кроме того,

коэффициент усиления разомкнутой системы в данном случае должен иметь достаточно большую величину: $K(\omega_0) > 29$.

Весьма широкое распространение в настоящее время получил двухламповый R, C-генератор (рис. 15-68). Подобный генератор представляет собой двухкаскадный усилитель на сопротивлениях с обратной связью.

При разомкнутой цепи обратной связи напряжение на выходе лампы $Л_2$ совпадает по фазе с напряжением, которое подается (в режиме усиления) на сетку лампы $Л_1$. Следовательно, правило фаз в рассматриваемой схеме могло бы удовлетворяться непосредственно, если бы в качестве напряжения обратной связи использовалась часть выходного напряжения U_{a2}. Однако для получения гармонических колебаний необходимо, чтобы условия самовозбуждения выполнялись только на одной частоте. Именно по этой причине обратная связь в автоколебательной системе осуществляется при помощи цепи R_1, $C_1 - R_2$, C_2, передаточные свойства которой зависят от частоты.

Коэффициент обратной связи в данном случае

$$\beta(j\omega) = \frac{U_{g1}}{U_{a2}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2},$$

где $Z_1 = R_1 - j\frac{1}{\omega C_1}$ — сопротивление последовательно соединенных элементов R_1 и C_1;

$Z_2 = -j\frac{R_2 \frac{1}{\omega C_2}}{R_2 - j\frac{1}{\omega C_2}}$ — сопротивление параллельно соединенных элементов R_2; C_2.

Подставив значения Z_1 и Z_2 в исходное выражение и произведя несложные преобразования, получим

$$\beta(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} + j\left(\omega R_1 C_2 - \frac{1}{\omega C_1 R_2}\right)}. \quad (15.127)$$

Из этого выражения видно, что коэффициент $\beta(j\omega)$ будет вещественным и положительным[1] (т. е. напряжения U_{g1} и U_{a2} будут иметь одинаковые фазы), если

$$\omega R_1 C_2 - \frac{1}{\omega C_1 R_2} = 0.$$

[1] Здесь речь идет о двухкаскадном автогенераторе, поэтому положительная обратная связь в отличие от всех предыдущих случаев наблюдается при $\beta(j\omega) = \frac{U_{g1}}{U_{a2}} > 0$. Если же в качестве цепи обратной связи рассматривать лампу $Л_2$ с цепочкой R_1, $C_1 - R_2$, C_2, то коэффициент $\beta(j\omega) = \frac{U_{g1}}{U_{a1}}$ должен быть отрицательным.

Отсюда следует, что автогенератор будет самовозбуждаться на частоте

$$\omega_г = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}. \qquad (15\text{-}128)$$

При такой частоте колебаний коэффициент обратной связи

$$\beta(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}}.$$

Стало быть, для самовозбуждения автогенератора необходимо, чтобы коэффициент усиления $K(\omega_г)$ обоих каскадов был больше, чем

$$\frac{1}{\beta(\omega_г)} = 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}.$$

Пусть $R_1 = R_2 = R$ и $C_1 = C_2 = C$, тогда

$$\omega_г = \frac{1}{RC}, \text{ а } \beta(\omega_г) = \frac{1}{3}. \qquad (15\text{-}129)$$

В этом случае условие самовозбуждения автогенератора принимает вид: $K(\omega_г) > 3$.

В измерительной технике двухламповый R, C-автогенератор применяется как источник гармонических колебаний низких (звуковых) частот. Практически удается получить колебания в диапазоне частот от нескольких герц до нескольких десятков килогерц. Достигается это благодаря применению набора переключаемых сопротивлений и емкостей различной величины. Плавная настройка автогенератора на различные частоты обычно осуществляется путем изменения емкостей $C_1 = C_2 = C$.

Для улучшения формы колебаний здесь так же, как и в одноламповом автогенераторе, используется термосопротивление.

15-15. Принципы генерирования разрывных колебаний

Разрывными называются колебания, характеризующиеся тем, что в некоторые моменты напряжение u (или ток i) изменяется мгновенно, скачком. Производная du/dt (или di/dt) в такие моменты становится бесконечно большой.

На рис. 15-69 в качестве примера приведена временная диаграмма периодических разрывных колебаний:

при $t = t_1 + nT$ производная $\frac{du}{dt} = -\infty$;

при $t = t_2 + nT$ производная $\frac{du}{dt} = +\infty$.

В реальных цепях, неизбежно содержащих энергоемкие элементы, скачкообразные изменения токов и напряжений, разумеется, не могут быть осуществлены. Термин «разрывные колебания» следует понимать условно — в том смысле, что величина напряжения или тока изменяется хотя и не мгновенно, но все же с весьма боль-

шой скоростью, так что длительность перехода системы из одного состояния в другое многим меньше периода колебаний.

Для получения скачков тока необходим «клапан» (ключ), соответствующим образом коммутирующий цепь. Если скачки должны повторяться много раз в секунду, клапан должен быть практически безынерционным. Роль такого клапана может играть нелинейное отрицательное сопротивление.

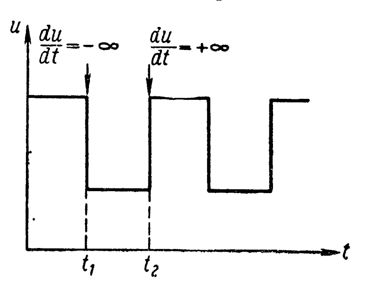


Рис. 15-69. Разрывные периодические колебания.

Пусть цепь составлена из последовательно соединенных источника постоянного напряжения U_0, линейного сопротивления R и отрицательного сопротивления типа N.

В § 15-4, п. «а» было показано, что в определенных условиях такая цепь имеет два устойчивых состояния равновесия и переход системы из одного состояния в другое может происходить скачкообразно. Для этого необходимо чтобы линейное сопротивление было больше абсолютной величины отрицательного дифференциального сопротивления:

$$R > R_n(0). \qquad (15\text{-}130)$$

Кроме того, напряжение источника должно быть выбрано такой величины (например, $U_0 = U_{00}$ на рис. 15-70, *а*), чтобы прямая,

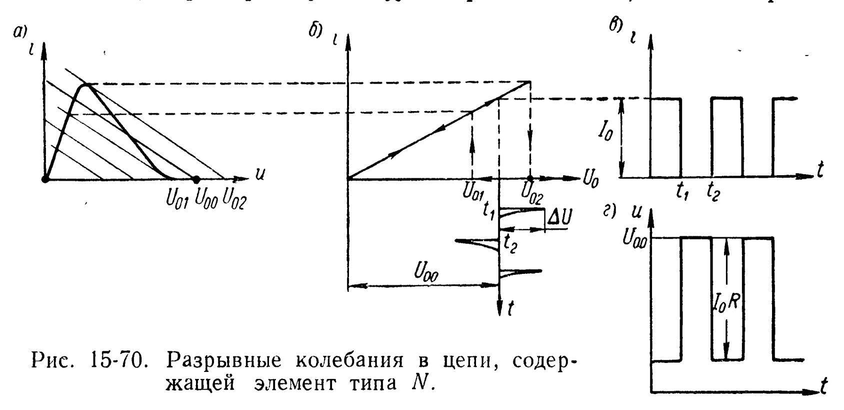


Рис. 15-70. Разрывные колебания в цепи, содержащей элемент типа N.

выражающая вольт-амперную характеристику сопротивления R, пересекала характеристику нелинейного элемента в трех точках. Показанная N-образная характеристика получается в частности для электронной лампы, охваченной положительной обратной связью (правая ветвь кривой совпадает с осью абсцисс).

Перевод системы из одного состояния в другое, как говорят, ее «опрокидывание», можно производить различными методами. Так,

если изменять напряжение источника U_0, прямая будет перемещаться параллельно себе, а зависимость тока i в цепи от U_0 будет иметь вид рис. 15-70, *б*. При увеличении напряжения питания скачок тока происходит, когда $U_0 = U_{02}$, а при уменьшении напряжения — когда U_0 достигает значения U_{01}.

Если напряжение генератора, питающего цепь, равно U_{00} и последовательно с ним включен источник периодически следующих знакопеременных импульсов с крутым фронтом ΔU (рис. 15-71), то при положительном импульсе система приходит в одно положение ($i = 0$; цепь «закрыта», что равноценно разомкнутому «ключу»), при отрицательном импульсе — в другое положение (цепь «открыта», «ключ» замкнут).

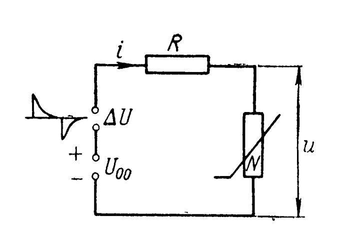


Рис. 15-71. Генератор разрывных колебаний на элементе типа N.

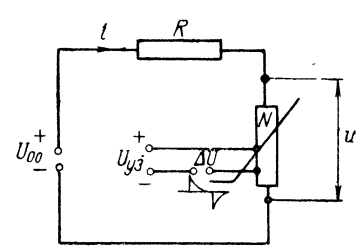


Рис. 15-72. Генератор разрывных колебаний на управляемом элементе типа N.

В результате ток в цепи имеет форму периодических разрывных колебаний (рис. 15-70, *в*).

Напряжение на нелинейном элементе

$$u = U_{00} - iR;$$

на графике рис. 15-70, *г* изображена зависимость $u\,(t)$.

Другой метод переключения цепи основан на применении в качестве сопротивления N управляемого элемента (рис. 15-72). При увеличении управляющего напряжения $U_у$ характеристика элемента приобретает последовательно вид кривых *1*, *2*, *3*,... (рис. 15-73, *а*). В случае, когда роль элемента N играет электронная лампа, охваченная положительной обратной связью, управляющим является напряжение смещения на сетке.

При плавном увеличении (от нуля) управляющего напряжения ток в цепи отсутствует до тех пор, пока $U_у$ не становится равным $U_{у4}$. Здесь происходит опрокидывание схемы; цепь «открывается», возникает ток, определяемый точкой пересечения прямой с кривой *4*. «Выключение» цепи происходит при напряжении $U_{у2}$ (рис. 15-73, *б*).

Введем в цепь управления постоянное напряжение $U_{у3}$ и последовательно с ним источник знакопеременных импульсов ΔU (рис. 15-72). При условии, что величина ΔU достаточно велика (рис. 15-73, *б*), положительный импульс будет приводить к «включению» цепи, а отрицательный — к ее «выключению».

На рис. 15-73, *в* показана временная диаграмма тока в цепи, а на рис. 15-73, *г* — кривая напряжения на нелинейном элементе.

Рассмотренные системы называют электронными реле или с п у с к о в ы м и (триггерными) с х е м а м и. Последнее наименова-

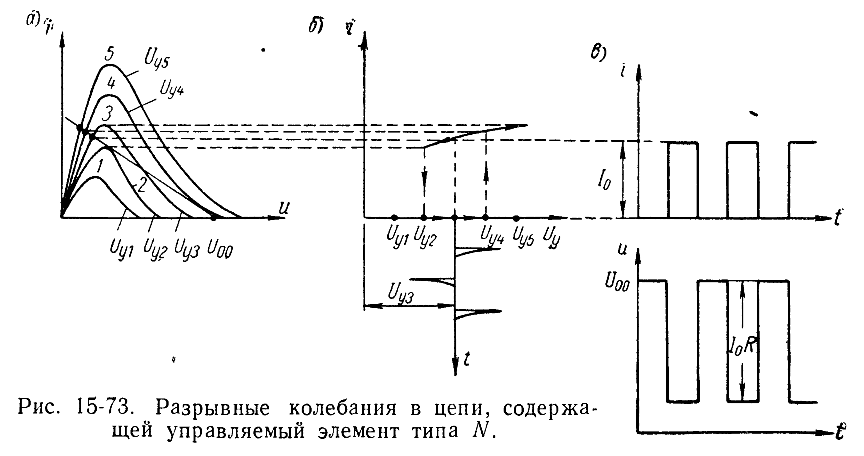


Рис. 15-73. Разрывные колебания в цепи, содержащей управляемый элемент типа N.

ние основано на том, что действие напряжения, опрокидывающего схему, аналогично действию спускового крючка в огнестрельном оружии.

С другой стороны, эти схемы могут рассматриваться как генераторы разрывных колебаний с посторонним возбуждением. Роль источника возбуждения играет генератор импульсных сигналов.

В спусковых схемах в качестве сопротивления N часто используются электронные лампы (или транзисторы), охваченные положительной обратной связью. На рис. 15-74 приведен типичный вариант такой схемы, представляющей собой двухкаскадный реостатный усилитель, часть выходного напряжения которого подана через сопротивление R_c обратно на вход. Предполагается, что оба каскада совершенно идентичны. Если в качестве цепи обратной связи рассматривать вторую лампу с цепочкой $R_c — R_g$, то коэффициент обратной связи окажется отрицательным.

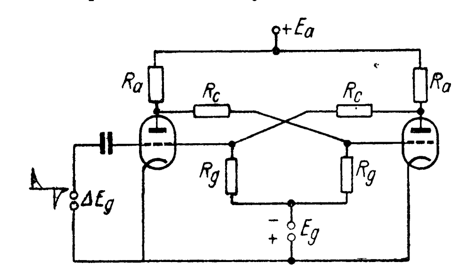


Рис. 15-74. Спусковая схема.

Абсолютная величина его

$$|\beta| = K_1 \frac{R_g}{R_g + R_c},$$

где K_1 — коэффициент усиления одного каскада.

Если $|\beta| > D$, то каждая из ламп ведет себя как элемент типа N с отрицательным сопротивлением, которое согласно (15-34)

$$R_n(0) = \frac{1}{S_0[|\beta| - D]},$$

где S_0 — крутизна лампы в исходной точке.

Условие возможности скачков в соответствии с (15-130) в данной схеме будет иметь вид

$$R_a > \frac{1}{S_0[|\beta| - D]}$$

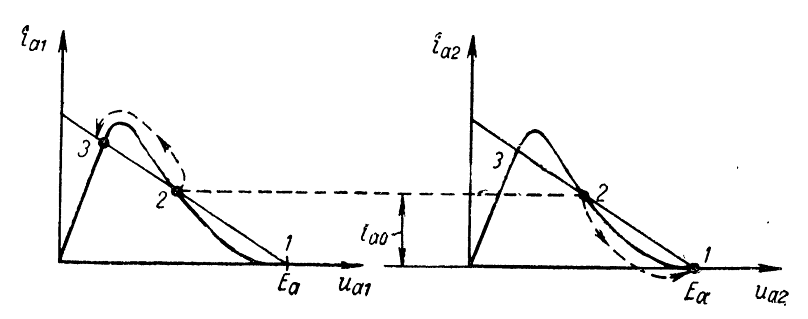


Рис. 15-75. Режим ламп спусковой схемы.

или, если $D \leqslant |\beta|$,

$$R_a > \frac{1}{\beta S_0}. \qquad (15\text{-}131)$$

При выполнении этого неравенства характеристики ламп имеют вид рис. 15-75. Если одна из них отперта (точка *3*), то вторая заперта (точка *1*). Для того чтобы убедиться в этом, допустим, что обе лампы находятся в состоянии *2* (неустойчивом), т. е. обе они открыты и через них проходят равные токи i_{a0}. Если ток первой лампы увеличится на сколь угодно малую величину ($\Delta i_{a1} > 0$), это повлечет за собой уменьшение ее анодного напряжения ($\Delta u_{a1} < 0$). Стало быть, сеточное напряжение второй лампы также уменьшится ($\Delta u_{g2} < 0$), что вызовет уменьшение тока второй лампы и она из неустойчивого состояния *2* начнет переходить в состояние *1*.

Уменьшение тока второй лампы связано с увеличением ее анодного напряжения ($\Delta u_{a2} > 0$), а значит, и с увеличением напряжения сетки первой лампы ($\Delta u_{g1} > 0$). Следовательно, ток первой лампы возрастет ($\Delta i_{a1} > 0$) и она будет переходить из точки *2* в точку *3*.

Описанный процесс протекает лавинообразно и заканчивается, когда первая лампа придет в состояние *3*, а вторая — в точку *1*.

Опрокидывание схемы может быть достигнуто путем воздействия импульсным напряжением на сетку одной из ламп.

Допустим, что первая лампа отперта, а вторая заперта. Подадим на сетку первой лампы отрицательный импульс, уменьшив тем самым напряжение смещения E_g (управляющее напряжение) на величину ΔE_g. Характеристика при этом приобретает вид пунктирной кривой *а* рис. 15-76. Первая лампа закроется, а значит, как показано выше, вторая лампа откроется.

Для того чтобы вновь переключить схему, на сетку первой лампы надо подать положительный импульс. Тогда характеристика на время действия импульса займет место пунктирной кривой *б*, соответствующей смещению $E_g + \Delta E_g$, и лампа придет в состояние *3*, т. е. откроется.

Источник импульсного напряжения (возбуждения), производящий переключение (опрокидывание) схемы, показан на схеме (рис. 15-74).

Спусковые схемы принципиально могут быть построены и на сопротивлениях типа *S*. Надо только помнить, что условие возможности скачков в этом случае заключается в том, что сопротивление *r*, включенное в цепь последовательно, должно быть достаточно мало, а именно:

$$r < r_n(0), \qquad (15\text{-}132)$$

где $r_n(0)$ — дифференциальное отрицательное сопротивление.

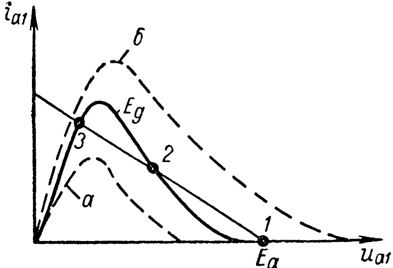


Рис. 15-76. Характеристики при разных напряжениях смещения.

Выше было уже отмечено, что спусковая схема в сущности является генератором с посторонним возбуждением, создающим периодические разрывные колебания. Возникает вопрос, нельзя ли осуществить автогенератор разрывных колебаний, т. е. исключить необходимость в специальном источнике возбуждения?

Очевидно, такая задача может быть решена, если клапан, производящий опрокидывание схемы, будет управляться автоматически и благодаря этому переход цепи из одного устойчивого состояния в другое будет периодически повторяться через определенные, наперед заданные, интервалы времени.

В автогенераторе гармонических колебаний клапаном может управлять колебательная система, состоящая из двух энергоемких элементов (например, контур *L*, *C*), собственные колебания которой имеют форму, близкую к гармонической. В самовозбужденном генераторе разрывных колебаний место колебательного контура должна занять иная система, которая была бы способна к колебаниям скачкообразной формы. Такой системой является, в частности, цепь с одним энергоемким элементом (накопителем энергии) — например, цепь *r*, *C*, в которой при заряде и разряде разрешены скачки

тока через емкость, или цепь r, L, в которой возможны скачки напряжения на индуктивности.

Из сказанного следует, что простейшая блок-схема автогенератора разрывных колебаний может быть представлена рис. 15-77 (ср. с рис. 15-1).

Энергия первичного источника через клапан поступает в накопитель. Когда накопленная энергия достигает определенного (достаточно высокого) уровня, клапан благодаря наличию обратной связи автоматически переключает энергоемкий элемент на разрядную (поглощающую энергию) цепь. Когда уровень накопленной энергии становится достаточно малым, клапан вновь подключает первичный источник к накопителю, и процесс повторяется.

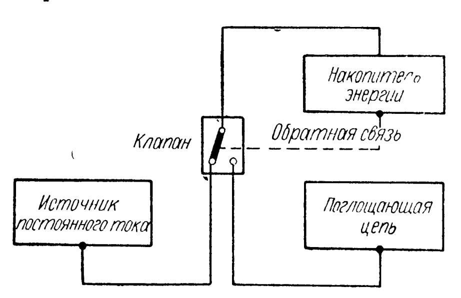


Рис. 15-77. Блок-схема автогенератора разрывных колебаний.

Генераторы, действие которых основано на зарядо-разрядных явлениях, сопровождающихся скачками токов и напряжений, называются релаксационными (от слова «релаксация», что означает высвобождение, в данном случае — энергии). Период возбужденных в этих генераторах разрывных колебаний определяется главным образом величиной постоянной времени цепи (временем релаксации).

Итак, автогенератор релаксационных колебаний представляет собой сочетание первичного источника энергии, отрицательного сопротивления (N или S), выполняющего роль автоматически действующего «ключа», и пассивной цепи с одним энергоемким элементом.

При составлении схемы релаксационного генератора обязательно должны учитываться специфические особенности выбранного для автоматического управления нелинейного элемента и свойства цепи, накапливающей энергию.

Так, например, в релаксационном генераторе на r и C разрешены скачки тока через емкость. Если в нем предусмотрено применение элемента типа S, то скачки тока могут быть реализованы только в том случае, если сопротивление, через которое к элементу подводится питающее напряжение, достаточно мало [см. (15-132)].

Если же в таком генераторе должно быть применено сопротивление типа N, то для того, чтобы в цепи были возможны скачки тока, последовательно с нелинейным элементом должно быть включено достаточно большое линейное сопротивление [см. (15-130)].

15-16. Автогенераторы релаксационных колебаний

а) Автогенератор на газоразрядной лампе

Простейшим источником релаксационных колебаний является автогенератор с газоразрядной лампой (рис. 15-78).

Принцип действия такого автогенератора состоит в следующем. При включении источника постоянного напряжения конденсатор C начинает заряжаться через сопротивление r. Внутреннее сопротивление газоразрядной лампы в исходном состоянии весьма велико, поэтому она на процесс заряда не оказывает сколько-нибудь заметного влияния. Заряд конденсатора будет продолжаться до тех пор, пока напряжение u_C не достигнет так называемого потенциала зажигания U_1. По достижении этого потенциала в лампе происходит ионизация, и сопротивление ее резко уменьшается. В результате конденсатор быстро разряжается через сопротивление малой величины (т. е. через внутреннее сопротивление лампы R_i).

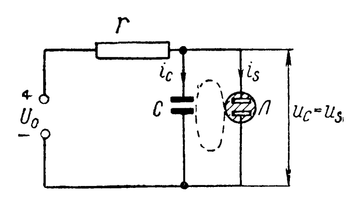


Рис. 15-78. Автогенератор релаксационных колебаний на газоразрядной лампе.

Как только напряжение u_C упадет до значения U_2, при котором ионизация прекращается, сопротивление R_i вновь становится большим, и конденсатор снова получает возможность заряжаться.

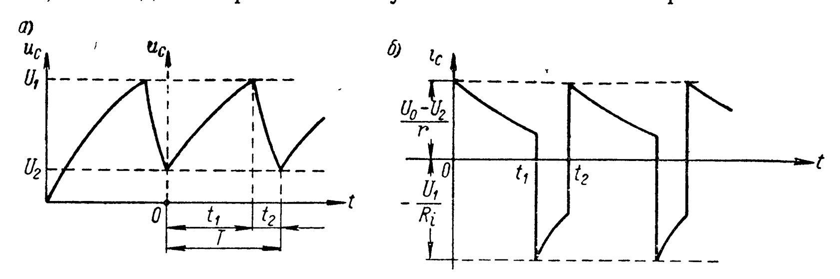


Рис. 15-79. Форма релаксационных колебаний, создаваемых автогенератором на газоразрядной лампе.

С течением времени весь этот процесс периодически повторяется (рис. 15-79, *а*). Таким образом, в схеме устанавливаются автоколебания, вид которых резко отличается от гармонических. Колебательное напряжение на конденсаторе, как следует из рис. 15-79, *а*, по форме приближается к пилообразному.

Заметим, что газоразрядная лампа в автогенераторе выполняет не только роль клапана, управляющего поступлением энергии от источника к накопителю (емкости), но и создает путь для разряда

конденсатора. Другими словами, нелинейный элемент здесь непосредственно участвует в формировании автоколебаний.

Перейдем к определению закона изменения напряжения на конденсаторе.

При заряде напряжение на емкости согласно общим соотношениям, приведенным в § 8-4, имеет вид

$$u_C = U_0 + Ae^{-\frac{t}{rC}}. \qquad (15\text{-}133)$$

Чтобы найти неизвестную постоянную A, необходимо ввести начальные условия. Выберем начало отсчета времени так, чтобы при $t = 0$ напряжение u_C было равно U_2 (см. рис. 15-79, *а*). Тогда

$$u_C\Big|_{t=0} = U_0 + A = U_2,$$

откуда

$$A = -(U_0 - U_2).$$

Подставляя значение A в выражение (15-133), получим

$$u_C = U_0 - (U_0 - U_2)\, e^{-\frac{t}{rC}}. \qquad (15\text{-}134)$$

Момент времени, при котором u_C достигает значения U_1, обозначим t_1. Используя (15-134), будем иметь

$$U_1 = U_0 - (U_0 - U_2)\, e^{-\frac{t_1}{rC}}.$$

Следовательно,

$$e^{-\frac{t_1}{rC}} = \frac{U_0 - U_1}{U_0 - U_2}$$

или

$$t_1 = rC \ln \frac{U_0 - U_2}{U_0 - U_1}. \qquad (15\text{-}135)$$

В режиме разряда конденсатора (при условии, что величина R_i остается за время разряда неизменной)

$$u_C = U_1 e^{-\frac{t}{R_i C}}. \qquad (15\text{-}136)$$

Если в момент $t = t_2$ величина $u_C = U_2$, то из (15-136) находим

$$e^{-\frac{t_2}{R_i C}} = \frac{U_2}{U_1}$$

или

$$t_2 = R_i C \ln \frac{U_1}{U_2}.$$

Таким образом, период автоколебаний в рассматриваемом случае

$$T = t_1 + t_2 = rC \ln \frac{U_0 - U_2}{U_0 - U_1} + R_i C \ln \frac{U_1}{U_2}.$$

Так как обычно $r \gg R_i$, то $t_1 \gg t_2$ и

$$T \approx t_1 = rC \ln \frac{U_0 - U_2}{U_0 - U_1}.$$

Отсюда видно, что величина T существенно зависит от постоянной времени цепи заряда $\tau_з = rC$. Период автоколебаний зависит также и от соотношения между напряжениями U_0, U_2 и U_1. Чем больше размах колебаний (U_2 мало, а U_1 велико) при заданных U_0 и $\tau_з$, тем больше T.

Совершенно ясно, что автоколебательный процесс будет происходить только в том случае, когда напряжение источника питания $U_0 > U_1$. Однако при очень большом напряжении источника автоколебания возникать не могут, так как лампа все время остается в зажженном состоянии.

В режиме автоколебаний ток, текущий через конденсатор, будет изменяться в определенные моменты времени скачком (разрывные колебания). В самом деле, учитывая, что $i_C = C \frac{du_C}{dt}$, и используя выражения (15-134) и (15-136), получим:

при заряде конденсатора ($0 \leqslant t \leqslant t_1$ и т. д.)

$$i_C = \frac{U_0 - U_2}{r} e^{-\frac{t}{rC}}, \qquad (15\text{-}137)$$

при разряде ($t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ и т. д.)

$$i_C = -\frac{U_1}{R_i} e^{-\frac{t}{R_i C}}. \qquad (15\text{-}138)$$

График изменения тока i_C во времени приводится на рис. 15-79,*б*.

В связи с изложенным уместно напомнить, что газоразрядная лампа относится к классу нелинейных сопротивлений типа S, допускающих скачки тока.

Напряжением u_S, питающим элемент S, в данной схеме является напряжение на емкости ($u_S = u_C$). Последовательное сопротивление в цепи питания нелинейного элемента (эта цепь показана пунктиром на рис. 15-78) исчезающе мало ($r_S \to 0$). Поэтому условие возможности скачков [см. (15-132)] выполняется: $r_S < r_n$ (0).

Прямые, соответствующие сопротивлению $r_S = 0$, проходят вертикально (рис. 15-80). При плавном увеличении $u_C = u_S$ (до величины U_1) ток скачкообразно увеличивается, а при уменьшении $u_C = u_S$ до величины U_2 также скачком уменьшается практически до нуля.

В действительности ток, текущий через емкость автогенератора, скачком изменяться не может, так как в цепи всегда имеется какая-то индуктивность, препятствующая мгновенным изменениям тока. Поэтому в точках t_1, t_2 и т. д. вместо скачков тока будем наблюдать просто быстрые его изменения.

В заключение изобразим фазовый портрет рассмотренного автогенератора. Для этого введем, как обычно, прямоугольную систему координат, причем по оси абсцисс будем откладывать напряжение на конденсаторе u_C, а по оси ординат — ток i_C, величина которого пропорциональна производной du_C/dt.

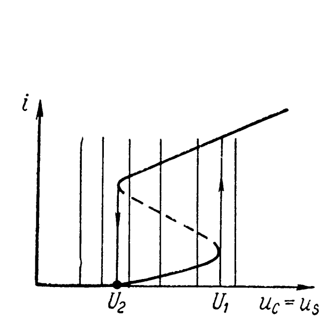


Рис. 15-80. К анализу процессов в автогенераторе на газоразрядной лампе.

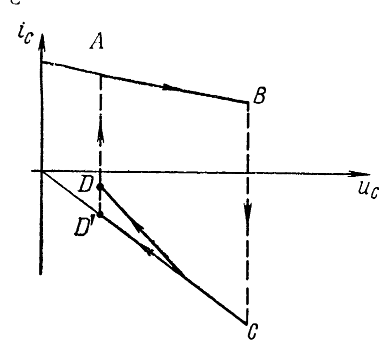


Рис. 15-81. Фазовый портрет автогенератора на газоразрядной лампе.

При заряде конденсатора значения тока i_C и напряжения u_C, как вытекает из равенств (15-134) и (15-137), связаны между собой соотношением

$$i_C = \frac{U_0 - u_C}{r}.$$

Следовательно, фазовая траектория на этом интервале имеет вид отрезка прямой AB (рис. 15-81).

Согласно (15-136) и (15-138) во время разряда конденсатора ток

$$i_C = -\frac{u_C}{R_i},$$

стало быть, фазовая траектория представляется отрезком CD'. В действительности фазовая траектория разряда будет иметь несколько иной вид, так как лампа является нелинейным сопротивлением. Примерная форма фазовой кривой при разряде конденсатора также изображена на рис. 15-81 (линия CD).

В режиме автоколебаний изображающая точка будет двигаться по замкнутому контуру $ABCD$ в направлениях, указанных стрелками, причем переход из точки B в точку C, а также из точки D в точку A совершается скачком.

Рассмотренный релаксационный автогенератор в некоторых случаях используется для получения электрических колебаний пилообразной формы.

б) Мультивибратор

Весьма широкое применение на практике имеет релаксационный автогенератор, называемый мультивибратором. Он представляет собой двухкаскадный ламповый (или транзисторный) усилитель на сопротивлениях с обратной связью (рис. 15-82) и, следовательно, является примером автогенератора с нелинейными элементами типа N.

Как видно из сопоставления рис. 15-82 и рис. 15-74, мультивибратор аналогичен двухламповой спусковой схеме. Основное различие заключается в том, что в цепи обратной связи в мультивибраторе вместо сопротивлений R_S включены емкости C_1 и C_2. Именно это обстоятельство, как показано ниже, дает возможность осуществить в системе режим самовозбуждающихся колебаний.

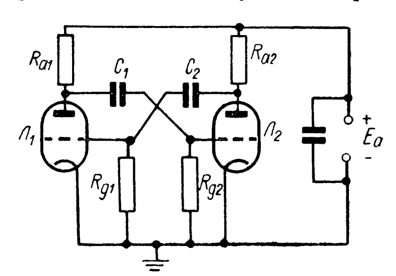


Рис. 15-82. Схема мультивибратора.

В большинстве случаев схема мультивибратора симметрична, т. е. $R_{a1}=R_{a2}=R_a; R_{g1}=R_{g2}=R_g$; $C_1=C_2=C$, а лампы $Л_1$ и $Л_2$ идентичны. Подобный мультивибратор так и называется симметричным.

Предположим, что параметры цепей R_g, C в мультивибраторе удовлетворяют условию

$$R_g \gg \frac{1}{\omega C}. \qquad (15\text{-}139)$$

Тогда напряжение u_{g2} на сетке лампы $Л_2$ будет совпадать по фазе с анодным напряжением u_{a1}, а напряжение обратной связи u_{g1} — с напряжением u_{a2} практически на всех частотах, для которых справедливо неравенство (15-139). Здесь имеются в виду частоты, при которых шунтирующим действием входных емкостей лампы можно пренебречь. Отсюда следует, что правило фаз в мультивибраторе удовлетворяется не на одной частоте, как это, например, имело место в схеме автогенератора гармонических колебаний на R, C (см. § 15-14), а сразу на многих частотах. Если на всех этих частотах выполняется также и правило амплитуд, схема будет генерировать множество гармонических колебаний (составляющих) одновременно. Совокупность таких составляющих, как известно, образует электрические колебания сложной формы. Этим, собственно, и объясняется происхождение названия «мультивибратор» («мульти» — много и «вибратор» — элемент, совершающий колебания).

Чтобы получить представление о форме автоколебаний, создаваемых мультивибратором, рассмотрим протекающие в нем физические процессы.

Пусть в какой-то момент обе лампы открыты и через них текут токи одинаковой величины. Очевидно, такое состояние в схеме не может существовать длительное время, так как токи в лампах всегда испытывают флюктуации относительно их средних значений.

Предположим, например, что в следующий момент ток лампы $Л_1$ немного увеличится. Тогда напряжение на аноде лампы $Л_1$ несколько уменьшится и конденсатор C_1 будет разряжаться через лампу и сопротивление R_{g2}. Образующееся при этом падение напряжения на сопротивлении R_{g2} играет роль отрицательного смещения, подаваемого на управляющую сетку лампы $Л_2$. Стало быть, разряд конденсатора C_1 вызывает уменьшение анодного тока и повышение напряжения на аноде лампы $Л_2$. Вследствие этого конденсатор C_2 начинает заряжаться от источника постоянного напряжения.

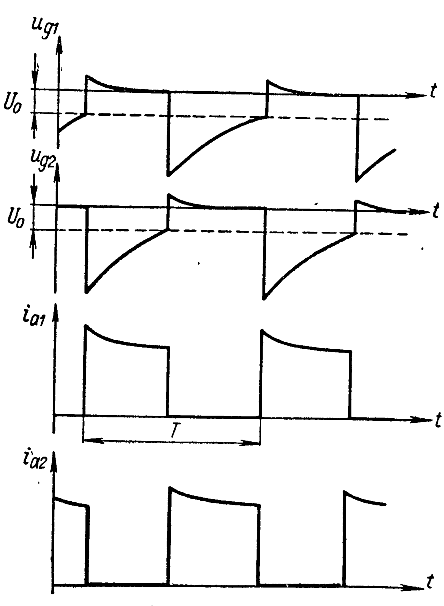


Рис. 15-83. Напряжения на сетках и анодные токи ламп симметричного мультивибратора.

Ток заряда, протекая по сопротивлению R_{g1}, образует на сетке лампы $Л_1$ положительное напряжение смещения. В результате ток лампы $Л_1$ еще более увеличится.

В дальнейшем процесс будет развиваться аналогичным образом, и в конце концов в лампе $Л_1$ устанавливается максимальный ток, а лампа $Л_2$ оказывается запертой. Благодаря действию обратной связи переход $Л_1$ в состояние насыщения, а $Л_2$ в запертое состояние осуществляется очень быстро, почти скачком.

Описанный процесс аналогичен процессу перехода ламп из неустойчивого состояния *2* в состояния *1* и *3* (см. рис. 15-89). Однако в мультивибраторе, в отличие от спусковой схемы, лампа $Л_2$ не останется все время запертой. По мере разряда конденсатора C_1 величина отрицательного напряжения на сетке $Л_2$ непрерывно уменьшается. В какой-то момент лампа $Л_2$ открывается и анодное напряжение ее понижается. Теперь уже начинается разряд конденсатора C_2 на сопротивление R_{g1}, и схема почти мгновенно «опро-

кидывается», переходит в новое состояние, при котором $Л_2$ становится открытой, а $Л_1$ — запертой.

С течением времени весь рассмотренный процесс периодически повторяется.

На рис. 15-83 изображены кривые изменения напряжений на сетках, а также анодных токов ламп симметричного мультивибратора. Из рисунка следует, что анодный ток любой из ламп представляет собой последовательность импульсов, форма которых близка к прямоугольной.

Период следования импульсов T определяется значениями постоянных времени цепей заряда и разряда конденсаторов, а также зависит от параметров электронных ламп. Схема заряда конденсатора C_1 (или C_2) имеет вид рис. 15-84, *а*. Постоянная времени такой цепи

$$\tau_з = C\left(R_a + \frac{r_g R_g}{R_g + r_g}\right),$$

где r_g — сопротивление промежутка сетка — катод лампы при наличии сеточных токов. (Предполагается, что величина этого сопротивления при заряде конденсатора не меняется.) Так как $r_g \ll R_g$ и $r_g \ll R_a$, то

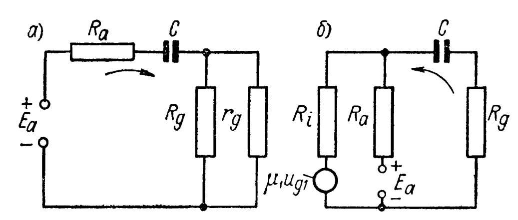


Рис. 15-84. К расчету постоянных времени цепей заряда и разряда конденсатора C мультивибратора.

$$\tau_з \approx C(R_a + r_g) \approx CR_a. \tag{15-140}$$

Эквивалентная схема разряда конденсатора после скачка тока показана на рис. 15-84, *б*. В отличие от предыдущего периода, соответствующего заряду емкости C_1, лампа $Л_1$ теперь находится в открытом состоянии и имеет внутреннее сопротивление R_i (которое также будем считать неизменным). Анализ этой схемы показывает, что постоянная времени ее

$$\tau_р = C\left(R_g + \frac{R_a R_i}{R_a + R_i}\right).$$

Учитывая, что обычно $R_g \gg R_a$, получим

$$\tau_р \approx CR_g. \tag{15-141}$$

Сравнивая выражения (15-140) и (15-141), убеждаемся, что постоянная времени цепи разряда конденсатора значительно больше постоянной времени зарядной цепи.

Так как исследуемый мультивибратор симметричен, продолжительность импульсов анодного тока каждой лампы равна половине периода колебаний T.

При разряде конденсатора C_1 напряжение на сетке лампы $Л_2$ за время $T/2$ успевает упасть до значения, равного U_0; U_0 — напряжение, при котором $Л_2$ открывается. Следовательно,

$$U_0 = U_{\text{макс}} e^{-\frac{T}{2\tau_р}},$$

где $U_{\text{макс}}$ — максимальная величина напряжения на сетке в момент, определяющий начало разряда.

Отсюда видно, что

$$e^{\frac{T}{2\tau_р}} = \frac{U_{\text{макс}}}{U_0}$$

и

$$T = 2\tau_р \ln \frac{U_{\text{макс}}}{U_0}.$$

Расчет схемы рис. 15-84, *б* показывает, что сразу после скачка тока в лампе $Л_1$ напряжение на сопротивлении R_{g2} будет

$$U_{\text{макс}} = E_a \frac{R_g R_a}{R_i R_a + R_i R_g + R_a R_g} = \frac{E_a}{1 + \frac{R_i}{R_g} + \frac{R_i}{R_a}}.$$

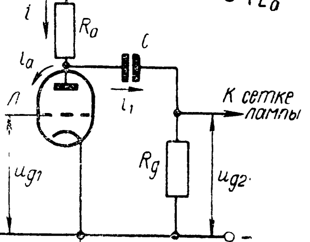


Рис. 15-85. К определению условия самовозбуждения симметричного мультивибратора.

Таким образом, период колебаний симметричного мультивибратора пропорционален постоянной времени $\tau_р$ разрядной цепи. Коэффициент пропорциональности $2\ln \frac{U_{\text{макс}}}{U_0}$ является функцией напряжения источника питания, функцией параметров лампы U_0 и R_i, а также зависит от величин сопротивлений R_a и R_g.

Чтобы определить условие самовозбуждения мультивибратора, составим для одной из его половин, например для левой половины (рис. 15-85), уравнения Кирхгофа.

Пренебрегая сеточными токами, будем иметь

$$i R_a + \frac{1}{C}\int i_1\, dt + i_1 R_g = E_a; \qquad (15\text{-}142)$$

$$i = i_1 + i_a;$$

$$i_a = f(u_{g1}).$$

Так как схема симметрична, то

$$u_{g1} = -i_1 R_g. \qquad (15\text{-}143)$$

Дифференцируя равенство (15-142) по времени, получим

$$R_a \frac{di_1}{dt} + R_a \frac{di_a}{dt} + \frac{1}{C} i_1 + R_g \frac{di_1}{dt} = 0.$$

Производная анодного тока

$$\frac{di_a}{dt} \approx \frac{di_a}{du_{g1}} \cdot \frac{du_{g1}}{dt} = S \frac{du_{g1}}{dt},$$

или с учетом (15-143)

$$\frac{di_a}{dt} = -SR_g \frac{di_1}{dt}.$$

Следовательно, ток i_1 удовлетворяет уравнению

$$(R_a + R_g - SR_a R_g) \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C} i_1 = 0.$$

В режиме самовозбуждения состояние равновесия автогенератора в исходной точке ($S = S_0$) должно быть неустойчивым. Последнее условие будет выполняться, если корень характеристического уравнения

$$(R_a + R_g - S_0 R_a R_g) K + \frac{1}{C} = 0$$

положителен, т. е.

$$K = \frac{1}{C(S_0 R_a R_g - R_a - R_g)} > 0.$$

Стало быть, условие самовозбуждения мультивибратора можно записать в виде

$$S_0 > \frac{R_a + R_g}{R_a R_g}. \qquad (15\text{-}144)$$

Если $R_g \gg R_a$, то вместо (15-144) будем иметь

$$S_0 R_a > 1.$$

Последнее неравенство, как и следовало ожидать, совпадает с условием возможности скачков тока в спусковой схеме с сопротивлением типа N [см. (15-131)]. Действительно, в мультивибраторе коэффициент обратной связи β равен коэффициенту усиления каскада $K_1 \approx S_0 R_a$. Подставляя $\beta = S_0 R_a$ в (15-131) получим $S_0 R_a > 1$.

На практике симметричный мультивибратор обычно используется как генератор импульсов напряжения прямоугольной формы.

в) Блокинг-генератор

Другим примером автогенератора релаксационных колебаний с нелинейным элементом типа N является блокинг-генератор. Схема его изображена на рис. 15-86, пунктиром

здесь показаны «паразитные» емкости, шунтирующие индуктивности. Из схемы видно, что подобный генератор можно рассматривать как предельный случай автогенератора с колебательным контуром, получающийся при уменьшении емкости колебательной системы и сильном увеличении коэффициента обратной связи.

В работе блокинг-генератора существенную роль играют сеточные токи. Они заряжают конденсатор C_g так, что отрицательный потенциал его оказывается на сетке лампы, а положительный — на катоде. Величина отрицательного напряжения на конденсаторе получается достаточной для того, чтобы удерживать лампу в запертом состоянии.

Рассмотрение процессов в блокинг-генераторе начнем именно с того момента, когда лампа заперта. В этом состоянии анодный и сеточный токи, конечно, отсутствуют, а конденсатор C_g разряжается на сопротивление утечки R_g через вторичную обмотку трансформатора. Так как обычно сопротивление R_g велико, разряд емкости имеет апериодический характер. Приближенно можно полагать, что постоянная времени цепи разряда $\tau_р \approx R_g C_g$.

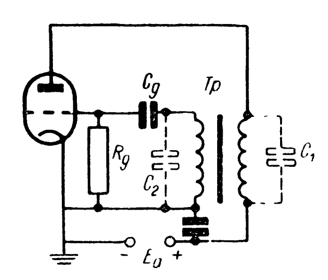


Рис. 15-86. Схема блокинг-генератора.

По мере разряда конденсатора падение напряжения на сопротивлении R_g уменьшается, и в конце концов лампа открывается. Через лампу и первичную обмотку трансформатора потечет анодный ток. Благодаря сильной обратной связи в сеточной цепи появляется положительная (по отношению к катоду) э. д. с. взаимоиндукции. Следовательно, напряжение на сетке становится равным сумме напряжения на конденсаторе и э. д. с. взаимоиндукции. Это, естественно, приводит к дальнейшему росту анодного тока.

В результате быстрого, лавинообразного развития процесса напряжение u_g и анодный ток i_a достигают весьма больших значений, а напряжение на аноде лампы падает почти до нуля. Подобное состояние в схеме называется блокингом, чем, собственно, и объясняется наименование автогенератора.

При положительном напряжении на сетке в лампе появляются сеточные токи, которые с течением времени также растут. За их счет, как уже отмечалось, происходит заряд конденсатора C_g. Процесс заряда протекает довольно быстро, так как постоянная времени зарядной цепи невелика: $\tau_з \approx r_g C_g$, где r_g — внутреннее сопротивление промежутка сетка — катод.

Нетрудно видеть, что в рассматриваемом состоянии (анодный ток велик, а анодное напряжение почти равно нулю) крутизна характеристики становится весьма малой. В таком состоянии изменение напряжения на управляющей сетке почти не вызывает изменений анодного тока. Вследствие этого величина э. д. с., наводимой в се-

точной цепи, будет уменьшаться. Сначала уменьшение наводимой э. д. с. (а вместе с ней и напряжения u_g) не сопровождается заметным уменьшением анодного тока, но затем, когда крутизна S станет достаточно большой, процесс спадания тока усиливается.

Быстрое уменьшение функции $i_a(t)$ приводит к тому, что во вторичной обмотке трансформатора будет наводиться весьма большая по величине э. д. с. обратной полярности, и лампа резко запирается. Конденсатор C_g начинает разряжаться на сопротивление R_g, и вся описанная картина повторяется.

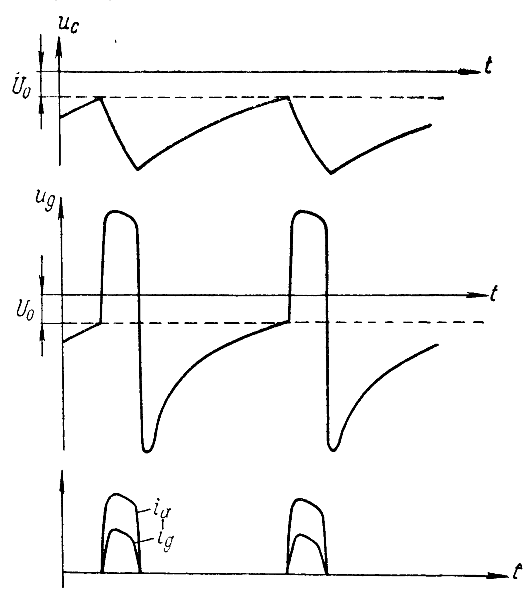


Рис. 15-87. Напряжения и токи в цепях блокинг-генератора.

Таким образом, напряжение на сетке и анодный ток лампы блокинг-генератора в определенные моменты времени изменяются почти скачком. В этом отношении процессы, наблюдаемые в блокинг-генераторе, аналогичны процессам, которые мы имели в мультивибраторе.

На рис. 15-87 приведены графики изменения напряжений и токов в цепях блокинг-генератора, иллюстрирующие рассмотренные выше явления. Первый график представляет собой кривую изменения напряжения на конденсаторе C_g, а второй характеризует результирующее напряжение на сетке лампы. На третьем графике показаны функции $i_a(t)$ и $i_g(t)$.

Из графиков видно, что анодный ток в блокинг-генераторе имеет форму кратковременных импульсов. Минимальная длительность этих импульсов зависит от величины паразитной емкости C_1, а период следования определяется величиной $\tau_p \approx R_g C_g$.

15-17. Воздействие внешней э. д. с. на автогенератор гармонических колебаний

Исследуем поведение автогенератора гармонических колебаний при воздействии на него внешней синусоидальной э. д. с. В качестве конкретного примера выберем схему с трансформаторной свя-

зью, причем колебательный контур включим в цепь сетки (рис. 15-88).

Принцип действия такого автогенератора аналогичен рассмотренному выше принципу автогенератора с контуром в анодной цепи. Действительно, если в контуре по какой-либо причине возникают электрические колебания, анодный ток лампы, помимо постоянной составляющей, будет иметь и переменную составляющую.

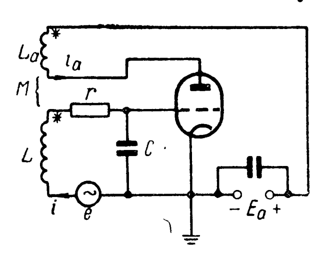


Рис. 15-88. Воздействие внешней э. д. с. на автогенератор с колебательным контуром в цепи сетки.

Наличие в схеме обратной связи приводит к тому, что в контуре наводится э. д. с. взаимоиндукции.

При соблюдении определенных амплитудных и фазовых соотношений в системе могут устанавливаться автоколебания.

Составим для контура, включенного в сеточную цепь лампы, уравнение Кирхгофа

$$L\frac{di}{dt}+ri+\frac{1}{C}\int i\,dt=e+M\frac{di_a}{dt}. \tag{15-145}$$

Здесь i — ток в контуре; i_a — анодный ток; M — взаимоиндуктивность (слагаемое $\pm M\, di_a/dt$ берем с положительным знаком) и $e = E\cos\omega t$ — э. д. с. внешнего источника с частотой колебаний ω.

Сеточными токами, как и во всех предыдущих рассуждениях, пренебрегаем.

В рассматриваемом случае напряжение на управляющей сетке лампы

$$u_g=\frac{1}{C}\int i\,dt. \tag{15-146}$$

Отсюда следует, что

$$\int i\,dt=\frac{1}{C}u_g,\quad i=\frac{1}{C}\cdot\frac{du_g}{dt}\quad \text{и}\quad \frac{di}{dt}=\frac{1}{C}\cdot\frac{d^2u_g}{dt^2}.$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получим

$$\frac{d^2u_g}{dt^2}+\frac{r}{L}\cdot\frac{du_g}{dt}+\omega_0^2u_g=\omega_0^2E\cos\omega t+\omega_0^2M\frac{di_a}{dt}, \tag{15-147}$$

где

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Так как

$$\frac{di_a}{dt}\approx S\frac{du_g}{dt},$$

вместо (15-147) можно написать

$$\frac{d^2u_g}{dt^2}+\frac{1}{L}\left(r-\frac{MS}{C}\right)\frac{du_g}{dt}+\omega_0^2u_g=\omega_0^2E\cos\omega t. \tag{15-148}$$

В отсутствие внешней э. д. с. (т. е. при $E=0$) это уравнение совпадает с дифференциальным уравнением (15-59), описывающим процессы в автогенераторе с колебательным контуром в анодной цепи лампы.

В исследуемой схеме возможны два режима: первый соответствует неравенству

$$r-\frac{MS}{C}>0, \qquad (15\text{-}149)$$

а второй — неравенству

$$r-\frac{MS}{C}<0. \qquad (15\text{-}150)$$

В режиме, соответствующем условию (15-149), активное сопротивление контура с учетом обратной связи остается положительным и, следовательно, никаких автоколебаний в схеме не возникает. Такая система называется потенциально автоколебательной (недовозбужденный автогенератор).

При условии (15-150) сопротивление контура становится отрицательным. Поэтому в системе, помимо колебаний, создаваемых внешним источником, должны возникать еще и автоколебания.

Рассмотрим оба эти режима по отдельности.

а) Воздействие гармонической э. д. с. на потенциально автоколебательную систему. Регенерация

Пусть интенсивность внешней э. д. с., введенной в контур, такова, что амплитуда напряжения на сетке лампы (т. е. амплитуда напряжения на емкости контура) оказывается весьма малой. При этом условии исходную нелинейную систему можно считать линейной и нелинейное уравнение (15-148) заменить соответствующим линейным уравнением. Последнее будет представлять собой обычное уравнение вынужденных колебаний в контуре с индуктивностью L, емкостью C и активным сопротивлением

$$r_э=r-\frac{MS_0}{C}.$$

Эквивалентная добротность такого контура (рис. 15-89)

$$Q_э=\frac{\rho}{r_э}\doteq\frac{\rho}{r-\frac{MS_0}{C}}=\frac{Q}{1-\frac{MS_0}{rC}},$$

где $Q=\frac{\rho}{r}$, а S_0 — крутизна характеристики в начальной рабочей точке.

Обозначив $\frac{rC}{S_0}=M_{кр}$, будем иметь

$$Q_э=\frac{Q}{1-\frac{M}{M_{кр}}}=\frac{Q}{1-\frac{\beta}{\beta_{кр}}};$$

$$\beta_{кр}=\frac{M_{кр}}{L}.$$

Таким образом, величина $Q_э$ является функцией коэффициента обратной связи: чем ближе значение β к критическому значению, тем больше $Q_э$. При $\beta = \beta_{кр}$ величина $Q_э \to \infty$, а дальнейшее увеличение β приводит к возникновению автоколебаний.

Отсюда можно заключить, что избирательные свойства контура зависят от величины связи между сеточной и анодной цепями лампы. На рис. 15-90 изображено семейство резонансных характеристик системы, полученных при различных значениях M. Из рисунка видно, что по мере увеличения коэффициента M эквивалентная полоса пропускания контура уменьшается ($M_1 < M_2 < M_3$).

Физически увеличение добротности колебательной системы при наличии положительной обратной связи объясняется тем, что потери в контуре частично компенсируются энергией, вводимой из анодной цепи лампы. В радиотехнике это явление получило название р е г е н е р а ц и и.

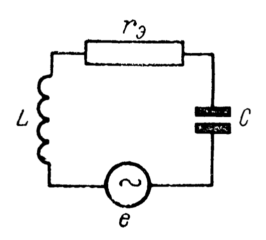


Рис. 15-89. К исследованию явления регенерации.

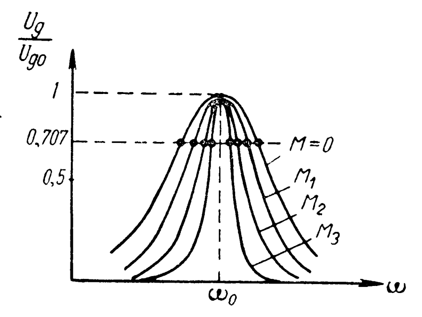


Рис. 15-90. Эквивалентные резонансные характеристики колебательного контура при различных значениях коэффициента M.

Анализ процессов в системе при больших амплитудах напряжения на сетке лампы можно осуществить посредством квазилинейного метода. Согласно этому методу в установившемся режиме вместо уравнений (15-145) и (15-146) будем иметь:

$$\boldsymbol{I}\left[r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right] = \boldsymbol{E} + j\omega M \boldsymbol{I}_{a1};$$

$$\boldsymbol{U}_g = -j\frac{1}{\omega C}\boldsymbol{I}.$$

Учитывая, что $\frac{\boldsymbol{I}_{a1}}{\boldsymbol{U}_g} = \boldsymbol{S}_{ср} = S_{ср}$, получим

$$j\omega M \boldsymbol{I}_{a1} = j\omega M S_{ср} \boldsymbol{U}_g = \frac{MS_{ср}}{C}\boldsymbol{I}$$

и

$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{E}}{r - \frac{MS_{ср}}{C} + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

Отсюда вытекает, что активное (среднее) сопротивление регенерированного контура

$$r_э = r - \frac{MS_{ср}}{C} = r - r_{нср}, \qquad (15\text{-}151)$$

где $r_{нср} = \frac{MS_{ср}}{C}$ — абсолютное значение вносимого в контур сопротивления.

Так как средняя крутизна является функцией U_g, величина $r_э$ также должна зависеть от амплитуды напряжения на сетке. На основании этого можно утверждать, что резонансная характеристика регенерированного контура в общем случае будет отличаться от рассмотренных выше резонансных кривых.

Известно, что амплитуда $U_g = U_C$ достигает максимума на частоте колебаний, приближенно равной резонансной частоте ω_0, при условии, что добротность контура и без обратной связи достаточно велика. Если средняя крутизна по мере увеличения амплитуды сеточного напряжения непрерывно падает, то при $\omega = \omega_0$ активное сопротивление контура [см. (15-151)] будет максимальным.

Отклонение частоты колебаний внешней э. д. с. от резонансной, естественно, приводит к уменьшению амплитуд тока и напряжения на сетке вследствие увеличения реактивного сопротивления цепи. Но уменьшение амплитуды U_g вызывает увеличение средней крутизны и уменьшение активного сопротивления $r_э$. Стало быть, амплитуда напряжения U_g при малых расстройках должна убывать медленнее, чем в линейной системе, ибо увеличение реактивного сопротивления контура в какой-то степени компенсируется уменьшением его активного сопротивления. Чем больше амплитуда внешней э. д. с., тем, очевидно, медленнее будут изменяться амплитуды I и U_g в окрестностях резонансной частоты.

По мере увеличения расстройки $|\omega - \omega_0|$ результирующее активное сопротивление контура будет меняться мало и решающую роль начинает играть рост реактивной составляющей комплексного сопротивления колебательной системы. Поэтому при дальнейшем увеличении $|\omega - \omega_0|$ амплитуды I и U_g должны быстро уменьшаться.

Форма резонансной характеристики подобного регенерированного контура в случае больших амплитуд внешней э. д. с. показана на рис. 15-91. Здесь же для сравнения изображены еще две резонансные характеристики: кривая *1* получается при малых амплитудах внешнего воздействия, а кривая *2* соответствует условию $M = 0$ (регенерация отсутствует).

Представление о форме резонансной кривой регенерированного контура нетрудно также получить, исходя из несколько иных соображений. При отклонении частоты ω от резонансной величина $r_э$ уменьшается, поэтому можно полагать, что эквивалентная добротность такого контура является функцией расстройки. В окрестностях резонансной частоты $Q_э$ оказывается минимальной, а по мере

увеличения $|\omega - \omega_0|$ она возрастает. Если на графике построить семейство резонансных характеристик линейного контура для различных Q, то применительно к регенерированной системе изменение частоты колебаний должно сопровождаться последовательным переходом на новые резонансные кривые (рис. 15-92). В результате

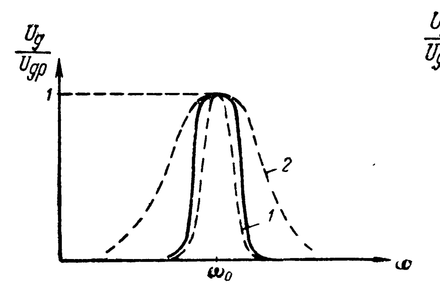


Рис. 15-91. Резонансная характеристика регенерированного колебательного контура при больших амплитудах внешней э. д. с.

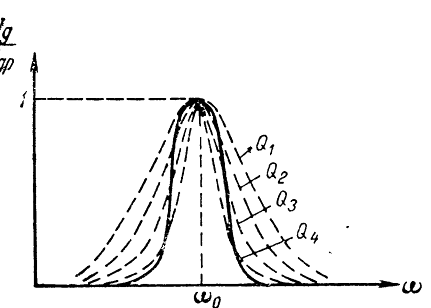


Рис. 15-92. К расчету резонансной характеристики регенерированного контура.

получается резонансная характеристика, отличная от подобных кривых линейных контуров.

Явление регенерации находит практическое применение в радиоприемных устройствах.

На рис. 15-93 изображена схема так называемого **регенеративного приемника**. Из рисунка видно, что принятый антенной сигнал вводится в колебательный контур с помощью трансформаторной связи между катушками L_a и L. Наличие регенерации в схеме повышает добротность контура и, следовательно, увеличивает амплитуду переменного напряжения, подаваемого на сетку лампы. Вместе с тем улучшаются избирательные свойства системы. Наибольший выигрыш в усилении получается при приеме слабых сигналов, так как в этом случае отрицательное сопротивление, вносимое в контур, по абсолютной величине будет максимально.

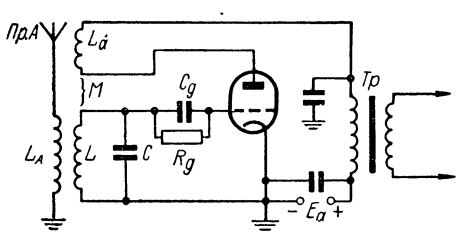


Рис. 15-93. Схема простейшего регенеративного радиоприемного устройства.

В схеме, как легко заметить, применяется сеточное детектирование. Образующееся в результате детектирования на сопротивлении R_g низкочастотное напряжение усиливается в анодной цепи лампы. В качестве анодной нагрузки здесь используется трансформатор.

Изложенное показывает, что регенеративный приемник будет иметь при минимальном количестве ламп и колебательных контуров сравнительно высокую избирательность и усиление. Однако подобные приемники в настоящее время применяются редко. Большинство современных многокаскадных радиоприемных устройств принадлежит к классу устройств супергетеродинного типа. Последние по своим показателям значительно превосходят регенеративные приемные устройства.

б) Воздействие гармонической э. д. с. на автоколебательную систему. Захватывание

Предположим теперь, что исследуемая система находится в режиме автоколебаний. При воздействии внешней э. д. с. с частотой $\omega \neq \omega_0$ в такой системе, казалось бы, должны возникать биения с частотой $|\omega - \omega_0|$. Именно такую картину мы имели бы при сложении двух гармонических колебаний в линейной цепи. Однако наличие в автогенераторе нелинейности существенно усложняет характер процессов.

Строгий количественный анализ явлений, возникающих в автогенераторе при гармоническом воздействии, оказывается весьма сложным. Поэтому ограничимся качественным их рассмотрением на основе упрощенной квазилинейной теории.

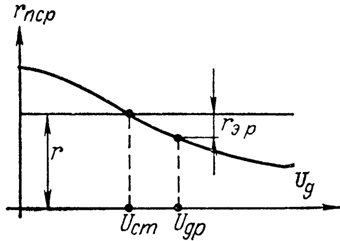


Рис. 15-94. К анализу явления захватывания.

Пусть автогенератор в свободном состоянии, т. е. при $E = 0$, создает гармонические колебания, характеризуемые амплитудой $U_{ст}$ и частотой ω_0.

Стационарная амплитуда $U_g = U_{ст}$, как вытекает из квазилинейной теории, определяется условием

$$S_{ср}(U_{ст}) - \frac{rC}{M} = 0,$$

а частота автоколебаний равна резонансной частоте контура.

В дальнейшем вместо зависимости $S_{ср}(U_g)$ нам удобнее использовать функцию $r_{пср}(U_g) = \frac{MS_{ср}(U_g)}{C}$, имеющую тот же вид, что и $S_{ср}(U_g)$.

Нетрудно видеть, что в стационарном режиме среднее отрицательное сопротивление, вносимое в контур, равно по абсолютному значению активному сопротивлению контура:

$$r_{пср} = \frac{MS_{ср}(U_{ст})}{C} = r.$$

Следовательно, стационарную амплитуду автоколебаний можно определить на графике сопротивлений (рис. 15-94) как абсциссу точки пересечения кривой $r_{п\ ср}(U_g)$ с прямой $r = \mathrm{const}$.

Введем в колебательный контур автогенератора внешнюю гармоническую э. д. с., амплитуда которой мала, а частота $\omega = \omega_0$. Теперь амплитуда напряжения на сетке лампы, очевидно, будет несколько больше стационарного значения. (Предполагается, что фаза внутренних колебаний отличается от фазы автоколебаний на угол, меньший $\pi/2$.) Новую амплитуду сеточного напряжения обозначим U_{gp}. Тогда полное активное сопротивление контура

$$r_{э.р} = r - \frac{MS_{ср}(U_{gp})}{C}.$$

Так как $r_{э.р} > 0$ (рис. 15-94), автогенератор оказывается как бы в недовозбужденном состоянии.

Будем теперь изменять частоту внешней э. д. с. Отклонение частоты внешнего воздействия от резонансной частоты ω_0 приводит к уменьшению напряжения на сетке лампы. Однако система продолжает еще вести себя как недовозбужденный автогенератор, поэтому частота колебаний в контуре будет совпадать с частотой внешнего воздействия.

При какой-то расстройке амплитуда U_g становится равной величине $U_{ст}$, и система переходит в режим автоколебаний. Теперь уже в контуре будут наблюдаться два гармонических колебания, образующие биения.

Отсюда следует, что внешнее воздействие в определенной полосе частот «навязывает» автогенератору свою частоту колебаний. Происходит как бы захватывание частоты автоколебаний частотой внешнего источника. По этой причине рассматриваемое явление получило название *захватывания*, а полоса частот, в которой оно проявляется, называется *полосой захватывания*.

Определим ширину полосы захватывания.

В пределах этой полосы амплитуда тока в контуре

$$I = \frac{E}{\sqrt{r_э^2 + x^2}},$$

где

$$r_э = r_э(U_g), \qquad x \approx 2\rho \frac{|\omega - \omega_0|}{\omega_0} = 2\rho \frac{\Omega}{\omega_0}$$

— активное и реактивное сопротивления контура.

На границах полосы величина $r_э$ согласно изложенному обращается в нуль. Следовательно, амплитуда тока в контуре принимает вид

$$I_{захв} = \frac{E}{x_{захв}}.$$

Здесь $x_{захв} = \rho \frac{\Delta\omega_{захв}}{\omega_0}$ — реактивное сопротивление контура в граничных точках;

$\Delta\omega_{захв}$ — полоса захватывания.

Но, с другой стороны,

$$I_{захв} = \frac{U_{ст}}{\rho}.$$

Сопоставляя эти выражения, будем иметь

$$\frac{E}{\rho \frac{\Delta\omega_{захв}}{\omega_0}} = \frac{U_{ст}}{\rho},$$

откуда

$$\frac{\Delta\omega_{захв}}{\omega_0} = \frac{E}{U_{ст}}. \qquad (15\text{-}152)$$

Таким образом, *ширина полосы захватывания пропорциональна амплитуде внешней э. д. с. E и обратно пропорциональна амплитуде напряжения на сетке лампы при $E = 0$*. Формула (15-152) совпадает с аналогичным выражением для полосы захватывания, которое при малых E дает более строгий анализ явления.

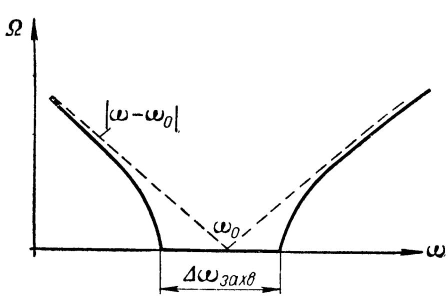


Рис. 15-95. Зависимости частоты биений в автогенераторе от частоты внешнего воздействия.

На рис. 15-95 изображен закон изменения частоты биений, образующихся в автогенераторе, в зависимости от частоты внешнего воздействия. Если бы система была линейна, частота биений Ω, как уже отмечалось, должна бы быть равна $|\omega - \omega_0|$ (см. пунктирную линию на рис. 15-95). При больших расстройках внешнего источника величина Ω оказывается достаточно близкой к разностной частоте $|\omega - \omega_0|$. Однако по мере приближения ω к ω_0 кривая изменения Ω все более отклоняется от пунктирной линии. Наконец, в пределах полосы $\Delta\omega_{захв}$ частота биений становится равной нулю, т. е. биения здесь вообще исчезают.

Показанный на рис. 15-95 график функции $\Omega(\omega)$, разумеется, нельзя получить, исходя из изложенной выше приближенной теории захватывания. Зависимость $\Omega(\omega)$ определяется либо на основании более строгой теории, либо устанавливается экспериментально.

ГЛАВА ШЕСТНАДЦАТАЯ

ЦЕПИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

16-1. Введение

Электрические цепи, в которых хотя бы один из параметров (сопротивление, индуктивность, емкость) изменяется во времени по какому-либо закону $p = p(t)$, называются цепями с переменными параметрами, или (короче, хотя и не совсем правильно) параметрическими цепями.

На схемах параметрические элементы, т. е. изменяющиеся во времени сопротивления, емкости и индуктивности, будем условно изображать так, как показано на рис. 16-1.

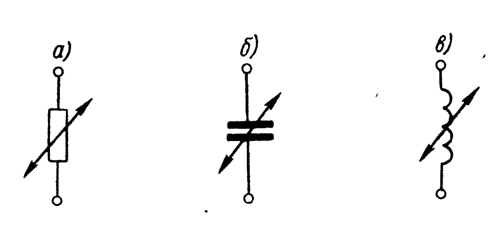


Рис. 16-1. Параметрические элементы: *а* — сопротивление; *б* — емкость; *в* — индуктивность.

В параметрических элементах величинами x и y являются: для активного сопротивления $x = u$; $y = i$; для емкости $x = u_C$; $y = q$; для индуктивности $x = i$; $y = \Phi$.

Зависимость между ними имеет вид

$$y = p(t)x. \qquad (16\text{-}1)$$

Если параметры зависят только от времени и не зависят от режима цепи (от величины x), цепь, содержащая такие элементы, линейна.

К линейным параметрическим цепям применим принцип наложения. Действительно, если воздействие состоит из n составляющих

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

то отклик на сложное воздействие

$$y = p(t)\sum_{k=1}^{n} x_k = p(t)x_1 + p(t)x_2 + \ldots + p(t)x_n \qquad (16\text{-}2)$$

равен сумме откликов на каждую из составляющих воздействия:

$$y = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \sum_{k=1}^{n} y_k,$$

где $y_k = p(t)\, x_k$ — отклик на k-ю слагающую воздействия.

Вид функций $p(t)$ может быть произвольным. Наибольший интерес представляет тот случай, когда $p(t)$ — гармоническая функция времени (рис. 16-2, *а*):

$$p(t) = p_0 + \Delta p_m \cos \omega_p t = p_0 (1 + m_p \cos \omega_p t). \qquad (16\text{-}3)$$

Здесь p_0 — постоянная слагающая (среднее значение) параметра;

ω_p — частота изменения параметра;

Δp_m — амплитуда переменной слагающей (наибольшее изменение) параметра;

$m_p = \frac{\Delta p_m}{p_0}$ — так называемый коэффициент вариации параметра.

Если параметр изменяется во времени по сложному периодическому закону (рис. 16-2, *б*), то

$$p(t) = p_0 + p_{m1} \cos(\omega_p t + \psi_1) + p_{m2} \cos(2\omega_p t + \psi_2) + \ldots = p_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} m_{pk} \cos(k\,\omega_p t + \psi_k)\right]. \qquad (16\text{-}4)$$

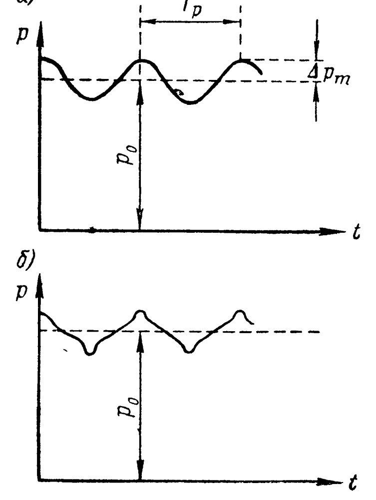


Рис. 16-2. Изменение параметра во времени.

Здесь m_{pk} — парциальный коэффициент вариации параметра, равный отношению амплитуды k-й гармоники p_{mk} к среднему значению параметра p_0, а именно: $m_{pk} = \frac{p_{mk}}{p_0}$.

Изменение параметров цепи (сопротивления, индуктивности, емкости) можно производить различными способами. Так, например, для вариации емкости можно изменять расстояние между пластинами конденсатора или менять их эффективную площадь, вращая ротор конденсатора переменной емкости. Но в большинстве случаев изменение параметра должно происходить с большой частотой и, стало быть, требует применения элементов с малой инерционностью. Этого можно достичь только путем электрического управления величиной параметров цепи.

В качестве практически безынерционных элементов цепи с изменяющимися во времени параметрами обычно используются нелинейные элементы.

Пусть характеристика нелинейного элемента выражается зависимостью $y = f(x)$, представленной графически на рис. 16-3.

Будем для определенности считать, что речь идет о вольт-амперной характеристике сопротивления, т. е. воздействие x равно на-

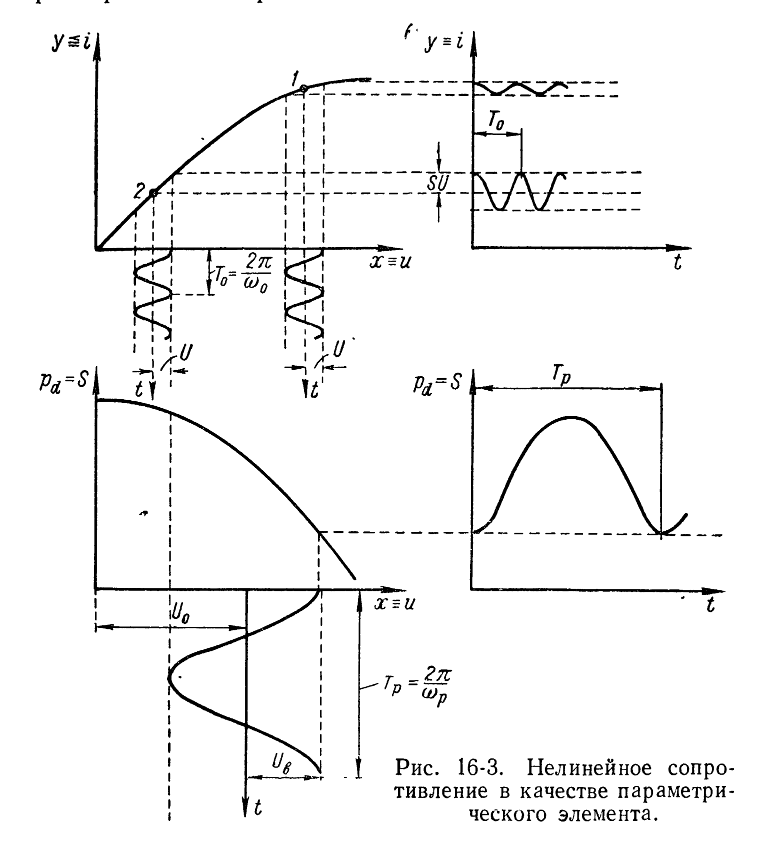


Рис. 16-3. Нелинейное сопротивление в качестве параметрического элемента.

пряжению на сопротивлении u, а отклик y — току через это сопротивление i.

На том же рисунке построена дифференциальная характеристика элемента

$$\frac{dy}{dx} = p_d = S = f(x),$$

т. е. зависимость крутизны характеристики S (дифференциального параметра p_d) от воздействия x. Как видно, в качестве примера взят элемент с убывающей крутизной.

Пусть к сопротивлению подведено напряжение

$$u_в = U_0 + U_в \cos \omega_p t,$$

которое назовем варьирующим. Оно состоит из постоянного смещения U_0 и гармонического напряжения с амплитудой $U_в$.

Из построения, выполненного на рис. 16-3, ясно, что крутизна S периодически изменяется во времени с частотой ω_p. Форма кривой $S(t)$ определяется видом дифференциальной характеристики и величинами U_0 и $U_в$, т. е. мгновенное значение крутизны

$$S = f(t, U_0, U_в). \qquad (16\text{-}5)$$

Теперь положим, что на элемент одновременно с варьирующим напряжением воздействует малое напряжение $\Delta x \equiv \Delta u$, которое назовем рабочим. Пусть оно также изменяется по гармоническому закону с частотой ω_0:

$$\Delta u = U \cos \omega_0 t,$$

причем $\omega_0 \gg \omega_p$.

Под действием рабочего напряжения ток i получает приращение Δi и становится равным

$$i + \Delta i = f(u + \Delta u) \approx f(u) + \frac{di}{du} \Delta u.$$

Ограничиваемся двумя членами ряда, так как Δu — величина весьма малая.

Приращение тока, т. е. рабочий ток

$$\Delta i = \frac{di}{du} \Delta u \approx S(t) \Delta u = S(t) U \cos \omega_0 t. \qquad (16\text{-}6)$$

Таким образом, для рабочего напряжения система ведет себя как линейная, но $S = S(t)$ — функция времени; поэтому в результате получаем линейный элемент с переменной крутизной.

На рис. 16-3 произведено построение отклика (тока) для двух положений рабочей точки, т. е. для двух значений мгновенной крутизны $S(t)$. В точке *1* крутизна мала и амплитуда рабочего тока, имеющего гармоническую форму, также мала. В точке *2*, соответствующей другому значению варьирующего напряжения, крутизна, а значит, и амплитуда рабочего тока значительно больше.

Из сказанного должно быть ясно, что *в определенных условиях нелинейную цепь можно рассматривать как линейную, но с переменными во времени параметрами*.

Возможен и такой случай, когда амплитуда рабочего напряжения не настолько мала, чтобы считать рабочие участки *1*, *2* прямолинейными. Тогда при данном значении варьирующего напряжения рабочий ток имеет искаженную форму, т. е. нелинейность цепи существенно сказывается на характере процессов. Если основной интерес представляет первая гармоника рабочего тока I_1, то целесообразно говорить о средней крутизне $S_{ср} = \frac{I_1}{U}$.

Средняя крутизна зависит от исходной крутизны S и от амплитуды рабочего напряжения U, а так как S, в свою очередь, зависит от $U_в$ и U_0, мгновенное значение средней крутизны является функцией всех трех напряжений: U_0, $U_в$ и U, т. е.

$$S_{ср} = f(t, U_0, U_в, U). \qquad (16\text{-}7)$$

Итак, при больших амплитудах рабочего напряжения управляемый нелинейный элемент имеет переменную во времени среднюю крутизну.

Варьирующее и рабочее напряжения не обязательно действуют на одних и тех же зажимах. В некоторых нелинейных элементах варьирующая и рабочая цепи разделены одна относительно другой. Так, например, в многоэлектродных (смесительных) лампах напряжения $u_в$ и Δu подаются на разные («варьирующую» и «сигнальную») сетки. В катушках с ферромагнитным сердечником, играющих роль переменных во времени индуктивностей $L(t)$, варьирующее напряжение подводится к специальной обмотке, электрически не связанной с основной (рабочей) цепью.

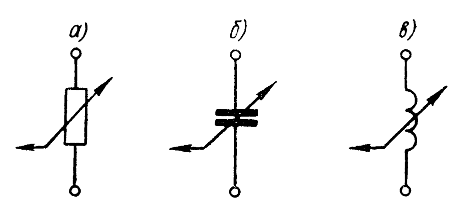


Рис. 16-4. Нелинейные параметрические элементы: *а* — сопротивление; *б* — емкость; *в* — индуктивность.

На рис. 16-4 показаны условные обозначения нелинейных r, C и L, выполняющих функции элементов с переменными параметрами. Цепи, содержащие такие элементы, являются, строго говоря, нелинейными параметрическими и только приближенно в определенных условиях могут считаться линейными.

Процессы, происходящие в параметрических цепях, описываются уравнениями с переменными коэффициентами: в простейших случаях — алгебраическими, а в более сложных — дифференциальными.

16-2. Элементарные параметрические цепи

а) Цепь с параметрическим активным сопротивлением

Рассмотрим цепь, составленную из источника гармонического напряжения

$$u = U \cos(\omega_0 t + \psi)$$

и переменного во времени линейного активного сопротивления (рис. 16-5, *а*).

Пусть проводимость цепи изменяется по закону (рис. 16-5, *б*)

$$g(t) = g_0 (1 + m_g \cos \omega_p t), \qquad (16\text{-}8)$$

где $m_g = \frac{\Delta g_m}{g_0}$ — коэффициент вариации проводимости.

Ток в цепи [см. (16-1)]

$$i = g(t)\, u = g_0 (1 + m_g \cos \omega_p t)\, U \cos(\omega_0 t + \psi)$$

или, иначе,

$$i = g_0 U \cos(\omega_0 t + \psi) + \frac{g_0 m_g U}{2} \cos[(\omega_p - \omega_0) t - \psi] + \\ + \frac{g_0 m_g U}{2} \cos[(\omega_p + \omega_0) t + \psi]. \qquad (16\text{-}9)$$

Отклик цепи на гармоническое воздействие содержит не только колебания частоты воздействия ω_0, но и новые, комбинационные частоты $\omega_p \pm \omega_0$. Несмотря на то, что цепь линейна, в ней аналогично нелинейной цепи происходит органическое преобразование

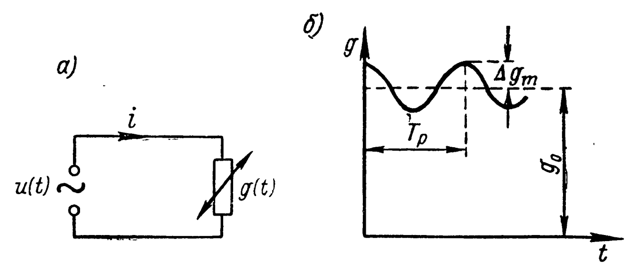


Рис. 16-5. Цепь параметрического сопротивления.

частоты, причем амплитуды колебаний комбинационных частот пропорциональны коэффициенту вариации проводимости.

Если $\omega_0 = \omega_p$, т. е. если воздействующее напряжение и проводимость изменяются синхронно, то

$$i = g_0 U \cos(\omega_0 t + \psi) + \frac{g_0 m_g}{2} U \cos\psi + \\ + \frac{g_0 m_g}{2} U \cos(2\omega_0 t + \psi). \qquad (16\text{-}10)$$

В цепи появляются колебания удвоенной частоты, а также постоянный ток, который может быть назван *током детекторного эффекта*:

$$I_d = \frac{g_0 m_g}{2} U \cos\psi. \qquad (16\text{-}11)$$

Возникновение постоянной слагающей тока иллюстрируется рис. 16-6, *а*, на котором показаны временны́е диаграммы $u(t)$; $g(t)$ и $i(t)$. При $\psi = 0$, т. е. синфазном изменении $u(t)$ и $g(t)$ проводимость цепи возрастает в те же моменты, когда увеличивается мгновенное значение напряжения, и уменьшается вместе с уменьшением u. Естественно, что в результате форма тока в цепи искажается так, что площадь, ограничиваемая положительными значениями тока, превышает площадь, ограничиваемую отрицательными значениями i. Поэтому постоянная слагающая $I_d > 0$.

При $\psi = \pi/2$ (рис. 16-6, *б*) ток имеет также искаженную форму (содержит в своем составе вторую гармонику), но постоянная слагающая $I_d = 0$. Наконец, на рис. 16-6, *в* показан случай $\psi = \pi$, когда постоянная составляющая отрицательна ($I_d < 0$).

Итак, при синхронном изменении параметра исследуемая цепь может играть роль выпрямителя, причем на величине выпрямленного тока существенно сказываются фазовые соотношения между $u(t)$ и $g(t)$.

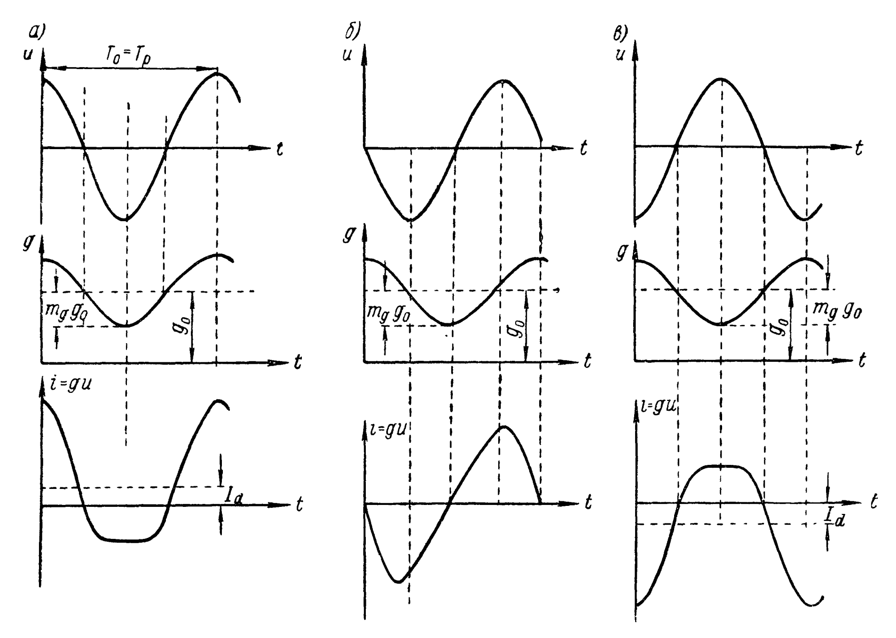


Рис. 16-6. Процессы при синхронном изменении активной проводимости.

Мы рассмотрели простейший случай, когда приложенное напряжение и проводимость цепи изменяются по гармоническому закону. В более общем случае как приложенное напряжение, так и параметр (проводимость) могут быть сложными периодическими функциями времени. Тогда ток в цепи можно представить так:

$$i = g_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} m_{gn} \cos(n\,\omega_p t + \psi_n)\right] \sum_{k=1}^{\infty} U_k \cos(k\omega_0 t + \psi_k). \quad (16\text{-}12)$$

Здесь U_k — амплитуда гармонической составляющей приложенного напряжения, имеющей частоту $k\omega_0$ и начальную фазу ψ_k;

m_{gn} — парциальный коэффициент вариации параметра, соответствующий слагающей функции $g(t)$, изменяющейся с частотой $n\omega_p$ и имеющей начальную фазу ψ_n.

Из (16-12) следует, что в общем случае отклик содержит множество колебаний комбинационных частот вида $n\omega_p \pm k\omega_0$.

Некоторые из слагаемых, удовлетворяющие условию $n\omega_p - k\omega_0 = 0$, дают в сумме детекторный эффект, т. е. выпрямленный ток.

б) Цепь с параметрическим реактивным элементом

Параметрическая емкость. Рассмотрим цепь (рис. 16-7, *а*), содержащую емкостный параметрический элемент $C(t)$ и источник гармонического тока $i(t) = I\cos(\omega_0 t + \psi)$.

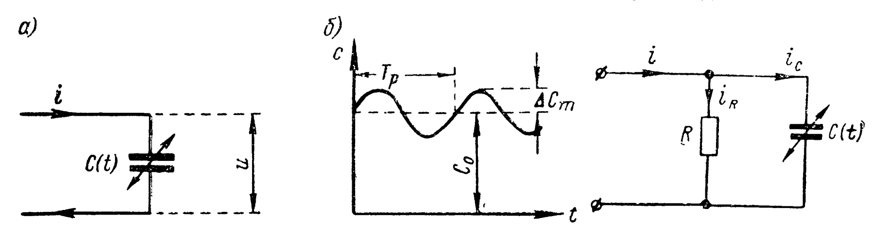


Рис. 16-7. Цепь параметрической емкости.

Рис. 16-8. Емкостная параметрическая цепь с потерями.

Пусть емкость изменяется по закону (рис. 16-7, *б*)

$$C(t) = C_0(1 + m_C \sin\omega_p t), \qquad (16\text{-}13)$$

где $m_C = \frac{\Delta C_m}{C_0}$ — коэффициент вариации емкости.

Тогда заряд

$$q = \int i(t)\,dt = \frac{I}{\omega_0}\sin(\omega_0 t + \psi) + q_0. \qquad (16\text{-}14)$$

Постоянная интегрирования $q_0 = 0$.

Для того чтобы убедиться в этом, необходимо рассмотреть переходный процесс в реальной цепи (рис. 16-8), содержащей сопротивление $R < \infty$ (например, сопротивление утечки конденсатора), а затем произвести предельный переход к $R \to \infty$, перейдя тем самым к идеализированной схеме рис. 16-7, *а*.

Для схемы рис. 16-8

$$i(t) = i_R + i_C = i_R + \frac{dq}{dt}. \qquad (16\text{-}15)$$

Имея в виду, что

$$i_R = \frac{u}{R} = \frac{q}{RC(t)},$$

найдем

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC(t)}q = i(t) = I\cos(\omega t + \psi). \qquad (16\text{-}16)$$

Получено линейное дифференциальное уравнение первого порядка с переменным коэффициентом при q.

Пусть включение цепи происходит в момент $t = 0$ и $q(0) = 0$.

Введя обозначение

$$\frac{1}{RC(t)} = \beta(t),$$

получим решение уравнения в виде [1]

$$q = e^{-\int_0^t \beta(t)\,dt}\left[\int_0^t i(t)\,e^{\int_0^t \beta(t)\,dt}\,dt\right].$$

Для принятого закона изменения емкости (16-14) функция

$$\beta(t) = \frac{1}{RC_0(1 + m_C \sin \omega_p t)},$$

при $m_C \ll 1$

$$\beta(t) \approx \frac{1}{RC_0}(1 - m_C \sin \omega_p t) = \frac{1}{\tau_0}(1 - m_C \sin \omega_p t),$$

где

$$\tau_0 = \frac{1}{RC_0}.$$

Вычислим сначала интеграл

$$\int_0^t \beta(t)\,dt = \frac{t}{\tau_0} - \frac{m_C}{\omega_p \cdot \tau_0}(1 - \cos \omega_p t).$$

Тогда

$$e^{\int_0^t \beta(t)\,dt} = e^{\frac{t}{\tau_0}}\, e^{-\frac{m_C}{\omega_p \tau_0}(1 - \cos \omega_p t)}.$$

Если $m_C \ll 1$, то

$$e^{-\frac{m_C}{\omega_p \tau_0}(1 - \cos \omega_p t)} \approx 1 - \frac{m_C}{\omega_p \tau_0}(1 - \cos \omega_p t)$$

и

$$e^{\int_0^t \beta(t)\,dt} \approx e^{\frac{t}{\tau_0}}\left[1 - \frac{m_C}{\omega_p \tau_0}(1 - \cos \omega_p t)\right].$$

Теперь решение дифференциального уравнения принимает вид

$$q = \frac{1}{e^{\frac{t}{\tau_0}}\left[1 - \frac{m_C}{\omega_p \tau_0}(1 - \cos \omega_p t)\right]} \times$$

$$\times \left\{\int_0^t i(t)\,e^{\frac{t}{\tau_0}}\left[1 - \frac{m_C}{\omega_p \tau_0}(1 - \cos \omega_p t)\right]dt\right\}.$$

В том случае, когда сопротивление R настолько велико, что

$$\frac{m_C}{\omega_p \tau_0} = \frac{m_C}{\omega_p RC_0} \ll 1,$$

[1] В. И. Смирнов. Курс высшей математики, том второй, глава 1, §1-4, 1950.

приближенное выражение для $q(t)$ будет

$$q \approx e^{-\frac{t}{\tau_0}} \int_0^t i(t)\, e^{\frac{t}{\tau_0}}\, dt.$$

Подставив $i(t) = I \cos(\omega_0 t + \psi)$, найдем

$$q \approx \frac{I}{\sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{\tau_0^2}}} \left[\cos(\omega_0 t + \psi - \alpha) - e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\psi - \alpha)\right],$$

где $\alpha = \operatorname{arctg}(\omega\tau_0)$.

Очевидно, первое слагаемое этого выражения соответствует вынужденному, а второе — свободному режиму.

В стационарном состоянии, когда переходный процесс следует считать закончившимся, свободная составляющая равна нулю $\left(\frac{t}{\tau} \to \infty\right)$ и

$$q = \frac{I}{\sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{\tau_0^2}}} \cos(\omega_0 t + \psi - \alpha).$$

При безграничном увеличении R постоянная времени $\tau_0 \to \infty$ и угол $\alpha \to \frac{\pi}{2}$.

Поэтому при $R = \infty$ (рис. 16-7, a) стационарный режим описывается уравнением

$$q = \frac{I}{\omega_0} \sin(\omega_0 t + \psi).$$

Сопоставляя это с (16-5), приходим к выводу, что постоянная интегрирования $q_0 = 0$.

Смысл полученного результата заключается в том, что если емкость предварительно (до воздействия на нее током i) не была заряжена, в стационарном режиме при питании от источника гармонического тока функция $q(t)$ не может содержать постоянной слагающей.

Зная $q(t)$, находим напряжение на емкости

$$u = \frac{q(t)}{C(t)} = \frac{I \sin(\omega_0 t + \psi)}{\omega_0 C_0 (1 + m_C \sin \omega_p t)}$$

или, считая $m_C \ll 1$, получаем

$$u \approx \frac{I}{\omega_0 C_0} (1 - m_C \sin \omega_p t) \sin(\omega_0 t + \psi).$$

Обозначив $\frac{1}{\omega_0 C_0} = x_0$, после простых преобразований, найдем

$$u = I x_0 \sin(\omega_0 t + \psi) - \\ - \frac{x_0 I m_C}{2} \cos[(\omega_p - \omega_0) t - \psi] + \\ + \frac{x_0 I m_C}{2} \cos[(\omega_p + \omega_0) t + \psi]. \qquad (16\text{-}17)$$

Таким образом, при питании параметрической емкости от генератора синусоидального тока напряжение на емкости имеет иска-

женную форму. В его состав входят, кроме составляющей с частотой воздействия ω_0, колебания комбинационных частот $\omega_p \pm \omega_0$. Амплитуды последних при заданном токе определяются глубиной вариации параметра и емкостным сопротивлением x_0, которое представляет емкость C_0 для частоты ω_0.

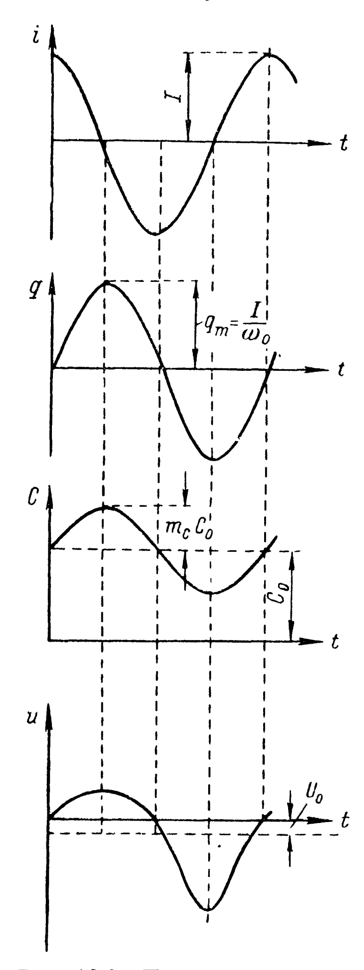


Рис. 16-9. Процессы при синхронном изменении емкости.

При синхронном изменении параметра ($\omega_p = \omega_0$) может возникнуть постоянная слагающая напряжения на емкости

$$U_0 = -\frac{x_0 I m_C}{2} \cos\psi. \quad (16\text{-}18)$$

Особенно большого значения U_0 достигает при $\psi = 0$. Для этого случая на рис. 16-9 изображены временные диаграммы $i(t)$, $q(t) = \int i\,dt$, $C(t)$, а также напряжения на емкости $u(t) = \frac{q(t)}{C(t)}$.

Заряд и емкость при $\psi = 0$ изменяются синфазно. При положительном полупериоде изменения q емкость возрастает; поэтому напряжение растет медленнее, чем заряд. В моменты, когда заряд отрицателен, его возрастанию сопутствует уменьшение емкости. В результате площадь, ограниченная отрицательными ординатами u, оказывается больше, чем «положительная» площадь; постоянная слагающая $U_0 < 0$. При других значениях начальной фазы ψ постоянная составляющая соответственно меняется: в частности, если $\psi = \frac{\pi}{2}$, то $U_0 = 0$, а при $\psi = \pi$ величина $U_0 > 0$.

Положим теперь, что емкость $C(t)$, изменяющаяся по тому же закону [см. (16-13)], питается гармоническим напряжением (от генератора э. д. с.)

$$u = U\cos(\omega_0 t + \psi).$$

Тогда

$$i = \frac{d}{dt}[uC(t)] = u\frac{dC(t)}{dt} + C(t)\frac{du}{dt} = U\cos(\omega_0 t +$$
$$+ \psi)\, m_C \omega_p C_0 \cos\omega_p t - C_0(1 + m_C \sin\omega_p t)\, U\omega_0 \sin(\omega_0 t + \psi);$$

после несложных преобразований, получим

$$i = -\omega_0 C_0 U \sin(\omega_0 t + \psi) + \frac{m_C}{2}(\omega_p - \omega_0) C_0 \cos[(\omega_p - \omega_0) t - \psi] + \\ + \frac{m_C}{2}(\omega_p + \omega_0) C_0 \cos[(\omega_p + \omega_0) t + \psi]. \quad (16\text{-}19)$$

Если проводимость емкости C_0 для частоты ω_0 обозначить $b_0 = \omega_0 C_0$, а емкостные проводимости этой же емкости для частот $\omega_p - \omega_0$ и $\omega_p + \omega_0$ через

$$b_- = (\omega_p - \omega_0) C_0$$

и

$$b_+ = (\omega_p + \omega_0) C_0,$$

то для тока окончательно найдем

$$i = -b_0 U \sin(\omega_0 t + \psi) + \frac{m_C}{2} b_- U \cos[(\omega_p - \omega_0)t - \psi] + \\ + \frac{m_C}{2} b_+ U \cos[(\omega_p + \omega_0)t + \psi]. \quad (16\text{-}20)$$

Отсюда следует, что при питании параметрической емкости от генератора синусоидального напряжения ток через емкость имеет искаженную форму. В его состав, кроме составляющей частоты ω_0 входят колебания комбинационных частот $\omega_p \pm \omega_0$. Их амплитуды при заданной амплитуде U пропорциональны коэффициенту вариации m_C и проводимости исходной емкости C_0 соответственно для разностной и суммарной частот.

В рассматриваемом случае (при питании емкостной параметрической цепи от генератора э. д. с.) постоянной слагающей тока принципиально быть не может. Действительно, при синхронном изменении параметра ($\omega_p = \omega_0$) функция $q(t) = C(t)\, u(t)$ представляет собой произведение двух гармонических функций одинаковой частоты. Ток же равен производной $dq(t)/dt$. Но производная произведения двух гармонических функций не имеет постоянной слагающей. Стало быть, и ток не может содержать постоянной составляющей.

Этот же вывод следует из (16-20). При $\omega_p = \omega_0$ проводимость $b_- = (\omega_p - \omega_0)C = 0$; значит, составляющая тока частоты $\omega = 0$ равна нулю.

Параметрическая индуктивность. Обратимся к элементарной цепи, содержащей индуктивный параметрический элемент (рис. 16-10, *а*).

При заданном токе напряжение на индуктивности

$$u = \frac{d}{dt}[L(t)\, i] = L(t)\frac{di}{dt} + i\frac{dL(t)}{dt}. \quad (16\text{-}21)$$

Если индуктивность питается от источника напряжения, полный магнитный поток

$$\Phi = \int u\, dt$$

и ток

$$i = \frac{\Phi}{L(t)} = \frac{1}{L(t)}\int u\, dt. \quad (16\text{-}22)$$

Пусть (рис. 16-10, *б*)

$$L(t) = L_0 (1 + m_L \sin \omega_p t). \qquad (16\text{-}23)$$

Тогда при питании цепи гармоническим напряжением

$$u = U \cos (\omega_0 t + \psi)$$

магнитный поток

$$\Phi = \frac{U}{\omega_0} \sin (\omega_0 t + \psi). \qquad (16\text{-}24)$$

Здесь произвольная постоянная интегрирования принята равной нулю. Если первоначально катушка индуктивности не была намагничена, то в стационарном режиме при воздействии гармоническим напряжением магнитный поток не может содержать постоянную слагающую. Для того чтобы убедиться в справедливости такого заключения, следует аналогично тому, как это сделано

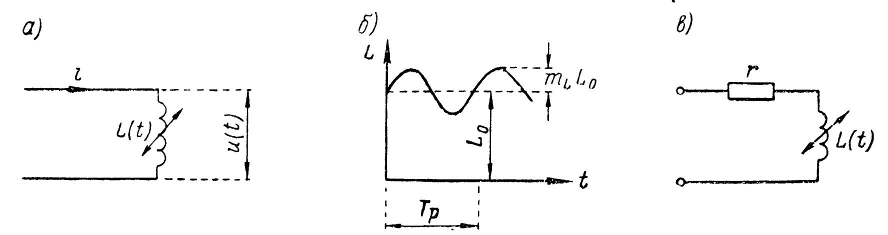


Рис. 16-10. Цепь параметрической индуктивности.

выше в отношении емкостной цепи, рассмотреть переходный процесс в реальной цепи (рис. 16-10, *в*), содержащей сопротивление потерь r, а затем устремить r к нулю, произведя тем самым переход к схеме рис. 16-10, *а*.

Согласно (16-22) ток через индуктивность

$$i = \frac{U}{x_0} \sin (\omega_0 t + \psi) - \frac{m_L}{2} \cdot \frac{U}{x_0} \cos [(\omega_p - \omega_0) t - \psi] +$$

$$+ \frac{m_L}{2} \cdot \frac{U}{x_0} \cos [(\omega_p + \omega_0) t + \psi], \qquad (16\text{-}25)$$

где $x_0 = \omega_0 L_0$.

Ток может содержать постоянную слагающую, если $\omega_p = \omega_0$; тогда

$$I_0 = -\frac{m_L}{2} \cdot \frac{U}{x_0} \cos \psi. \qquad (16\text{-}26)$$

Если питание происходит от источника гармонического тока

$$i = I \cos (\omega_0 t + \psi),$$

то в соответствии с (16-21) напряжение на индуктивности

$$u = -x_0 I \sin (\omega_0 t + \psi) + \frac{m_L}{2} x_- I \cos [(\omega_p - \omega_0) t - \psi] +$$

$$+ \frac{m_L}{2} x_+ I \cos [(\omega_p + \omega_0) t + \psi], \qquad (16\text{-}27)$$

где

$$x_- = (\omega_p - \omega_0) L_0,$$

а

$$x_+ = (\omega_p + \omega_0) L_0.$$

Постоянной слагающей напряжение на индуктивности (при питании гармоническим током) содержать не может.

16-3. Энергетические процессы в цепи с параметрическим реактивным элементом

а). Емкостная цепь

Пусть емкости C (рис. 16-11, *а*) сообщен заряд q и, стало быть, в ее электрическом поле запасена энергия

$$W_C = \frac{q^2}{2C}.$$

Считая заряд q неизменным, найдем производную

$$\frac{dW_C}{dC} = -\frac{q^2}{2C^2} = -\frac{W_C}{C},$$

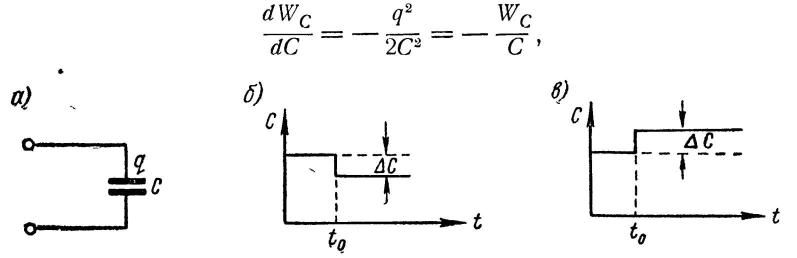


Рис. 16-11. Энергетика параметрической емкости при $q = \text{const}$.

откуда

$$\frac{dW_C}{W_C} = -\frac{dC}{C}. \qquad (16\text{-}28)$$

Это равенство приближенно справедливо и для малых конечных приращений ΔW_C и ΔC:

$$\frac{\Delta W_C}{W_C} \approx -\frac{\Delta C}{C}. \qquad (16\text{-}29)$$

Если при заданном заряде в некоторый момент $t = t_0$ происходит изменение емкости на величину ΔC, это влечет за собой изменение запасенной в электрическом поле энергии. С уменьшением емкости $\left(\frac{\Delta C}{C} < 0\right)$ связано, как видно из (16-29), увеличение энергии системы (рис. 16-11, *б*), т. е. для уменьшения емкости (например, путем раздвигания пластин конденсатора) необходимо произвести работу против сил электрического поля. Она идет на повышение энергии системы ($\Delta W_C > 0$). Если же $\frac{\Delta C}{C} > 0$ (рис. 16-11, *в*), то работу совершают силы электрического поля и энергия системы уменьшается ($\Delta W_C < 0$).

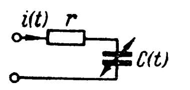
Положим теперь, что емкостный параметрический элемент включен последовательно с сопротивлением r в цепь (рис. 16-12), питаемую генератором гармонического тока

$$i = I\cos(\omega_0 t + \psi).$$

В этом случае заряд является функцией времени:

$$q = \int I \cos(\omega_0 t + \psi)\, dt = \frac{I}{\omega_0} \sin(\omega_0 t + \psi).$$

Пусть емкость $C(t)$ изменяется скачкообразно, так что уменьшение ее происходит всякий раз, когда заряд q проходит через свои амплитудные значения, а увеличение — в те моменты, когда $q = 0$. Из рис. 16-12 видно, что для осуществления такого режима необходимо, во-первых, чтобы период изменения емкости $T_p = \frac{1}{f_p}$ был вдвое меньше периода $T_0 = \frac{1}{f_0}$ или, иначе, чтобы $f_p = 2f_0$.



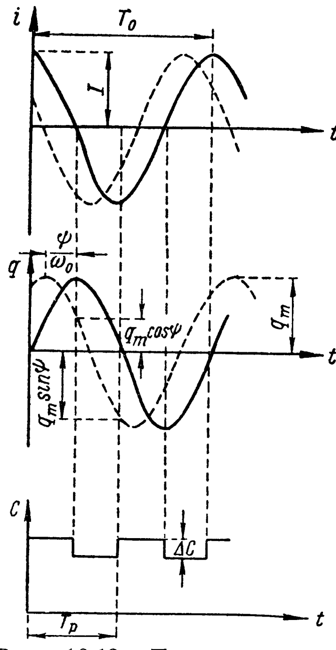


Рис. 16-12. Параметрическая емкость в цепи гармонического тока.

Во-вторых, начальная фаза тока должна иметь совершенно определенную величину. При выбранном законе $C(t)$ (рис. 16-12) необходимо иметь $\psi = 0$.

Уменьшение емкости, происходящее в момент наибольшего значения заряда $q_m = \frac{I}{\omega_0}$, связано с добавлением в систему энергии, которая согласно (16-29)

$$\left| \Delta W_C \right| = W_C \left| \frac{\Delta C}{C} \right|.$$

Увеличение емкости не связано ни с каким изменением энергии, так как оно происходит в тот момент, когда q, а значит, и запасенная энергия, равны нулю.

Так как уменьшение емкости происходит дважды в течение периода T_0, то за один период в систему добавляется энергия

$$W_{CT} = 2 \left| \Delta W_C \right| = 2W_C \left| \frac{\Delta C}{C} \right|. \tag{16-30}$$

Имея в виду, что

$$W_C = \frac{q_m^2}{2C} = \frac{I^2 x_C}{2\omega_0}, \tag{16-31}$$

где $x_C = \frac{1}{\omega_0 C}$, энергию W_{CT} можно выразить так:

$$W_{CT} = \frac{I^2 x_C}{\omega_0} \left| \frac{\Delta C}{C} \right|.$$

Поступающая в систему средняя мощность

$$P_- = \frac{W_{CT}}{T_0} = \frac{W_{CT}}{2\pi}\omega_0 = \frac{1}{2\pi} I^2 x_C \left|\frac{\Delta C}{C}\right| \qquad (16\text{-}32)$$

доставляется в цепь источником, производящим вариацию емкости и называемым **источником накачки**.

Явления, происходящие в системе, удобно трактовать так, как будто в цепь вносится отрицательное сопротивление $r_{вн} = -r_n$. Мощность, отдаваемая этим сопротивлением,

$$P_- = \frac{1}{2} I^2 r_n. \qquad (16\text{-}33)$$

Из сопоставления выражений (16-33) и (16-32) следует, что абсолютная величина вносимого отрицательного сопротивления

$$r_n = \frac{1}{\pi} x_C \left|\frac{\Delta C}{C}\right|. \qquad (16\text{-}34)$$

Воспользовавшись понятием коэффициента вариации емкости, который в нашем случае

$$m = \frac{\frac{\Delta C}{2}}{C - \frac{\Delta C}{2}} \approx \frac{\Delta C}{2C},$$

сможем переписать (16-34) следующим образом:

$$r_n = \frac{2}{\pi} m_C x_C. \qquad (16\text{-}35)$$

В результате полное (эквивалентное) сопротивление

$$r_э = r - r_n = r - \frac{2}{\pi} m_C x_C, \qquad (16\text{-}36)$$

т. е. энергия, теряемая в цепи, частично компенсируется энергией, «накачиваемой» в систему источником, производящим изменение емкости.

Полученные выражения соответствуют наиболее благоприятным для создания отрицательного сопротивления фазовым соотношениям, т. е. когда $\psi = 0$.

Рассмотрим процессы при $\psi > 0$ и при том же законе $C(t)$ (пунктирные кривые на рис. 16-12).

В момент, когда емкость уменьшается, заряд $q = q_m \cos\psi$ и запасенная энергия

$$W_{C1} = \frac{q_m^2 \cos^2\psi}{2C};$$

энергия, добавляемая в систему в связи с уменьшением емкости, будет

$$\left|\Delta W_{C1}\right| = \frac{q_m^2 \cos^2\psi}{2C} \left|\frac{\Delta C}{C}\right|.$$

В тот момент, когда емкость увеличивается, заряд не равен нулю (в отличие от случая $\psi = 0$), а имеет величину $q = -q_m \sin\psi$, т. е. в это время в емкости запасена энергия

$$W_{C2} = \frac{q_m^2 \sin^2\psi}{2C}.$$

Поэтому увеличение емкости связано с расходованием энергии

$$\left|\Delta W_{C2}\right| = \frac{q_m^2 \sin^2\psi}{2C}\left|\frac{\Delta C}{C}\right|.$$

Итак, за время T_p в цепь добавляется энергия

$$\left|\Delta W_{C1}\right| - \left|\Delta W_{C2}\right| = \frac{q_m^2}{2C}(\cos^2\psi - \sin^2\psi)\left|\frac{\Delta C}{C}\right| = W_C \cos 2\psi \left|\frac{\Delta C}{C}\right|,$$

а за время T_0

$$W_{CT} = 2W_C \cos 2\psi \left|\frac{\Delta C}{C}\right|. \quad (16\text{-}37)$$

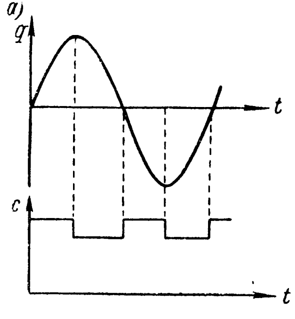
Сравнивая (16-37) с (16-30), видим, что при $\psi \neq 0$ сообщаемая системе энергия меньше, чем при $\psi = 0$. Очевидно, что и в выражении абсолютной величины отрицательного сопротивления [см. (16-35)] также появится множитель $\cos 2\psi$, поскольку r_n пропорционально W_{CT}.

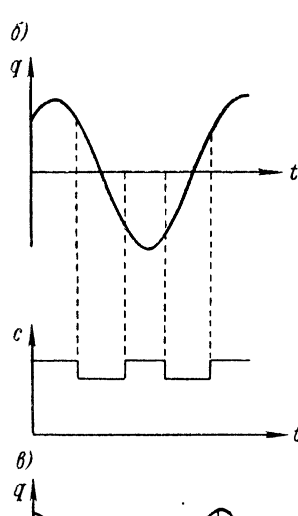
Таким образом, при $\psi \neq 0$

$$r_n' = \frac{2}{\pi} m_C x_C \cos 2\psi. \quad (16\text{-}38)$$

На рис. 16-13 приведены три диаграммы, соответствующие разным фазовым соотношениям в цепи.

Кривые рис. 16-13, *а* относятся к случаю, когда $\psi = 0$. Уменьшение емкости происходит в моменты, когда q максимально, увеличение — в те моменты, когда $q = 0$. Вносимое в цепь сопротивление отрицательно и по абсолютной величине равно $r_n = \frac{2}{\pi} m_C x_C$.





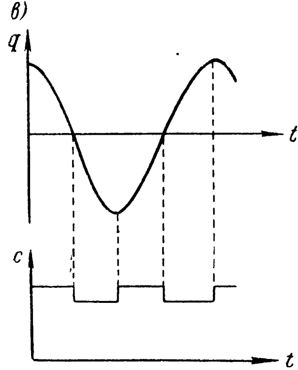


Рис. 16-13. Варианты фазовых соотношений в цепи параметрической емкости.

Если $\psi = 45°$ (рис. 16-13, *б*), уменьшение и увеличение C происходит в те моменты, когда мгновенные значения заряда равны по абсолютной величине. Увеличение энергии системы при уменьшении емкости полностью компенсируется затратами энергии, связанными с возрастанием емкости. В результате вносимое в цепь активное сопротивление равно нулю, как это следует и из (16-38).

Рис. 16-13, *в* соответствует тому случаю, когда $\psi = 90°$. В моменты максимальных значений q емкость не уменьшается, а возрастает. Поэтому никакого добавления энергии в системе не происходит. Энергия в цепи расходуется. Формула (16-38) дает $r_n = -\frac{2}{\pi} m_C x_C$; это, по-видимому, означает, что вносимое сопротивление положительно и численно равно $\frac{2}{\pi} m_C x_C$.

Следует помнить, что все полученные соотношения носят приближенный характер, поскольку они базируются на приближенном равенстве (16-29). Они тем более точны, чем меньше коэффициент вариации $m_C = \frac{\Delta C}{2C}$.

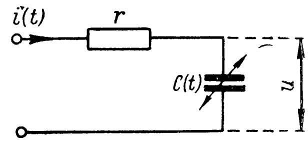


Рис. 16-14. Смешанная параметрическая цепь.

В приведенном выше анализе предполагалось, что емкость варьируется во времени по скачкообразному (прямоугольному) закону. По-видимому, если ставится цель получения в цепи отрицательного сопротивления, то необязательно изменять емкость скачкообразно; она может изменяться и по иному закону. Желательно только, чтобы емкость уменьшалась в те моменты, когда $|q|$ максимально, т. е.

$$\left[\frac{dC}{dt}\right]_{\frac{dq}{dt}=0} < 0. \qquad (16\text{-}39)$$

На практике часто используется изменение емкости по гармоническому закону:

$$C(t) = C_0\left[1 + m_C \sin(\omega_p t + \psi_p)\right]. \qquad (16\text{-}40)$$

Здесь в отличие от (16-13) учтена начальная фаза ψ_p параметра. При питании цепи от источника тока

$$i = I\cos(\omega_0 t + \psi)$$

напряжение на емкости

$$u = Ix_0 \sin(\omega_0 t + \psi) - \frac{Ix_0 m_C}{2}\cos\left[(\omega_p - \omega_0)t + \psi_p - \psi\right] + \frac{Ix_0 m_C}{2}\cos\left[(\omega_p + \omega_0)t + \psi_p + \psi\right]. \qquad (16\text{-}41)$$

Рассмотрим энергетические соотношения в цепи рис. 16-14, полагая, что частота изменения параметра точно в два раза превосходит частоту питающего тока ($\omega_p = 2\omega_0$).

Такой режим работы может быть условно назван **режимом синхронной накачки**.

На рис. 16-15 приведены временные диаграммы $i(t)$ и $C(t)$, иллюстрирующие этот режим.

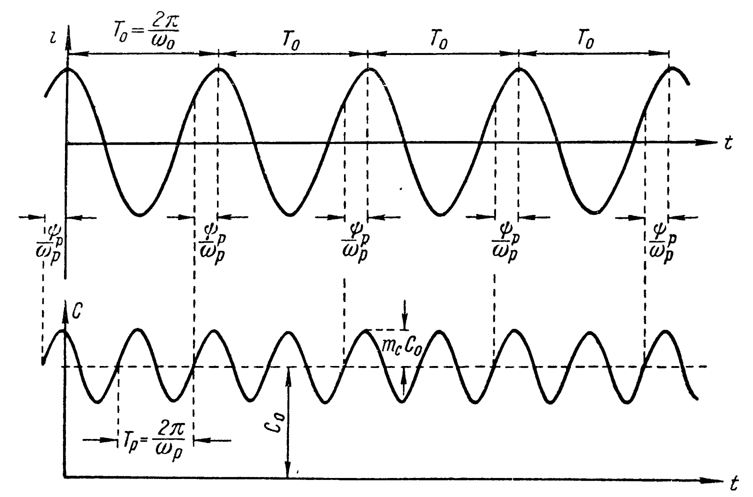


Рис. 16-15. Режим синхронной накачки.

Рассчитаем активную (среднюю за период $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$) мощность, расходуемую в цепи,

$$P = \frac{1}{2} I^2 r + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} ui\, dt.$$

Напряжение на емкости u при $\omega_p = 2\omega_0$ на основании (16-41) будет

$$u = Ix_0 \sin(\omega_0 t + \psi) - \frac{I x_0 m_C}{2} \cos(\omega_0 t + \psi_p - \psi) + \frac{I x_0 m_C}{2} \cos(3\omega_0 t + \psi_p + \psi). \quad (16\text{-}42)$$

Поэтому, имея в виду, что $i = I\cos(\omega_0 t + \psi)$, получим

$$P = \frac{1}{2} I^2 r + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} I^2 x_0 \cos(\omega_0 t + \psi) \sin(\omega_0 t + \psi)\, dt - \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{x_0 I^2 m_C}{2} \cos(\omega_0 t + \psi) \cos(\omega_0 t + \psi_p - \psi) + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{x_0 I^2 m_C}{2} \cos(\omega_0 t + \psi) \cos(3\omega_0 t + \psi_p + \psi)\, dt. \quad (16\text{-}43)$$

Из временны́х диаграмм рис. 16-15 видно, что в рассматриваемом случае ($\omega_p = 2\omega_0$) к началу любого из периодов T_0 начальная фаза изменения параметра ψ_p остается одной и той же (на рис. 16-15 принято $\psi = 0$). Поэтому совершенно безразлично, для какого из интервалов T_0 производить расчет средней мощности. Иначе говоря, при этом расчете величину ψ_p (а также и ψ) следует считать постоянной, и рассчитанная таким путем мощность будет средней не только за время T_0, но и за произвольный промежуток времени.

Первый и третий интегралы выражения (16-43) равны нулю. Поэтому

$$P = \frac{1}{2} I^2 r - \frac{1}{T_0} \frac{m_C I^2 x_0}{2} \int_0^{T_0} \cos(\omega_0 t + \psi) \cos(\omega_0 t + \psi_p - \psi)\, dt.$$

Представив подынтегральное выражение в виде $\frac{1}{2}\left[\cos(\psi_p - 2\psi) + \cos(2\omega_0 t + \psi_p)\right]$, найдем, что

$$P = \frac{1}{2} I^2 r - \frac{m_C x_0}{2} \frac{I^2}{2} \cos(\psi_p - 2\psi) = \frac{1}{2} I^2 \left[r - \frac{m_C x_0}{2} \cos(\psi_p - 2\psi)\right].$$

Этот результат свидетельствует о том, что, кроме сопротивления r, необходимо учитывать некоторое вносимое сопротивление

$$r_{вн} = -\frac{m_C x_0}{2} \cos(\psi_p - 2\psi).$$

Введем обозначение

$$\alpha = \psi_p - 2\psi \qquad (16\text{-}44)$$

и назовем угол α **начальным фазовым сдвигом**. Тогда

$$r_{вн} = -\frac{m_C x_0}{2} \cos\alpha.$$

Абсолютная величина вносимого отрицательного сопротивления

$$r'_n = \frac{m_C x_0}{2} \cos\alpha. \qquad (16\text{-}45)$$

Если же полагать $\psi_p = 0$, то

$$r'_n = \frac{m_C x_0}{2} \cos 2\psi. \qquad (16\text{-}46)$$

Сравнивая полученное выражение с формулой (16-38), видим, что они отличаются только постоянным коэффициентом. При равных

m_C отрицательное сопротивление в случае прямоугольного закона изменения емкости в $\frac{4}{\pi} \approx 1{,}27$ раза больше, чем при синусоидальном ее изменении.

Рассмотрим случай асинхронной накачки, когда частота изменения параметра несколько отличается от удвоенной частоты источника, так что

$$\omega_p = 2\omega_0 + \Omega, \tag{16-47}$$

где $|\Omega| \ll 2\omega_0$.

На рис. 16-16 приведены временные диаграммы $i\,(t)$ и $C\,(t)$ для режима асинхронной накачки. Из графика видно, что в отличие от случая синхронной

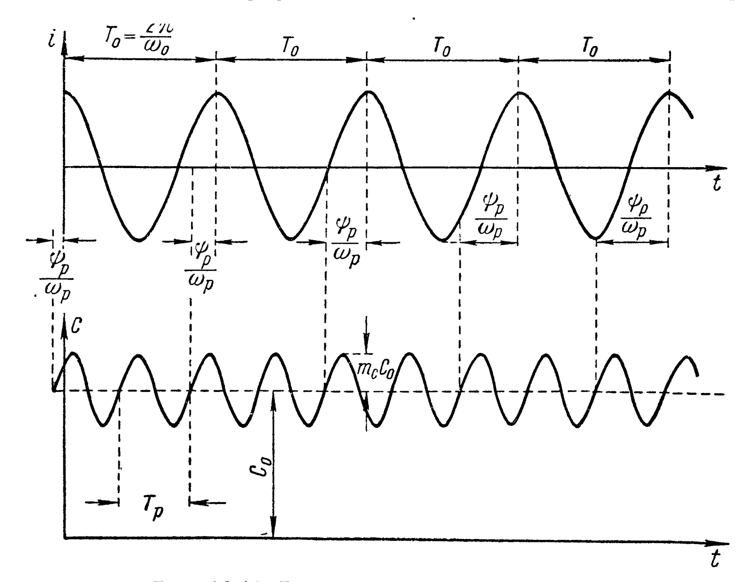


Рис. 16-16. Режим асинхронной накачки.

накачки начальный фазовый сдвиг не остается постоянным. По прошествии каждого из интервалов длительностью T_0 величина угла ψ_p несколько «набегает» и становится иной, чем в предыдущем периоде, увеличиваясь или уменьшаясь в зависимости от знака разности $\omega_p - 2\omega_0 = \Omega$. На рисунке принято $\omega_p > 2\omega_0$; поэтому угол ψ_p постепенно увеличивается.

В результате средняя за период T_0 мощность получается различной в зависимости от того; для какого из интервалов T_0 (т. е. для какого значения $\alpha = \psi_p - 2\psi$) она определена.

Рассчитаем среднюю мощность P для одного из периодов, считая (для этого периода) $\psi_p = \text{const}$.

Подставив (16-47) в (16-41), получим

$$u = Ix_0 \sin(\omega_0 t + \psi) - \frac{Ix_0 m_C}{2} \cos\left[(\omega_0 + \Omega)t + \psi_p - \psi\right] + \\ + \frac{Ix_0 m_C}{2} \cos\left[(3\omega_0 + \Omega)t + \psi_p + \psi\right],$$

активная мощность

$$P = \frac{1}{T_0} I^2 x_0 \int_0^{T_0} \cos(\omega_0 t + \psi) \sin(\omega_0 t + \psi)\, dt - \frac{1}{T_0} I^2 \frac{x_0 m_C}{2} \int_0^{T_0} \cos(\omega_0 t + \psi) \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \psi_p - \psi]\, dt + \frac{1}{T_0} \frac{I^2 x_0 m_C}{2} \int_0^{T_0} \cos(\omega_0 t + \psi) \cos[(3\omega_0 + \Omega)t + \psi_p + \psi]\, dt + \frac{1}{2} I^2 r.$$

Первое слагаемое этого выражения равно нулю. Так как $\Omega \ll 3\omega_0$, и третьим слагаемым можно пренебречь. Для расчета второго из интегралов надо учесть, что подынтегральное выражение равно

$$\frac{1}{2}\cos(\Omega t + \alpha) + \frac{1}{2}\cos[(2\omega_0 + \Omega)t + \psi_p].$$

Поэтому

$$P \approx -\frac{1}{T_0} \cdot \frac{I^2 x_0 m_C}{4} \left\{ \int_0^{T_0} \cos(\Omega t + \alpha)\, dt + \int_0^{T_0} \cos[(2\omega_0 t + \Omega)t + \psi_p]\, dt \right\} + \frac{1}{2} I^2 r.$$

Так как

$$\Omega \ll 2\omega_0, \text{ то}$$

$$P \approx -\frac{1}{T_0} \cdot \frac{I^2 x_0 m_C}{4} \int_0^{T_0} \cos(\Omega t + \alpha)\, dt + \frac{1}{2} I^2 r.$$

После несложных преобразований найдем

$$P = \frac{1}{2} I^2 \left[r - \frac{m_C x_0}{2} \cdot \frac{\sin \pi \frac{\Omega}{\omega_0}}{\pi \frac{\Omega}{\omega_0}} \cos\left(\pi \frac{\Omega}{\omega_0} + \alpha\right) \right],$$

откуда следует, что в режиме асинхронной накачки абсолютная величина вносимого отрицательного сопротивления, рассчитанная для одного из интервалов T_0, составляет

$$r'_{n\Omega} = \frac{m_C x_0}{2} \cdot \frac{\sin \pi \frac{\Omega}{\omega_0}}{\pi \frac{\Omega}{\omega_0}} \cos\left(\pi \frac{\Omega}{\omega_0} + \alpha\right). \tag{16-48}$$

Наибольшего значения

$$r_{n\Omega} = \frac{m_C x_0}{2} \cdot \frac{\sin \pi \frac{\Omega}{\omega_0}}{\pi \frac{\Omega}{\omega_0}} \tag{16-49}$$

отрицательное сопротивление достигает при фазовом сдвиге

$$\alpha = -\pi \frac{\Omega}{\omega_0}.$$

Если же $\omega_p = 2\omega_0$ (синхронная накачка), то на основании (16-49) максимальное отрицательное сопротивление

$$r_n = \frac{m_C x_0}{2}. \qquad (16\text{-}50)$$

Из сопоставления (16-50) и (16-49) следует, что внесение отрицательного сопротивления в цепь возможно не только при $\omega_p = 2\omega_0$, но и тогда, когда ω_p несколько отличается от $2\omega_0$. Однако в последнем случае при одинаково благоприятных условиях вносимое отрицательное сопротивление будет меньшим. Отношение наибольших отрицательных сопротивлений

$$\frac{r_{n\Omega}}{r_n} = \frac{\sin \pi \frac{\Omega}{\omega_0}}{\pi \frac{\Omega}{\omega_0}}.$$

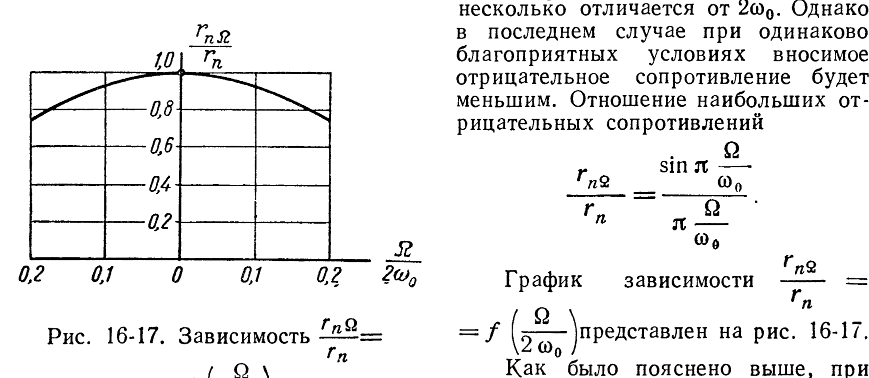


Рис. 16-17. Зависимость $\frac{r_{n\Omega}}{r_n} = f\left(\frac{\Omega}{2\omega_0}\right)$.

График зависимости $\frac{r_{n\Omega}}{r_n} = f\left(\frac{\Omega}{2\omega_0}\right)$ представлен на рис. 16-17.

Как было пояснено выше, при асинхронной накачке начальный фазовый сдвиг с течением времени претерпевает изменения.

Если в начальный момент угол $\psi_p = \psi_0$ и, значит, $\alpha = \alpha_0 = \psi_0 - 2\psi$, то по истечении одного периода T_0 угол ψ_p уже становится равным

$$\psi_p(T_0) = \psi_0 + \omega_p T_0 = \psi_0 + 2\omega_0 T_0 + \Omega T_0$$

или

$$\psi_p(T_0) = \psi_0 + 4\pi + \Omega T_0,$$

а по прошествии n периодов

$$\psi_p(n T_0) = \psi_0 + 4\pi n + \Omega n T_0.$$

Отбрасывая $4\pi n$ и считая $nT_0 = t$, получим, что начальный фазовый сдвиг α изменяется пропорционально времени:

$$\alpha(t) = \psi_p(t) - 2\psi = \alpha_0 + \Omega t. \qquad (16\text{-}51)$$

Стало быть, как это видно из (16-48), величина и знак вносимого сопротивления периодически изменяются с частотой Ω. В те моменты, когда

$$\cos\left[\pi \frac{\Omega}{\omega_0} + \alpha(t)\right] > 0,$$

вносимое сопротивление отрицательно и источник накачки отдает энергию в цепь; в другие моменты, когда

$$\cos\left[\pi \frac{\Omega}{\omega_0} + \alpha(t)\right] < 0,$$

в цепь вносится положительное сопротивление. Источник накачки в эти моменты поглощает энергию.

При этом наибольшее абсолютное значение вносимого сопротивления в том и другом случае равно

$$\frac{m_C x_0}{2} \cdot \frac{\sin \pi \frac{\Omega}{\omega_0}}{\pi \frac{\Omega}{\omega_0}},$$

т. е. зависит от отношения Ω/ω_0, характеризующего степень отклонения режима от случая синхронной накачки.

Из сказанного должно быть ясно, что в среднем за большой промежуток времени (значительно превышающий T_0) в режиме асинхронной накачки энергетический выигрыш отсутствует. Вся энергия, поступающая за это время в цепь, возвращается обратно источнику накачки.

Надо, однако, иметь в виду, что этот вывод справедлив лишь в том случае, если, как мы предполагали, цепь питается синусоидальным током.

б) Индуктивная цепь

В индуктивной параметрической цепи (см. рис. 16-10) энергетические соотношения аналогичны тем, которые найдены выше для емкостной цепи.

При заданном магнитном потоке энергия, запасенная в магнитном поле индуктивности,

$$W_L = \frac{\Phi^2}{2L}.$$

Изменение индуктивности влечет за собой изменение запасенной энергии

$$\frac{\Delta W_L}{W_L} \approx -\frac{\Delta L}{L}. \qquad (16\text{-}52)$$

Энергия системы возрастает, если индуктивность уменьшается.

Очевидно, что и в данном случае при соблюдении определенных условий в эквивалентной схеме цепи, содержащей параметрическую индуктивность, возможно появление отрицательного активного сопротивления.

Если индуктивный параметрический элемент питается гармоническим напряжением

$$u = U\cos(\omega_0 t + \psi),$$

а индуктивность изменяется с частотой $\omega_p = 2\omega_0$ по гармоническому закону [см. (16-23)], то эквивалентное активное сопротивление цепи выражается аналогично (16-46), а именно

$$r'_n = \frac{m_L x_0}{2}\cos 2\psi, \qquad (16\text{-}53)$$

где $x_0 = \omega_0 L_0$.

Наибольшего значения r_n достигает при условии $\psi = 0$. Это соответствует режиму, при котором индуктивность уменьшается в те моменты времени, когда магнитный поток достигает наибольших значений:

$$\left[\frac{dL}{dt}\right]_{\frac{d\Phi}{dt}=0} < 0. \qquad (16\text{-}54)$$

16-4. Модуляция в параметрических цепях

а) Амплитудная модуляция

Процесс модуляции амплитуды высокочастотных колебаний связан с органическим преобразованием частотных спектров. Обычно для осуществления АМ используется нелинейный метод (см. § 14-8).

Теория элементарных параметрических цепей, изложенная в предыдущих параграфах, приводит к заключению, что амплитудную модуляцию можно получить и в линейной цепи с переменными параметрами.

Представим себе простейшую параметрическую цепь (рис. 16-18, *а*), в которой проводимость изменяется с частотой Ω по гармоническому закону [см. (16-8)]. В рассматриваемом случае $\omega_p = \Omega$ и

$$g(\Omega t) = g_0 (1 + m_g \cos \Omega t).$$

Пусть цепь питается от источника напряжения радиочастоты

$$u = U_{н} \cos(\omega_{н} t + \psi).$$

Ток, протекающий в этой цепи,

$$i = gu = U_{н} g_0 (1 + m_g \cos \Omega t) \cos(\omega_{н} t + \psi). \quad (16\text{-}55)$$

Нетрудно видеть, что ток i представляет собой колебание, модулированное по амплитуде косинусоидальным сигналом частоты Ω, при амплитуде тока несущей частоты $I_{н} = g_0 U_{н}$.

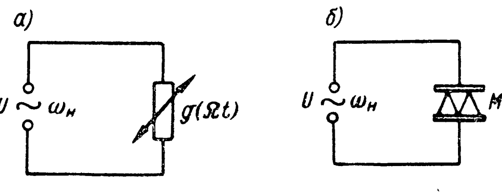


Рис. 16-18. Схема цепи с переменной проводимостью (*а*); схема включения микрофона (*б*).

Коэффициент модуляции этого колебания равен коэффициенту вариации проводимости, т. е. $m = m_g$.

Итак, для получения АМ колебания необходимо располагать элементом, параметр которого изменяется во времени по закону управляющего сигнала. Это может быть, например, микрофон (рис. 16-18, *б*), заключающий в себе угольный порошок, проводимость которого изменяется в соответствии с производимым на него звуковым давлением.

Если закон управляющего сигнала отличается от гармонического, ток в цепи

$$i = g_0 U_{н} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} m_{gk} \cos(k\Omega t + \psi_k) \right] \cos(\omega_{н} t + \psi). \quad (16\text{-}56)$$

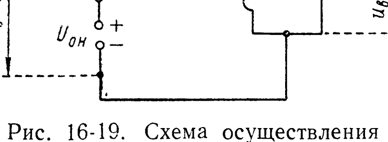


Рис. 16-19. Схема осуществления модуляции.

Создание безынерционных параметрических элементов, непосредственно управляемых источником сигналов, затруднительно (в частности, угольный микрофон удовлетворительно работает только при ничтожно малых токах). Поэтому модуляторные устройства строятся, как правило, на нелинейных управляемых элементах, т. е. в них используется нелинейный метод осуществления АМ.

В связи с этим можно отметить, что в определенных условиях нелинейная цепь, предназначенная для АМ, может трактоваться как линейная с переменными параметрами. Чтобы пояснить это, вернемся к схеме модуляции, изученной в § 14-8 (рис. 14-71) и воспроизведенной еще раз на рис. 16-19.

Считая для простоты, что сопротивление контура многим меньше сопротивления нелинейного элемента, получим, что последний находится под воздействием двух напряжений: $u_1(t)$, имеющего высокую частоту $\omega_н$, и $U_0(t)$, изменяющегося с частотой Ω. Пусть $u_1(t) \ll U_0(t)$. Тогда, как это было показано в § 16-1,

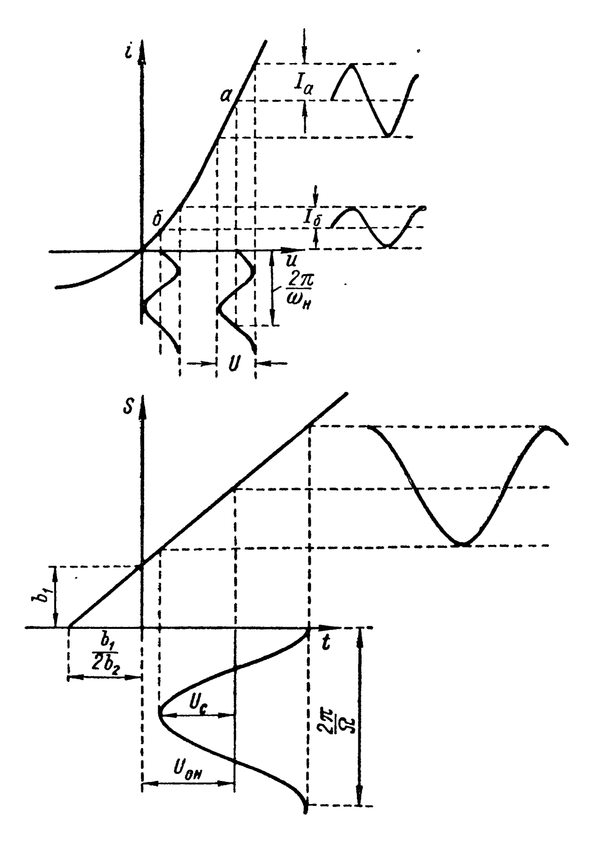


Рис. 16-20. Режим неискаженной модуляции в параметрической цепи.

нелинейный элемент можно рассматривать как линейный, крутизна S которого изменяется во времени с частотой Ω.

В этих условиях согласно (16-6) рабочий ток Δi, изменяющийся с частотой $\omega_н$ может быть представлен как

$$\Delta i = S(t)\, U \cos \omega_н t.$$

Здесь $S(t)\, U = I$ — амплитуда высокочастотного тока.

Так как под воздействием управляющего напряжения $U_0(t)$ крутизна S изменяется во времени, ток оказывается модулированным по амплитуде.

Модуляция будет неискаженной в том случае, если крутизна S пропорциональна варьирующему (управляющему) напряжению $U_0 = u$, т. е. если

$$S = \frac{di}{du} = b_1 + 2b_2u, \qquad (16\text{-}57)$$

где $2b_2$ и b_1 — некоторые постоянные величины.

Отсюда нетрудно определить вид нелинейности, которым должен обладать нелинейный элемент, т. е. найти уравнение его вольт-амперной характеристики $i = f(u)$. Имеем

$$i = \int S\, du = \int (2b_2u + b_1)\, du = b_2u^2 + b_1u + b_0. \qquad (16\text{-}58)$$

Для неискаженной модуляции, таким образом, необходим нелинейный элемент, обладающий квадратичной вольт-амперной характеристикой. Естественно, что этот вывод совпадает с тем, к которому несколько иным путем мы пришли в § 14-8.

На рис. 16-20 показаны диаграммы, иллюстрирующие полученные соотношения. Здесь изображена вольт-амперная характеристика элемента $i = f(u)$, выражаемая полиномом второй степени. Под ней построена дифференциальная характеристика $S = f(u)$, представляющая собой прямую линию. При изменении управляющего напряжения по гармоническому закону (с амплитудой U_c) относительно смещения $U_{0н}$, крутизна также изменяется во времени по закону косинуса. Амплитуда высокочастотного напряжения U по условию очень мала. Поэтому амплитуда рабочего тока I прямо пропорциональна крутизне и изменяется во времени так же, как крутизна S.

На верхней диаграмме отмечены две точки. В одной из них (a) крутизна относительно велика; соответственно велика и амплитуда тока I_a. В другой точке ($б$), соответствующей меньшей величине управляющего напряжения U_0, крутизна S, а стало быть, и ток $I_б$ меньше, нежели в точке a.

б) Частотная модуляция

Один из методов получения ЧМ сигналов заключается в изменении по закону управляющего сигнала частоты колебаний питающего цепь генератора. С этой целью надо соответственно изменять один из параметров (L или C) контура генератора.

Продифференцировав выражение резонансной частоты контура $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, например, по C, получим

$$\frac{d\omega_0}{dC} = -\frac{\omega_0}{2C}$$

и

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx -\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta C}{C}. \qquad (16\text{-}59)$$

Как видно, при малых изменениях частоты можно считать, что она пропорциональна емкости, т. е., желая получить модулированные по частоте колебания, следует изменять емкость контура в соответствии с передаваемым сообщением.

Аналогичный эффект можно получить, если изменять индуктивность. При изменении индуктивности $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx -\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta L}{L}$. Значит, контур должен содержать емкостный (или индуктив-

ный) параметрический элемент. Так как изменение частоты должно происходить с большой скоростью (практически безынерционно), то в качестве управляемой реактивности применяют нелинейную емкость или индуктивность.

Резонансную частоту контура, содержащего нелинейную емкость, можно приближенно определять по обычной формуле $\left(\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right)$, понимая в ней под C либо C_d (при малых сигналах), либо $C_{ср}$ (при больших колебаниях).

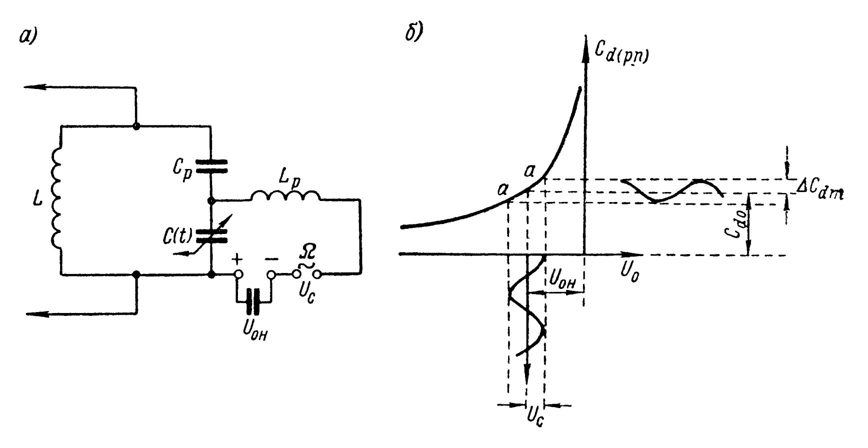


Рис. 16-21. Частотная модуляция в цепи с параметрической емкостью.

На рис. 16-21, *а* изображена одна из возможных схем частотной модуляции. Контур генератора составлен из индуктивности L и нелинейной емкости C. Последняя находится под воздействием двух напряжений: рабочего напряжения радиочастоты $\omega_н$, создаваемого проходящим в контуре током, и варьирующего напряжения, состоящего, в свою очередь, из постоянного смещения $U_{0н}$ и низкочастотного (модулирующего) сигнала $U_с$. Емкость $C_р$ и индуктивность $L_р$ служат для разделения цепей высокой $\omega_н$ и низкой Ω частоты.

Емкость $C_р$ выбирается так, чтобы она представляла ничтожно малое сопротивление для частоты $\omega_н$ и в то же время большое сопротивление для частоты Ω. Вместе с тем емкость $C_р$ предохраняет источник постоянного смещения $U_{0н}$ от замыкания на катушку L. Индуктивность $L_р$ берется такой величины, чтобы ее сопротивление было ничтожно мало для частоты Ω и, наоборот, весьма велико для частоты $\omega_н$.

Если рабочее напряжение на емкости достаточно мало, то, как было показано выше, нелинейный элемент (в данном случае емкость) может трактоваться как линейный параметрический. Величина

дифференциальной емкости, которая определяет резонансную частоту контура, зависит от управляющего напряжения. Например, если в контуре использована емкость *p-n* перехода полупроводникового диода, кривая $C_{d(pn)} = f(U_0)$ имеет вид рис. 16-21, *б*. Принимая рабочий участок *а-а* этой кривой за прямую линию, получим, что изменение варьирующего (модулирующего) напряже-

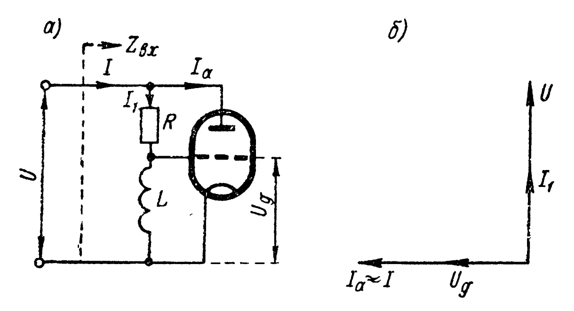


Рис. 16-22. Схема цепи с реактивной лампой (*а*); векторная диаграмма токов и напряжений (*б*).

ния вызывает пропорциональное изменение емкости, а значит, и частоты.

Если варьирующее напряжение меняется по закону

$$U_0 = U_{0н} + U_c \cos \Omega t,$$

то емкость

$$C_d \approx C_{d0}(1 + m_C \cos \Omega t), \qquad (16\text{-}60)$$

где

$$m_C = \frac{\Delta C_{dm}}{C_{d0}}.$$

Соответственно частота

$$\omega_0(t) \approx \omega_{0н} - \Delta\omega_m \cos \Omega t, \qquad (16\text{-}61)$$

где

$$\omega_{0н} = \frac{1}{\sqrt{LC_{d0}}};$$

$\Delta\omega_m \approx \omega_{0н} \dfrac{\Delta C_{dm}}{2C_{d0}} = \dfrac{1}{2} m_C \omega_{0н}$ — девиация частоты.

Помимо реактивных параметрических элементов используются специальные схемы с электронными лампами, кратко называемые с х е м а м и р е а к т и в н ы х л а м п. Рассмотрим одну из этих схем (рис. 16-22, *а*).

Переменное напряжение U подводится к параллельному соединению цепи R, L и анодной цепи триода (на схеме для простоты не показаны источники питания постоянного напряжения). Параметры

цепи выбраны так, что $R \gg \omega L$. Тогда, считая, что лампа работает без сеточных токов, получим, что

$$I_1 = \frac{U}{R + j\omega L} \approx \frac{U}{R}.$$

Кроме того, так как сопротивление R очень велико по сравнению с сопротивлением промежутка анод — катод лампы, то $I_1 \ll I_a$ и ток, подводимый от источника питания,

$$I = I_1 + I_a \approx I_a.$$

Напряжение на индуктивности, являющееся в то же время сеточным напряжением,

$$U_g = j\omega L I_1 \approx j\omega L \frac{U}{R}.$$

При U_g очень малом (режим малых колебаний) допустимо считать лампу по отношению к напряжению U_g линейной системой. Тогда

$$I_a = SU_g = j\omega \frac{LS}{R} U.$$

Наконец, входное сопротивление цепи, с учетом того, что $I \approx I_a$, будет

$$Z_{\text{вх}} = \frac{U}{I} = \frac{1}{j\omega \frac{LS}{R}}. \quad (16\text{-}62)$$

Итак, входное сопротивление имеет чисто реактивный характер. При этом цепь эквивалентна некоторой емкости, которая согласно (16-62)

$$C_э = \frac{LS}{R}. \quad (16\text{-}63)$$

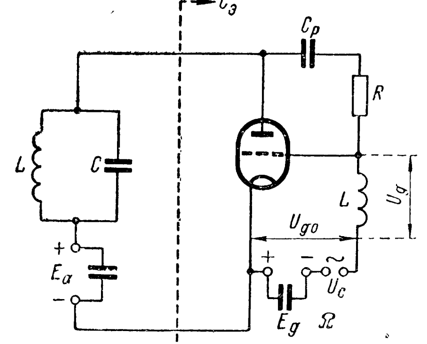


Рис. 16-23. Схема осуществления частотной модуляции с помощью реактивной лампы.

Векторная диаграмма, изображенная на рис. 16-22, *б*, иллюстрирует процессы в цепи.

Полученный описанным путем емкостный элемент может быть сделан параметрическим. Для этого, как видно из (16-63), достаточно изменять во времени по необходимому закону крутизну лампы $S = S(t)$. С этой целью, как мы уже знаем из рассмотрения амплитудной модуляции, на лампу следует воздействовать управляющим (модулирующим) напряжением, по отношению к которому она должна быть нелинейной.

На рис. 16-23 показана полная схема осуществления вариации емкости контура при помощи реактивной лампы.

На сетку лампы воздействуют два напряжения: очень малое рабочее напряжение U_g и модулирующее напряжение U_{g0}. Лампа в этих условиях представляет собой линейную параметрическую систему, и крутизна ее меняется по закону управляющего сигнала.

Емкость колебательного контура $C_к = C + C_э$; второе слагаемое, пропорциональное крутизне, изменяется в соответствии с модулирующим напряжением.

Для неискаженной модуляции желательно, чтобы между S и управляющим напряжением U_{g0} была линейная зависимость. Как это следует из (16-57) и (16-58), в этом смысле идеальной является квадратичная вольт-амперная характеристика лампы. Выбор режима (вида нелинейности) осуществляется подбором исходного смещения E_g. Емкость $C_р$ служит для защиты цепи сетки от постоянного напряжения анодного питания.

Возможны различные модификации схем с реактивными лампами. Так, например, если в схеме рис. 16-22, *а* индуктивность заменить емкостью C, входное сопротивление цепи будет

$$Z_{вх} = j\omega \frac{RC}{S}, \qquad (16\text{-}64)$$

т. е. цепь будет эквивалентна индуктивности

$$L_э = \frac{RC}{S}. \qquad (16\text{-}65)$$

И в этой схеме, изменяя S путем изменения управляющего напряжения на сетке, получаем возможность вариации индуктивности, а значит, и частоты в соответствии с передаваемым сигналом.

16-5. Детектирование в параметрических цепях

Любая практически применяемая система детектирования основана на преобразовании высокочастотного колебания в постоянный ток (напряжение), точнее в изменение постоянного тока, пропорциональное амплитуде сигнала. Чаще всего в детекторах используются нелинейные элементы, как это было показано в § 14-7.

Анализ параметрических цепей (§ 16-2) свидетельствует о том, что и в этих цепях может быть получен эффект детектирования.

Вернемся к цепи, содержащей изменяющееся во времени активное сопротивление (рис. 16-24, *а*). Так как цепь линейна, статическая g и дифференциальная $g_d = S$ проводимости равны между собой: $g = g_d = S$.

Пусть проводимость (крутизна) меняется по закону

$$S(\Omega t) = S_0 (1 + m_S \cos \Omega t), \qquad (16\text{-}66)$$

где $m_S = \frac{\Delta S_m}{S_0}$ — коэффициент вариации крутизны.

Детектирование в параметрической цепи имеет свои специфические особенности. Основная из них состоит в том, что для получения эффекта детектирования необходимо равенство частот $\omega_н$ и $\omega_р$, т. е. синхронность изменения параметра и питающего цепь напряжения. Поэтому детектирование в параметрических цепях называют **синхронным**.

Согласно (16-11) детекторный эффект (постоянная слагающая тока) при $\omega_н = \omega_р$

$$I_d = \frac{m_S S_0}{2} U \cos\psi. \qquad (16\text{-}67)$$

Ток I_d прямо пропорционален амплитуде сигнала U, т. е. синхронное детектирование линейно.

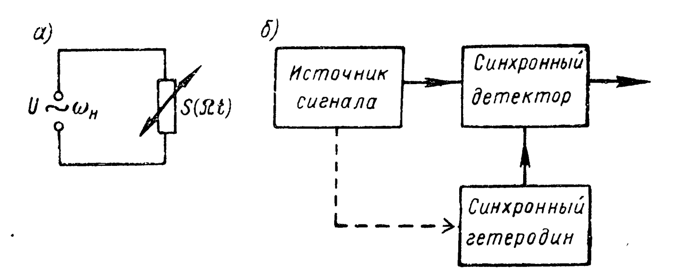


Рис. 16-24. Схема цепи с переменной проводимостью (*а*); блок-схема синхронного детектора (*б*).

В качестве элемента с переменной проводимостью (крутизной) используют электронную лампу, на которую воздействует варьирующее напряжение от специального гетеродина (рис. 16-24, *б*). Для соблюдения равенства $\omega_н = \omega_р$ колебания этого гетеродина синхронизируются источником сигналов, что и показано условно (пунктиром) на рис. 16-24, *б*.

Синхронный детектор обладает свойством **избирательности**. Для того чтобы убедиться в этом, положим, что на детектор (рис. 16-25, *а*) воздействуют два сигнала: полезный — с частотой $\omega_с$ и мешающий — с частотой $\omega_п < \omega_с$.

Полезное колебание промодулировано по амплитуде гармоническим управляющим сигналом, имеющим частоту $\Omega_с$, так что

$$U_с = U_{с0}(1 + m_с \cos\Omega_с t). \qquad (16\text{-}68)$$

Колебания гетеродина синхронизированы полезным сигналом; поэтому частота изменения параметра $\omega_p = \omega_с$. Получаем синхронное детектирование, и ток в цепи детектора на основании (16-10) и при $\psi = 0$ будет

$$i_с = S_0 U_{с0}(1 + m_с \cos\Omega_с t)\left[\cos\omega_с t + \frac{m_S}{2} + \cos 2\omega_с t\right]. \qquad (16\text{-}69)$$

Спектр тока i_c (рис. 16-25, *б*) содержит частоту сигнала Ω_c. Кроме того, в состав спектра входят частоты: ω_c; $\omega_c \pm \Omega_c$; $2\omega_c$; $2\omega_c \pm \pm \Omega_c$, получаемые в результате перемножения $\cos \Omega_c t \cos \omega_c t$ и $\cos \Omega_c t \cos 2\omega_c t$, а также постоянный ток $0{,}5 m_S S_0 U_{c0}$. Все колебания, кроме полезного сигнала Ω_c, могут быть легко отфильтрованы.

Второй (мешающий) сигнал, модулированный частотой $\Omega_п$,

$$u_п = U_п (1 + m_п \cos \Omega_п t)$$

на основании (16-9) создает в цепи ток

$$i_п = S_0 U_{c0} (1 + m_п \cos \Omega_п t) [\cos \omega_п t + \frac{1}{2} m_S \cos (\omega_п - \omega_c) t + \frac{1}{2} m_S \cos (\omega_п + \omega_c) t]. \quad (16\text{-}70)$$

Спектр помехи на выходе детектора (рис. 16-25, *в*), как видно, не содержит низкочастотной составляющей $\Omega_п$. По отношению к ме-

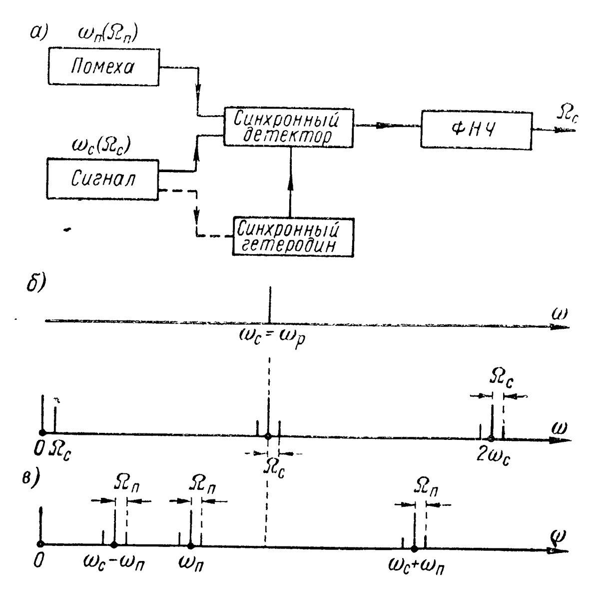


Рис. 16-25. Преобразование спектров при воздействии на синхронный детектор сигнала и помехи.

шающему сигналу цепь ведет себя как преобразователь частоты. В ней образуются комбинационные колебания разностной $\omega_c - \omega_п$ и суммарной $\omega_п + \omega_c$ частот с расположенными поблизости от них боковыми частотами: $(\omega_c - \omega_п) \pm \Omega_п$ и $(\omega_п + \omega_c) \pm \Omega_п$.

Все колебания, входящие в спектр $i_п$ (если только $\omega_c - \omega_п \gg \Omega_c$), могут быть подавлены фильтром нижних частот ФНЧ. В результате, несмотря на наличие помехи, на выходе системы остаются только полезные колебания частоты Ω_c.

Синхронный детектор обладает еще одним ценным свойством. Из (16-67) следует, что детекторный эффект зависит от начальной фазы колебаний, благодаря чему система может быть использована для детектирования колебаний, модулированных по фазе (частоте).

В самом деле, пусть на синхронный детектор, крутизна которого меняется по закону (16-66), воздействует ФМ сигнал

$$u_c = U\cos\left[\omega_c t - \frac{\pi}{2} + \psi(t)\right], \qquad (16\text{-}71)$$

причем $\psi(t) \ll 1$, т. е. индекс модуляции очень мал. Тогда детекторный эффект будет

$$I_d = \frac{m_S S_0}{2} U \sin\left[\psi(t)\right] \approx \frac{m_S S_0}{2} U \psi(t). \qquad (16\text{-}72)$$

Ток I_d прямо пропорционален $\psi(t)$, а стало быть, изменяется по закону передаваемого сигнала.

16-6. Параметрическое усиление и самовозбуждение

а) Параметрическая регенерация

Цепь, содержащая реактивный параметрический элемент, обладает, как мы видели, замечательным свойством. При выполнении определенных условий энергия источника, производящего вариацию параметра, может накачиваться в цепь и тем самым частично или полностью компенсировать потери в ней.

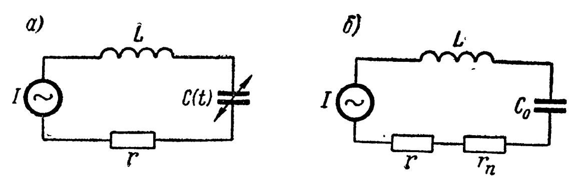


Рис. 16-26. Колебательный контур с параметрической емкостью.

Рассмотрим колебательный контур (рис. 16-26, *а*), составленный из индуктивности L, сопротивления потерь r и емкости

$$C(t) = C_0\left[1 + m_C \sin(\omega_p t + \psi_p)\right].$$

Пусть контур питается гармоническим током

$$i = I\cos(\omega t + \psi),$$

причем частота ω равна резонансной частоте контура, соответствующей исходной емкости C_0, т. е.

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}.$$

Если частота изменения параметра $\omega_p = 2\omega_0$, то для колебаний частоты ω_0 справедлива эквивалентная схема, приведенная на рис. 16-26, *б*.

Вносимое в цепь, благодаря вариации емкости, отрицательное сопротивление имеет абсолютную величину r'_n [см. (16-45)]. В рассматриваемой цепи

$$x_0 = \frac{1}{\omega_0 C_0} = \omega_0 L = \rho,$$

поэтому [см. (16-45)]

$$r'_n = \frac{m_C \rho}{2} \cos\alpha. \qquad (16\text{-}73)$$

Полное (результирующее) активное сопротивление

$$r_э = r - r_n = r\left(1 - \frac{m_C \rho}{2r} \cos\alpha\right).$$

Так как $\frac{\rho}{r} = Q$ — собственная добротность контура, то

$$r_э = r\left(1 - \frac{m_C Q}{2} \cos\alpha\right). \qquad (16\text{-}74)$$

Итак, при условии, что $\cos\alpha > 0$, в контуре имеет место регенерация, т. е. частичное восполнение теряемой в нем энергии. Это равносильно увеличению добротности контура до величины

$$Q_э = \frac{\rho}{r_э} = \frac{Q}{1 - \frac{m_C Q}{2} \cos\alpha}. \qquad (16\text{-}75)$$

При наиболее благоприятных фазовых соотношениях ($\alpha = 0$) эквивалентная добротность достигает максимального значения

$$Q_{э.\,макс} = \frac{Q}{1 - \frac{m_C Q}{2}}. \qquad (16\text{-}76)$$

Если бы изменение емкости происходило по прямоугольному закону, отрицательное сопротивление было бы равно [см. (16-38)],

$$r'_n = \frac{2}{\pi} m_C \rho \cos 2\psi$$

и эквивалентная добротность

$$Q_э = \frac{Q}{1 - \frac{2m_C}{\pi} Q \cos 2\psi}. \qquad (16\text{-}77)$$

Рассмотрим теперь случай, когда вносимое отрицательное сопротивление равно сопротивлению потерь: $r = r_n$.

Физически это означает, что вся энергия, теряемая в контуре, восполняется генератором накачки, производящим вариацию параметра (емкости).

Если же $r_n > r$, то энергия, накачиваемая в контур, превосходит теряемую. Стало быть, даже в отсутствие внешнего источника сколь угодно малый (флюктуационный) ток частоты ω_0 будет возрастать, т. е. произойдет самовозбуждение колебаний.

Если бы система была линейной, нарастание амплитуды колебаний происходило бы безгранично. Ограничение роста амплитуды может быть достигнуто введением в цепь нелинейного элемента с соответствующим видом нелинейности.

Принимая во внимание только те флюктуационные начальные токи, для которых $\alpha = 0$, и имея в виду (16-73), находим, что условие самовозбуждения приводит к неравенству

$$m_C > \frac{2}{Q}. \tag{16-78}$$

Если же вариация емкости происходит по прямоугольному закону, условие самовозбуждения принимает вид

$$m_C > \frac{\pi}{2Q}. \tag{16-79}$$

Таким образом, параметрическая генерация возникает в контуре, если глубина вариации параметра достаточно велика. Коэффициент m_C (при гармоническом изменении емкости) должен быть больше некоторой критической величины

$$m_{C\,\text{кр}} = \frac{2}{Q} = 2d. \tag{16-80}$$

Самовозбуждение возникает тем легче (при меньшем m_C), чем выше собственная добротность контура.

В качестве параметрического элемента колебательного контура обычно используют нелинейную емкость (или индуктивность); вариация ее достигается благодаря воздействию внешнего источника, который выполняет роль источника накачки.

Резонансные явления в параметрических колебательных системах, содержащих нелинейные элементы, впервые были исследованы Л. И. Мандельштамом, Н. Д. Папалекси и их учениками.

б) Дифференциальное уравнение параметрического колебательного контура

Произведенный выше анализ параметрического самовозбуждения носит приближенный характер, так как он базируется на допущении, что ток в цепи имеет гармоническую форму. Более точное решение задачи может быть получено в результате решения дифференциального уравнения, описывающего процессы в контуре. К выводу этого уравнения мы и перейдем.

Пусть емкость контура (рис. 16-27)

$$C(t) = \frac{C_0}{1 + n\sin\omega_p t}. \tag{16-81}$$

Так изменяется, например, емкость плоского конденсатора, если расстояние между его пластинами варьируется по закону

$$d = d_0 + \Delta d_m \sin \omega_p t = d_0 (1 + n \sin \omega_p t),$$

где $n = \frac{\Delta d_m}{d_0}$ — коэффициент вариации расстояния d.

Разложив (16-81) в ряд, получим

$$C(t) = C_0 (1 - n \sin \omega_p t + n^2 \sin^2 \omega_p t - n^3 \sin^3 \omega_p t + \ldots). \quad (16\text{-}82)$$

Если к слагаемым правой части этого выражения применим формулы кратных дуг, убедимся, что в законе вариации параметра присутствуют высшие гармоники: вторая $2\omega_p$, третья $3\omega_p$ и т. д.

Уравнение второго закона Кирхгофа для рассматриваемого контура имеет вид

$$L\frac{di}{dt} + ri + \frac{q}{C(t)} = 0$$

или

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{r}{L}\,\frac{dq}{dt} + \frac{1 + n \sin \omega_p t}{LC_0}\, q = 0.$$

Принимая во внимание, что

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}},$$

$$\frac{r}{L} = \frac{\omega_0}{Q},$$

найдем

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \cdot \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 (1 + n \sin \omega_p t)\, q = 0. \quad (16\text{-}83)$$

Полученное уравнение относится к классу линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и может быть приведено к так называемому уравнению Матьё. Его решениями являются специальные функции, пользуясь которыми можно найти закон изменения заряда q во времени.

Вопрос о самовозбуждении системы сводится к нахождению тех условий, при которых решения уравнения становятся неустойчивыми. Результаты анализа устойчивости решений применительно к нашему случаю могут быть представлены в виде рис. 16-28. По оси абсцисс отложено отношение удвоенной частоты собственных колебаний контура

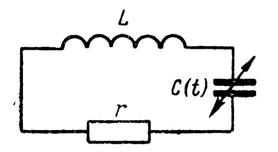


Рис. 16-27. Параметрический колебательный контур.

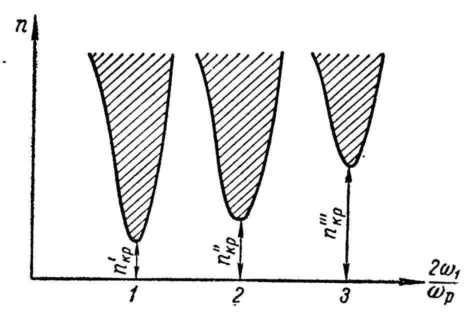


Рис. 16-28. Зависимость $n = f\left(\frac{2\omega_1}{\omega_p}\right)$.

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \approx \omega_0$$

к основной частоте вариации параметра ω_p. По оси ординат отложены значения коэффициента вариации n.

Точки координатной плоскости, лежащие внутри заштрихованной части, соответствуют неустойчивым решениям уравнения. Кривые, отделяющие заштрихованную часть от незаштрихованной, являются геометрическим местом критических значений коэффициента n, при превышении которых система самовозбуждается.

Минимально возможное значение $n_{кр}$ имеет место при $\frac{2\omega_1}{\omega_p} = 1$, т. е. $\omega_p = 2\omega_1$, что соответствует режиму синхронной накачки. При этом, как показывает расчет,

$$n'_{кр} = \frac{2}{Q}.$$

Этот результат совпадает с выражением (16-80), полученным в предположении, что емкость меняется по чисто гармоническому закону.

Из графика следует, что самовозбуждение возможно и при соотношении частот ω_1 и ω_p, отличающемся от оптимального ($\omega_p = 2\omega_1$), т. е. в режиме асинхронной накачки. Только критическое значение n при этом возрастает; для возбуждения колебаний требуется более глубокая вариация параметра. Это обстоятельство легко объясняется тем, что, как было показано в § 16-3, при отходе от режима синхронной накачки вносимое отрицательное сопротивление по своей абсолютной величине уменьшается, и поэтому самовозбуждение затрудняется.

График свидетельствует также о том, что, кроме основной области частот, соответствующей отношению $\frac{2\omega_1}{\omega_p} \approx 1$, параметрическая генерация возможна и при отношениях $\frac{2\omega_1}{\omega_p} = k$, где $k = 2; 3; 4;\ldots$

Такая возможность связана с тем, что в зависимости $C(t)$ [формула (16-82)] имеются высшие гармоники. Так, при $\omega_1 = \omega_p$ (когда $k = 2$) для возбуждения (накачки) используется вторая гармоника, при $2\omega_1 = 3\omega_p$ (когда $k = 3$) — третья гармоника и т. д. С увеличением номера гармоники удельный вес ее падает (уменьшается величина парциального коэффициента вариации, соответствующего данной гармонике). Поэтому чем выше номер используемой гармоники, тем больше критическое значение n, тем труднее возбудить колебания.

Для $k = 2$ критическое значение

$$n''_{кр} = \sqrt{\frac{2}{Q}},$$

а для третьей области неустойчивости ($k = 3$)

$$n'''_{кр} = \frac{1{,}84}{\sqrt[3]{Q}}.$$

в) Одноконтурный параметрический усилитель

Простейшая схема параметрического усилителя содержит колебательный контур, один из элементов которого, например, емкость, варьируется во времени так, что в контур вносится отрицательное сопротивление, частично компенсирующее сопротивление потерь.

В качестве параметрического элемента обычно используется нелинейная емкость (например, *p-n* переход полупроводникового диода), подобно тому, как в схеме частотной модуляции (см. рис. 16-21).

Один из возможных вариантов схемы одноконтурного усилителя показан на рис. 16-29, *а*.

Нелинейная емкость находится под одновременным воздействием рабочего напряжения (сигнала), имеющего частоту $\omega_с$, и варьирующего напряжения, создаваемого специальным генератором накачки, частота колебаний которого $\omega_н$. Постоянное напряжение смещения U_{0i} позволяет установить исходную рабочую точку на кривой $C_d = f(U_0)$ (рис. 16-29, *б*); при этом емкость равна C_{d0}. Под действием напряжения накачки емкость изменяется в ту и другую сто-

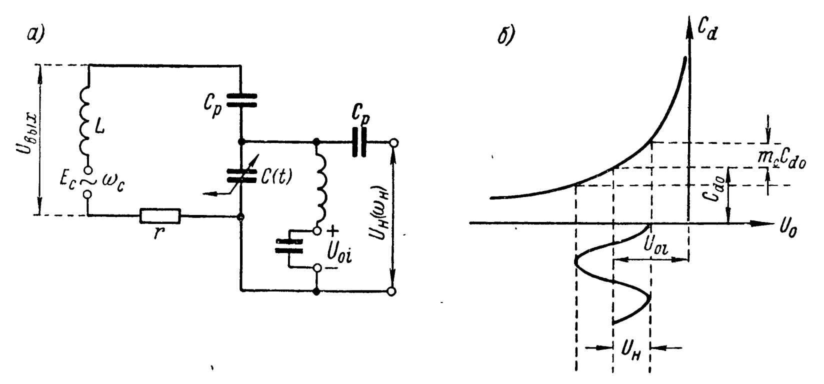


Рис. 16-29. Одноконтурный параметрический усилитель.

рону на максимальную величину $m_C C_{d0}$. Частота сигнала совпадает с резонансной частотой контура, соответствующей исходной емкости, т. е.

$$\omega_с = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_{d0}}}.$$

В случае малых сигналов, когда рабочее напряжение много меньше варьирующего ($U_с \ll U_н$), нелинейная емкость может, как известно, рассматриваться как линейная, но изменяющаяся во времени.

Для приближенного расчета коэффициента усиления напряжения будем исходить из допущения, что ток контура имеет гармоническую форму и частоту $\omega_с$. Тогда коэффициент усиления $K = \frac{U_{вых}}{E_с}$ следует считать равным эквивалентной добротности контура [см. (16-75)]:

$$K = Q_э = \frac{\rho}{r - r_n}.$$

Если $\omega_н = 2\omega_с$ и $\alpha = 0$, коэффициент усиления достигает максимального значения

$$K_{макс} = \frac{Q}{1 - 0{,}5 m_C Q}, \qquad (16\text{-}84)$$

где Q — собственная добротность контура.

Как видно, $K_{\text{макс}}$ при заданной добротности Q растет с возрастанием коэффициента вариации емкости m_C. Последний же зависит от смещения U_{0i}, определяющего величину исходной емкости C_{d0} и амплитуды напряжения накачки $U_{\text{н}}$; с ней связана величина наибольшего отклонения емкости от ее среднего значения.

На рис. 16-30, *а* показан примерный вид зависимости коэффициента усиления от амплитуды напряжения накачки $U_{\text{н}}$ при $U_{0i} = \text{const}$. Когда $U_{\text{н}} = 0$ (т. е. $m_C = 0$), коэффициент усиления равен Q, а затем с возрастанием $U_{\text{н}}$ увеличивается. Значение $U_{\text{н}} = U_{\text{н.кр}}$ соответствует критической величине коэффициента вариации $m_{C\text{кр}}$, при котором наступает равенство r и r_n и в схеме возникает самовозбуждение.

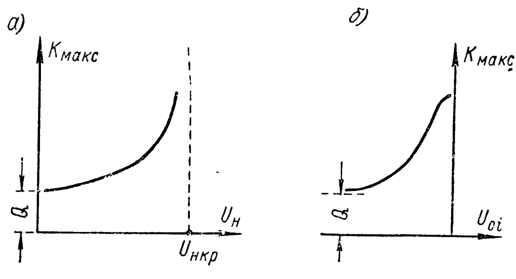


Рис. 16-30. Зависимость $K_{\text{макс}}$ от $U_{\text{н}}$ и от U_{0i}.

Если поддерживать неизменным напряжение накачки, а изменять смещение, то график зависимости $K_{\text{макс}} = f(U_0)$ будет иметь вид рис. 16-30, *б*. При больших по абсолютной величине отрицательных смещениях кривая $C_d = f(U_0)$ — рис. 16-29, *б* — весьма полога и коэффициент вариации мал, а значит, усиление стремится к величине Q.

Обе кривые рис. 16-30 соответствуют, как сказано выше, весьма малой величине сигнала $U_{\text{с}}$.

При значительных величинах $U_{\text{с}}$ начинают существенно сказываться нелинейные свойства емкости. Если принимать во внимание только колебания основной частоты $\omega_{\text{с}}$, при расчете вносимого отрицательного сопротивления следует оперировать не с дифференциальной C_d, а со средней емкостью $C_{\text{ср}}$.

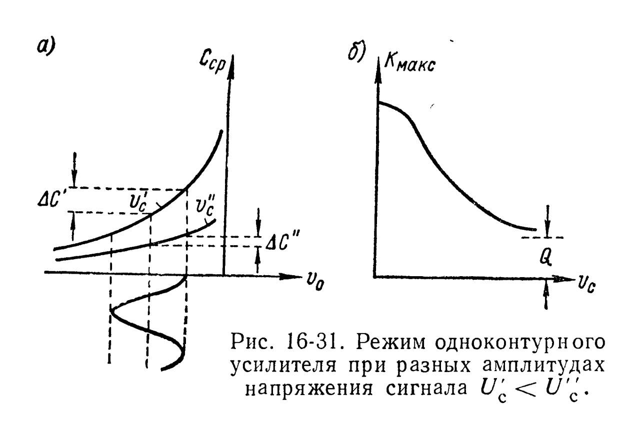


Рис. 16-31. Режим одноконтурного усилителя при разных амплитудах напряжения сигнала $U'_{\text{с}} < U''_{\text{с}}$.

При больших сигналах средняя емкость существенно зависит от амплитуды напряжения $U_{\text{с}}$. Кривые зависимости $C_{\text{ср}} = f(U_0)$ при различных $U_{\text{с}}$ изображены на рис. 16-31, *а*.

С увеличением $U_{\text{с}}$ средняя емкость (при заданном смещении) уменьшается, кривая $C_{\text{ср}} = f(U_0)$ смещается вниз и становится более пологой.

Нетрудно видеть, что при заданной амплитуде накачки вариация емкости при малом сигнале получается большей, чем при большом сигнале. Отсюда

вытекает, что и коэффициент усиления $K_{\text{макс}}$ существенно зависит от силы сигнала. Для слабых сигналов усиление весьма велико, для сильных сигналов коэффициент усиления резко падает. В этом отношении параметрический усилитель аналогичен ламповому регенератору (§ 15-15).

Зависимость $K_{\text{макс}} = f(U_c)$ при неизменных напряжениях смещения U_0 и накачки $U_н$ представлена на рис. 16-31, *б*.

Осуществить режим накачки, который был бы синхронным ($\omega_н = 2\omega_c$) и синфазным ($\alpha = 0$), практически невозможно. Приходится работать в режиме асинхронной накачки, когда частота $\omega_н$ несколько отличается от удвоенной частоты сигнала: $\omega_н = 2\omega_c + \Omega$.

Если бы ток контура был гармоническим и имел частоту ω_c, вносимое отрицательное сопротивление изменялось бы периодически с частотой Ω в соответствии с (16-48) и (16-51):

$$r'_{n\Omega} = 0{,}5\, m_C\, \rho \frac{\sin \pi \frac{\Omega}{\omega_c}}{\pi \frac{\Omega}{\omega_c}} \cos\left[\pi \frac{\Omega}{\omega_c} + \alpha(t)\right]. \qquad (16\text{-}85)$$

Если это значение $r'_{n\Omega}$ подставить в формулу для эквивалентной добротности $Q_э$, то окажется, что коэффициент усиления также является периодической функцией времени:

$$K = \frac{Q}{1 - 0{,}5\, m_C Q \frac{\sin \pi \frac{\Omega}{\omega_c}}{\pi \frac{\Omega}{\omega_c}} \cos \xi}, \qquad (16\text{-}86)$$

где

$$\xi = \frac{\pi\Omega}{\omega_c} + \alpha(t).$$

Рассчитав среднее за период $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ значение коэффициента усиления, найдем

$$K_{ср} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{Q\, d\xi}{1 - 0{,}5 m_C Q \frac{\sin \pi \frac{\Omega}{\omega_c}}{\pi \frac{\Omega}{\omega_c}} \cos \xi} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \left[0{,}5 m_C Q \frac{\sin \pi \frac{\Omega}{\omega_c}}{\pi \frac{\Omega}{\omega_c}}\right]^2}}. \qquad (16\text{-}87)$$

Рис. 16-32 иллюстрирует зависимость $K = f(\xi)$. На этом графике отмечены максимальное K_1, минимальное K_2 и среднее $K_{ср}$ значения коэффициента уси-

ления, а также величина коэффициента усиления (добротности) нерегенерированного контура.

В соответствии с периодическим изменением коэффициента усиления амплитуда выходного сигнала также изменяется с частотой Ω (рис. 16-33).

Приведенный приближенный расчет базируется на предположении, что ток контура имеет гармоническую форму и изменяется с частотой ω_c, совпадающей с резонансной частотой контура ω_0.

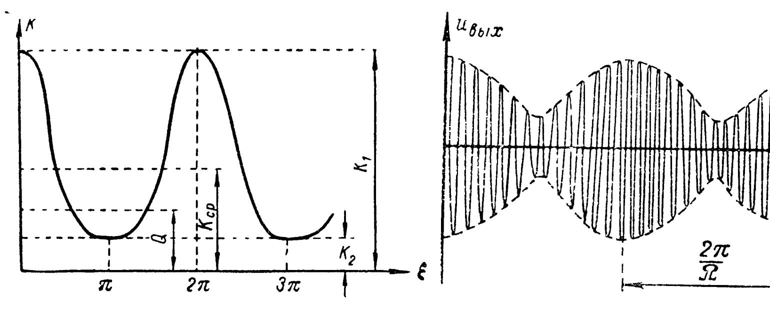


Рис. 16-32. Зависимость $K = f(\xi)$.

Рис. 16-33. Выходное напряжение усилителя в функции времени.

В действительности колебания из-за наличия в контуре емкости, варьируемой с частотой $\omega_н$, будут содержать множество составляющих с частотами $m\omega_c \pm n\omega_н$, где m и n — любые целые положительные числа, включая нуль.

Наиболее важными являются слагающие следующих четырех частот: сигнала $\omega_c = 2\pi f_c$, накачки $\omega_н = 2\pi f_н$ и комбинационных частот: разностной $\omega_- = \omega_н - \omega_c = 2\pi(f_н - f_c)$ и суммарной $\omega_+ = \omega_н + \omega_c = 2\pi(f_н + f_c)$.

Для большей наглядности на рис. 16-34 изображена шкала частот с отмеченными на ней значениями: $\omega_н$; ω_c; $\omega_- = \omega_н - \omega_c$; $\omega_+ = \omega_н + \omega_c$. Здесь показан случай асинхронной накачки $\left(\omega_c < \frac{\omega_н}{2}\right)$.

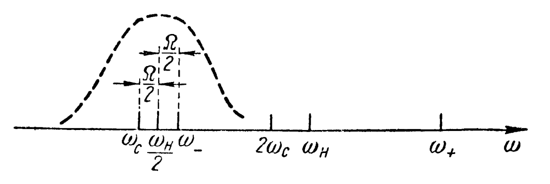


Рис. 16-34. Спектр колебаний в одноконтурном усилителе.

Считая, что контур настроен на частоту $\omega_0 = \frac{\omega_н}{2}$ (его частотная характеристика на рисунке показана в виде пунктирной кривой), приходим к выводу, что колебания частот $\omega_н$ и ω_+ подавляются. Пропускаются контуром колебания двух частот: сигнала ω_c и разностной частоты ω_-, расположенных симметрично (на расстоянии $\Omega/2$) относительно $\omega_0 = \frac{\omega_н}{2}$. Складываясь, они образуют биения,

огибающая которых изменяется с частотой $\omega_- - \omega_c = \Omega$. Этот результат совпадает с полученным выше (см. рис. 16-33).

Если бы ток имел гармоническую форму, то, как было показано в § 16-3, режим асинхронной накачки не давал бы никакого энергетического выигрыша. Однако в одноконтурном усилителе благодаря наличию двух колебаний разных частот ω_c и ω_- дело обстоит иначе. Имеющие здесь место энергетические соотношения могут быть установлены на основе теоремы Мэнли и Роу (§ 14-11, п. «б»).

Явления в изучаемой системе принципиально не отличаются от преобразования «вниз», рассмотренного в § 14-11, п. «б». Только теперь выходным (полезным) является напряжение, изменяющееся с частотой сигнала f_c, а не с разностной частотой f_- (рис. 16-35).

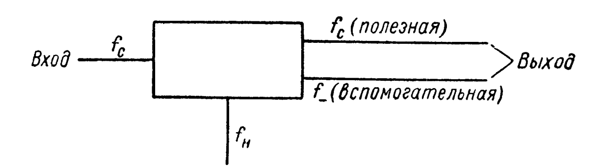


Рис. 16-35. Блок-схема одноконтурного усилителя.

В соответствии с (14-234) и (14-235) и учитывая, что в нашем случае $P_г = P_н$; $f_г = f_н$, получим

$$\frac{P_н}{f_н} + \frac{P_-}{f_-} = 0; \qquad (16\text{-}88)$$

$$\frac{P_c}{f_c} - \frac{P_-}{f_-} = 0. \qquad (16\text{-}89)$$

Здесь P_c; $P_н$; P_- — мощности колебаний, имеющих частоты f_c, $f_н$ и f_- соответственно.

Из этих уравнений следует, что

$$P_н = -\frac{f_н}{f_-} P_-; \qquad (16\text{-}90)$$

$$P_c = \frac{f_c}{f_-} P_-. \qquad (16\text{-}91)$$

Разностная частота, которую называют **вспомогательной**, лежит в полосе пропускания контура. Поэтому мощность колебаний этой частоты поглощается (расходуется). Значит, $P_- < 0$.

Как отмечалось в § 14-11, п. «б», в этих условиях энергия гетеродина (накачки) преобразуется в энергию как вспомогательной частоты, так и частоты сигнала.

Действительно, из (16-91) следует, что при $P_- < 0$ мощность P_c отрицательна: $P_c < 0$.

Мощность колебаний на частоте сигнала слагается из мощности, расходуемой в нагрузке (отрицательной), и мощности, отдаваемой

источником сигнала (положительной). Однако первая за счет энергии источника накачки оказывается большей.

Что касается мощности накачки, то, как видно из (16-90), она положительна: $P_н > 0$, т. е. источник накачки отдает энергию в цепь.

Итак, в режиме асинхронной накачки, *если только создана поглощающая цепь для колебаний вспомогательной частоты,* получается энергетический выигрыш. Независимо от фазовых соотношений колебаний сигнала и накачки, энергия источника, производящего вариацию емкости, преобразуется в энергию колебаний сигнала и колебаний вспомогательной частоты.

Интересно теперь вернуться к режиму синхронной накачки ($f_н = 2f_c$) и рассмотреть его с точки зрения общих энергетических соотношений.

Так как в этом режиме $f_н - f_c = f_c$, т. е. вспомогательная частота численно совпадает с частотой сигнала, то вместо (16-91) получим

$$P_c = P_-.$$

Полная мощность $P_{c\Sigma}$, колебаний, имеющих частоту f_c, слагается из суммы P_c и P_-:

$$P_{c\Sigma} = P_c + P_- = 2P_-.$$

Формула (16-90) в рассматриваемом случае дает

$$P_н = -2P_- = -P_{c\Sigma}. \qquad (16\text{-}92)$$

В режиме синхронной накачки нельзя утверждать, что для вспомогательной частоты, которая совпадает с частотой сигнала f_c, цепь обязательно поглощает энергию, так как в системе действует генератор частоты f_c. Поэтому здесь может иметь место один из двух случаев.

1. Если $P_{c\Sigma} < 0$ (энергия колебаний на частоте сигнала расходуется в цепи), то $P_н > 0$, т. е. источник накачки отдает энергию в цепь. Этот случай, по-видимому, соответствует благоприятному фазированию, когда начальный сдвиг фаз сигнала и накачки α удовлетворяет неравенству: $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. При этом рассматриваемая цепь потенциально неустойчива (см. § 14-11, п. «б»). Действительно, поскольку $P_{c\Sigma} < 0$, система может не содержать источника, работающего на частоте f_c. В принципе она способна выполнять роль генератора, создающего (за счет энергии источника накачки) колебания частоты f_c. Такой режим представляет собой не что иное, как процесс параметрической генерации.

2. Другой случай соответствует режиму, при котором $P_{c\Sigma} > 0$ (источник сигнала отдает энергию в систему), а $P_н < 0$ (источник накачки потребляет энергию). Нетрудно понять, что этот режим получается при неблагоприятном фазировании, когда $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Эти рассуждения лишний раз подтверждают, что в режиме синхронной накачки, в отличие от асинхронного режима, для усиления принципиально необходимы благоприятные фазовые соотношения между колебаниями сигнала и источника накачки.

г) Двухконтурный параметрический усилитель

Анализ параметрического усиления свидетельствует о том, что в режиме синхронной накачки ($f_н = 2f_с$) необходимо осуществление благоприятных фазовых соотношений между напряжениями сигнала и накачки, что практически оказывается затруднительным.

Режим асинхронной накачки свободен от этого недостатка. Однако при этом необходимо, чтобы для колебаний вспомогательной

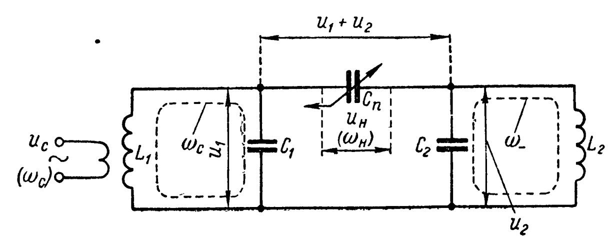


Рис. 16-36. Двухконтурный параметрический усилитель.

частоты имелась пассивная цепь, в которой расходовалась бы мощность P_-. Как мы видели, в одноконтурном усилителе это требование осуществляется путем выбора достаточно широкой полосы пропускания контура, что, разумеется, нежелательно, так как приводит к ухудшению избирательных свойств системы и повышению уровня шумов.

В двухконтурном параметрическом усилителе, схема которого изображена на рис. 16-36, один из контуров настроен на частоту сигнала $\omega_с$, а второй — на вспомогательную частоту $\omega_- = \omega_н - \omega_с$. Напряжение от генератора накачки подводится к нелинейной емкости $C_п$, которая является элементом связи между контурами.

Процессы в двухконтурном усилителе иллюстрирует рис. 16-37. Здесь показаны временные диаграммы напряжений: на сигнальном контуре u_1 (частоты $\omega_с$) и на вспомогательном контуре u_2 (частоты ω_-). Амплитуды этих напряжений приняты равными между собой.

На емкости $C_п$ действует суммарное напряжение $u_1 + u_2$, временнáя диаграмма которого также показана на рис. 16-37. Она представляет собой биения колебаний, имеющих частоты $\omega_с$ и $\omega_- = \omega_н - \omega_с$. Частота заполнения, т. е. та частота, с которой изменяется рабочее напряжение на емкости $C_п$, согласно (14-181) равна полусумме частот складываемых колебаний, т. е.

$$\omega_з = \frac{\omega_с + \omega_-}{2} = \frac{\omega_н}{2}.$$

С другой стороны, под действием напряжения источника накачки величина емкости варьируется с частотой $\omega_н$, вдвое большей частоты ω_3 колебаний суммарного напряжения $u_1 + u_2$ на емкости.

Таким образом, хотя $\omega_н \neq 2\omega_с$ и в отношении частоты сигнала параметр изменяется асинхронно, но по отношению к частоте рабочего напряжения на емкости ω_3 имеет место режим синхронной накачки.

На рис. 16-37 показана кривая $C_n(t)$. Для большей наглядности принято, что емкость изменяется по прямоугольному закону. Она уменьшается в те моменты, когда напряжение $u_1 + u_2$ проходит через максимальные значения, и увеличивается в моменты прохождения $u_1 + u_2$ через нуль.

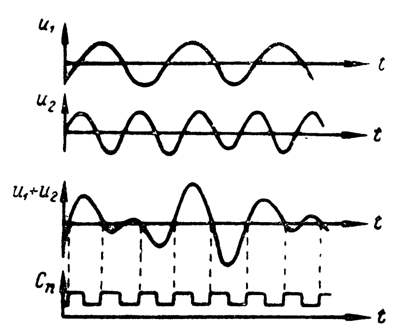


Рис. 16-37. Процессы в двухконтурном параметрическом усилителе.

Что касается фазовых соотношений, то они здесь автоматически устанавливаются благоприятными. Об этом говорят общие энергетические соотношения, описываемые уравнениями (16-90) и (16-91). В рассматриваемой схеме для колебаний разностной частоты $\omega_- = \omega_н - \omega_с$ создана специальная цепь — вспомогательный контур L_2C_2, в котором расходуется мощность P_-. Так как $P_- < 0$, мощность сигнала также отдается в цепь ($P_с < 0$) за счет мощности $P_н$, которая, как видно из (16-90), имеет противоположный знак ($P_н > 0$), т. е. генератор накачки отдает энергию в систему.

В заключение надо отметить, что параметрические усилители имеют существенное преимущество перед усилителями, содержащими электронные лампы или транзисторы. Благодаря отсутствию электронных ламп параметрические усилители обладают значительно более низким уровнем шумов. Это их достоинство оказывается особенно важным в диапазоне сверхвысоких частот, где они находят широкое применение.

16-7. Преобразование частотных спектров в параметрических цепях

а) Гетеродинирование в параметрической цепи

Гетеродинированием в § 14-9 было названо такое преобразование сигнала, при котором его спектр смещается вдоль оси частот без изменения вида спектральной функции. Если речь идет об амплитудно-модулированном сигнале, то несущая частота его $\omega_с$ в результате гетеродинирования изменяется или до величины $\omega_с - \omega_г$ в слу-

чае переноса спектра в область более низких частот или до значения $\omega_c + \omega_г$, если требуется произвести перенос спектра в область более высоких частот.

Гетеродинирование можно осуществить не только в нелинейной (см. § 14-9), но и в параметрической цепи. Действительно, представим себе цепь (рис. 16-38), питаемую генератором сигнала с напряжением $u_c = U_c \cos \omega_c t$, проводимость (крутизна S) которой меняется с частотой $\omega_г$, т. е.

$$S(t) = S_0 + S_1 \cos \omega_г t.$$

Рис. 16-38. Цепь с параметрической проводимостью (крутизной).

Согласно (16-9) ток в этой цепи будет

$$i = S_0 U_c \cos \omega_c t + \frac{1}{2} S_1 U_c \cos[\omega_г - \omega_c] t + \frac{1}{2} S_1 U_c \cos[\omega_г + \omega_c] t.$$

Он содержит слагающие частот: ω_c, $\omega_г - \omega_c$ и $\omega_г + \omega_c$.

Выделив колебания разностной (или суммарной) частоты, осуществим желаемое преобразование частоты сигнала.

Как и в ряде других, рассмотренных в этой главе, схем, в качестве элемента с переменной во времени крутизной наиболее целесообразно использовать нелинейный элемент с соответствующим видом нелинейности.

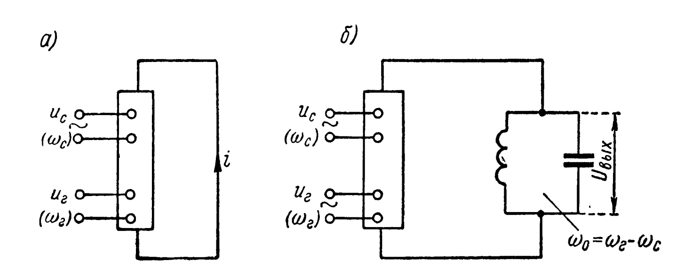


Рис. 16-39. Гетеродинирование в цепи с управляемым нелинейным элементом.

Пусть имеется управляемый нелинейный элемент (рис. 16-39, *а*), ток через который является функцией двух напряжений: сигнала и гетеродина: $i = f(u_c;\ u_г)$.

Сперва предположим, что сигнал отсутствует ($u_c = 0$), а напряжение гетеродина $u_г = U_г \cos \omega_г t$. Тогда ток в цепи будет

$$i_0 = f(0;\ u_г) = I_0 + I_1 \cos \omega_г t + I_2 \cos 2\omega_г t + \ldots \qquad (16\text{-}93)$$

Теперь допустим, что к цепи подведено также и напряжение сигнала u_c, причем $u_c \ll u_г$.

В § 16-1 было показано, что если рабочее (в данном случае сигнальное) напряжение, воздействующее на нелинейный элемент, достаточно мало, то рассматриваемая цепь может трактоваться в отношении рабочего напряжения как линейная параметрическая.

Если это так, то приращение тока, вызванное наличием напряжения сигнала, в соответствии с (16-6) будет

$$\Delta i = S(t)\, u_с = S(t)\, U_с \cos \omega_с t. \qquad (16\text{-}94)$$

Здесь $S(t)$ — крутизна, изменяющаяся во времени под воздействием варьирующего напряжения гетеродина $u_г = U_{г0} + U_г \cos \omega_г t$

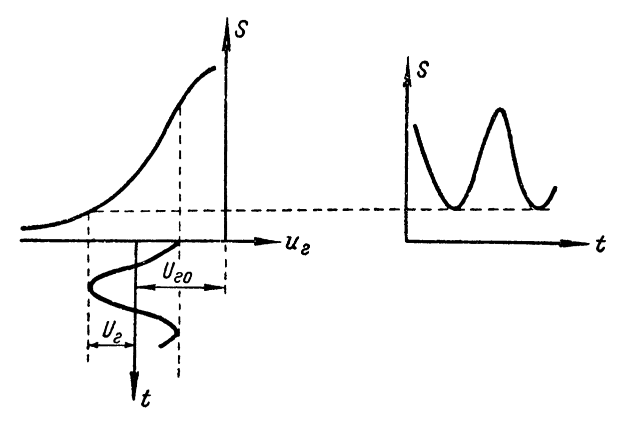


Рис. 16-40. Зависимость крутизны от времени.

(рис. 16-40). Функция $S(t)$ периодическая и поэтому может быть представлена в виде ряда Фурье

$$S(t) = S_0 + S_1 \cos \omega_г t + S_2 \cos 2\omega_г t + \ldots \qquad (16\text{-}95)$$

Если зависимость $S = f(u_г)$ — прямая линия, функция $S(t)$ высших гармонических составляющих не содержит:

$$S(t) = S_0 + S_1 \cos \omega_г t. \qquad (16\text{-}96)$$

Имея в виду (16-93), (16-94) и (16-95), найдем, что при совместном воздействии напряжений $u_с$ и $u_г$ ток в цепи

$$i = i_0 + \Delta i = I_0 + I_1 \cos \omega_г t + I_2 \cos 2\omega_г t + \ldots +$$
$$+ (S_0 + S_1 \cos \omega_г t + S_2 \cos 2\omega_г t + \ldots)\, U_с \cos \omega_с t$$

или

$$i = I_0 + I_1 \cos \omega_г t + I_2 \cos 2\omega_г t + \ldots +$$
$$+ S_0 U_с \cos \omega_с t + \frac{1}{2} S_1 U_с \cos (\omega_г - \omega_с)\, t + \frac{1}{2} S_1 U_с \cos (\omega_г +$$
$$+ \omega_с) t + \frac{1}{2} S_2 U_с \cos (2\omega_г - \omega_с)\, t + \frac{1}{2} S_2 U_с \cos (2\omega_г +$$
$$+ \omega_с)\, t + \ldots \qquad (16\text{-}97)$$

Итак, в результате параметрического преобразования ток содержит, в частности, слагающую разностной частоты

$$i_{-} = \frac{1}{2} S_1 U_{\text{с}} \cos(\omega_{\text{г}} - \omega_{\text{с}}) t.$$

Если ставится задача выделения этой составляющей, в цепь включают колебательный контур, настроенный на частоту $\omega_{\text{г}} - \omega_{\text{с}}$ (рис. 16-39, *б*). Амплитуда напряжения на контуре будет

$$U_{\text{вых}} = \frac{1}{2} S_1 U_{\text{с}} R_{\text{э}}, \tag{16-98}$$

где $R_{\text{э}}$ — эквивалентное резонансное сопротивление контура.

Формула (16-98), справедливая для слабых сигналов, показывает, что выходное напряжение преобразователя пропорционально амплитуде сигнала. Значит, если $U_{\text{с}}$ изменяется во времени по закону управляющего сигнала, то и огибающая выходного сигнала изменяется по этому же закону. Иными словами, форма спектральной функции сигнала в результате смещения спектра остается неизменной.

Что касается S_1 (амплитуды первой гармоники закона изменения крутизны во времени), то, как видно из рис. 16-40, она возрастает с увеличением напряжения $U_{\text{г}}$. Поэтому выгодно работать с большими напряжениями, подводимыми от гетеродина.

Описанный метод преобразования частотного спектра широко применяется в супергетеродинных приемниках. Здесь в качестве параметрического элемента используются специальные многосеточные (смесительные) лампы. К сигнальной сетке лампы подводится напряжение $U_{\text{с}}$, а к гетеродинной — напряжение гетеродина $U_{\text{г}}$.

б) Деление частоты в параметрических цепях

Наряду с умножением частоты (см. § 14-6 и 14-11, п. «в») в радиотехнике иногда возникает необходимость уменьшения частоты колебаний в определенное (k) число раз.

Задача деления частоты может быть решена при помощи параметрических систем.

Рассмотрим цепь, содержащую, кроме источника гармонического воздействия частоты ω, параметрический элемент, проводимость которого изменяется во времени с частотой $\omega_p = \frac{\omega}{2}$. (рис. 16-41).

Согласно (16-9) в цепи возникают комбинационные колебания, имеющие частоты: $\omega + \omega_p = \frac{3}{2}\omega$ и $\omega - \omega_p = \frac{1}{2}\omega$. Второе из этих колебаний выделяется фильтром Φ (в простейшем виде — колебательным контуром, настроенным на частоту $\omega_p = \frac{1}{2}\omega$).

Для управления проводимостью параметрического элемента можно использовать часть напряжения на фильтре Φ, осуществив

обратную связь, показанную на рис. 16-41. В результате в системе могут поддерживаться колебания, имеющие частоту, вдвое меньшую частоты источника воздействия ($k = 2$).

Как видно, делитель частоты можно рассматривать как автоколебательную систему, в которой возбуждаются колебания с частотой $\omega_p = \frac{1}{2}\omega$.

Роль переменной во времени проводимости, как было пояснено в предыдущих параграфах этой главы, может играть электронная лампа, к сетке которой подводится управляющее напряжение с частотой $\omega_p = \frac{1}{2}\omega$.

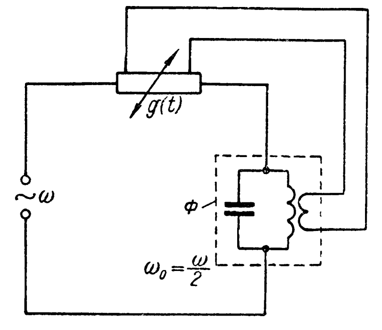


Рис. 16-41. Делитель частоты с параметрической проводимостью.

Для самовозбуждения на частоте ω_p требуется выполнение определенных условий, сводящихся, как и во всякой автоколебательной системе, к необходимости выполнения правил амплитуд и фаз.

Схема, приведенная на рис. 16-41, может не только выполнять функции делителя, уменьшающего вдвое частоту источника. Она способна (при выполнении соответствующих условий) самовозбуждаться на резонансной частоте контура как обычный ламповый генератор. Тогда частота колебаний уже не зависит от частоты напряжения на входе. Это свойство схемы является ее существенным недостатком.

Рассмотрим подробнее более совершенный д е л и т е л ь ч а с т о т ы с у с и л и т е л е м м о щ н о с т и, называемый иногда р е г е н е р а т и в н ы м д е л и т е л е м. Его блок-схема по-

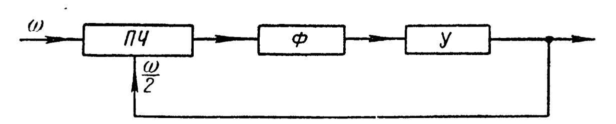


Рис. 16-42. Блок-схема делителя частоты с усилителем мощности.

казана на рис. 16-42. Она содержит гетеродинный преобразователь частоты *ПЧ*, который может быть построен по тому или иному принципу (см. § 14-10 и 16-7, п. «а»). Если к преобразователю подведены колебания частот ω и $\omega/2$, на выходе его в числе комбинационных будет и разностная частота $\omega - \frac{\omega}{2} = \frac{\omega}{2}$. Колебания этой частоты усиливаются усилителем *У* и через цепь обратной связи подводятся к преобразователю. Таким образом, мы опять приходим к системе

с обратной связью, в которой могут поддерживаться колебания с частотой $\omega/2$.

Один из вариантов осуществления регенеративного делителя показан на рис. 16-43. Роль фильтра здесь выполняет колебательный контур, включенный в анодную цепь усилительной лампы и настроенный на частоту $\omega/2$, т. е.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} = \frac{\omega}{2}.$$

Анодный ток лампы

$$i_a = i_R + i_C + i_L$$

или

$$Su_g = \frac{u_a}{R} + C_0 \frac{du_a}{dt} + \frac{1}{L} \int u_a \, dt. \qquad (16\text{-}99)$$

Напряжение на сетке является выходным напряжением преобразователя. Оно пропорционально произведению входных напряжений

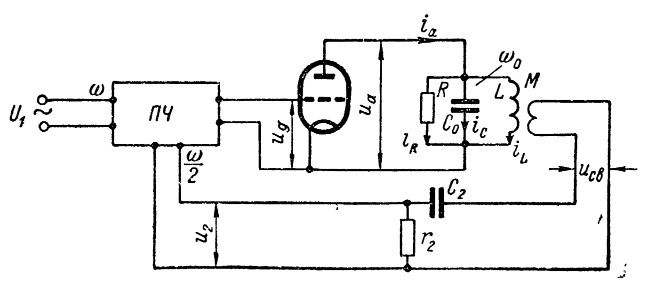


Рис. 16-43. Схема регенеративного делителя частоты.

u_1 и u_2, воздействующих на преобразователь: $u_g = Au_1u_2$. [Ср., например, с (16-98), где S_1 пропорционально напряжению гетеродина.]

Напряжение $u_1 = U_1 \sin \omega t$ подводится извне. Что касается напряжения u_2, то оно снимается с сопротивления r_2, включенного последовательно с C_2 в цепь напряжения обратной связи, равного

$$u_{св} = \frac{M}{L} u_a = \beta u_a.$$

Если постоянная времени $\tau_2 = Cr_2$ очень мала (по сравнению с периодом колебания частоты $\omega/2$), то

$$u_2 = \tau_2 \frac{du_{св}}{dt}.$$

Тогда

$$u_g = A\tau_2 \frac{M}{L} u_1 \frac{du_a}{dt} = nu_1 \frac{du_a}{dt},$$

где $n = A\tau_2\beta$.

Подставив значение u_g в (16-99), найдем

$$\frac{u_a}{R} + (C_0 - nSu_1)\frac{du_a}{dt} + \frac{1}{L}\int u_a\,dt = 0.$$

Это уравнение описывает явления в контуре, содержащем изменяющуюся во времени емкость

$$C(t) = C_0 - nSU_1 \sin\omega t = C_0(1 - m_C \sin\omega t),$$

где $m_C = \frac{nSU_1}{C_0}$ — коэффициент вариации емкости.

Как известно, в таком контуре возможно самовозбуждение колебаний на частоте $\omega/2$, если выполнено условие $m_C > \frac{2}{Q}$, где Q — добротность контура.

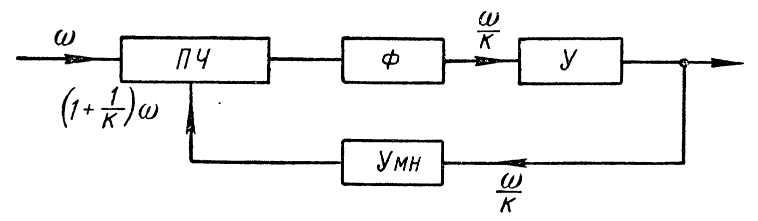


Рис. 16-44. Блок-схема делителя частоты в k раз.

Таким образом, условие возможности деления частоты в два раза в нашей схеме сводится к необходимости выполнения неравенства $\frac{nSU_1}{C_0} > \frac{2}{Q}$ или, подставив вместо n его значение, получим

$$U_1 > \frac{2}{AQ\omega_0^2\tau_2 MS}. \qquad (16\text{-}100)$$

Согласно этому неравенству делитель может при прочих равных условиях работать лишь в том случае, если входное напряжение имеет достаточно большую амплитуду.

Условию (16-100) можно придать и несколько иной вид. Приняв во внимание, что коэффициент усиления усилителя

$$K = SQ\rho = SQ\omega_0 L,$$

после несложных преобразований вместо (16-100) получим

$$K\beta > \frac{2}{AU_1\omega_0\tau_2}. \qquad (16\text{-}101)$$

Отсюда следует, что при заданном напряжении на входе делителя произведение коэффициента усиления K и коэффициента передачи цепи обратной связи $\beta = \frac{M}{L}$ должно превосходить некоторую определенную (критическую) величину, зависящую от параметров преобразователя частоты и цепи обратной связи.

Возможно деление частоты и в число раз, большее двух ($k > 2$). Один из методов решения этой задачи заключается в следующем. К преобразователю частоты (рис. 16-44) подведены колебания ω и $\left(1+\frac{1}{k}\right)\omega$. Тогда разностная частота

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)\omega - \omega = \frac{\omega}{k}.$$

Колебания этой, поделенной в k раз, частоты выделяются фильтром *Ф* и после усиления поступают на выход системы. Для того чтобы колебания поддерживались автоматически, в цепь обратной связи введен умножитель частоты *Умн*, который должен повышать частоту в $\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)\omega}{\frac{\omega}{k}} = 1 + k$ раз.

Например, для деления частоты в три раза, цепь обратной связи должна содержать умножитель, увеличивающий частоту в $1 + k = 4$ раза.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы рассмотрели различные вопросы теории электрических (радиотехнических) цепей, начиная от элементарных соотношений теории постоянного тока и кончая более сложными законами нелинейных и параметрических систем.

Основное содержание книги составляет решение так называемых прямых задач теории цепей, заключающихся в определении откликов цепей по известным воздействиям. Коротко говоря, книга посвящается анализу радиотехнических цепей.

Между тем, не меньший интерес представляет и задача синтеза цепи по заданным характеристикам (обратная задача теории цепей). Например, на практике нередко приходится осуществлять синтез линейной системы по заданным частотным характеристикам и т. п.

Осуществление синтеза цепи, которая обладала бы нужными конструктору свойствами, в большинстве случаев оказывается более сложным, нежели изучение свойств заданной электрической системы.

При рассмотрении вопросов синтеза прежде всего следует иметь в виду, что не всякая частотная или какая-либо другая характеристика цепи может быть реализована в действительности. Вполне возможно, что цепь с заданными свойствами вообще физически не осуществима. В качестве примера можно еще раз сослаться на идеальный фильтр нижних частот, который в заданной полосе должен иметь равномерную частотную и линейную фазовую характеристики. Подобная система, как было отмечено в § 13-2, никогда не может быть реализована в действительности, и, следовательно, ставить задачу о ее синтезе бессмысленно. Можно лишь говорить о построении цепи, свойства которой в требуемой полосе частот лишь приближаются в определенной степени к свойствам идеального фильтра.

Таким образом, при синтезе электрической цепи по заданным характеристикам сначала необходимо выяснить, являются ли эти характеристики физически осуществимыми, и только затем приступить к собственно ее синтезу.

В тех случаях, когда речь идет о построении цепи с требуемыми частотными свойствами, в качестве критерия физической осуществи-

мости можно использовать условие связи между вещественной и мнимой составляющими передаточной функции $K(j\omega)$ [см. равенство (9-49)].

Решение задачи синтеза цепей по заданным характеристикам основано на применении специальных разделов математики и вообще выходит за пределы программы излагаемого курса. Заинтересованный читатель может ознакомиться с некоторыми вопросами синтеза, например, в книге Г. Боде «Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью», ГИИЛ, 1948.

Изложенная выше теория цепей позволяет объяснить многие явления, протекающие в современных радиотехнических устройствах. Однако пределы применения ее, разумеется, ограничены.

Как мы уже указывали, имеются различные радиотехнические элементы, явления в которых не могут быть исследованы количественно и даже качественно с позиций этой теории. Напомним, что *радиотехническое устройство в режиме стационарных электрических колебаний можно рассматривать как цепь лишь в том случае, когда геометрические размеры его значительно меньше длины волны.* В неустановившемся режиме система (устройство) будет вести себя как цепь, если подобное соотношение выполняется для всех волн $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$, соответствующих основной (в энергетическом отношении) части спектра внешнего воздействия. Другими словами, время запаздывания электромагнитного возмущения при распространении его вдоль устройства должно быть значительно меньше периода колебаний верхней гармоники спектра на входе.

В цепи с распределенными параметрами аналогичное условие, как известно, накладывается только на размеры поперечного сечения. Продольные размеры такой системы могут быть неограниченными. Вследствие этого *в продольном направлении цепи с распределенными параметрами наблюдается волновой процесс, описываемый телеграфными уравнениями.*

Предположим, что приведенное выше условие малости геометрических размеров системы вообще не выполняется. Тогда волновые процессы, очевидно, могут возникать уже не только в продольном, но и в любых других направлениях. В этом случае уравнения теории цепей, и в частности телеграфные уравнения, не могут быть использованы для анализа электрических процессов. Электрические явления в системах с большими относительно длины волны геометрическими размерами могут быть изучены лишь на основе теории электромагнитного поля.[1]

Аналогичные соображения, конечно, применимы и к нелинейным цепям. Однако здесь приходится принимать во внимание не только

---

[1] В некоторых частных случаях телеграфные уравнения оказываются справедливыми и для цепей с распределенными параметрами, имеющими произвольные размеры поперечного сечения.

время запаздывания электромагнитных волн при распространении их вдоль цепи, но и время движения зарядов в соответствующих нелинейных элементах (электронных лампах, транзисторах и т. п.). Так, например, если в лампе размеры электродов значительно меньше длины волны, а время пролета электронов от катода к аноду много меньше периода входных колебаний, лампу можно рассматривать как *безынерционный нелинейный элемент* с известной вольт-амперной характеристикой. Если же эти условия не выполняются, для анализа процессов придется обратиться к другой теории, рассматривающей непосредственное взаимодействие электрических зарядов с полем.

В целом теорию радиотехнических цепей с учетом отмеченных выше ограничений следует рассматривать как одну из составных частей теоретических основ современной радиоэлектроники. Важность теории цепей определяется не только тем, что она весьма полно описывает процессы в широком классе радиотехнических устройств, но также и тем, что она позволяет в ряде случаев составить качественное представление о явлениях, наблюдающихся в более сложных электрических системах.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О МАТРИЦАХ И ОСНОВНЫХ ДЕЙСТВИЯХ НАД НИМИ

Коэффициенты системы линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{1\,1}x_1 + a_{1\,2}x_2, \\ y_2 &= a_{2\,1}x_1 + a_{2\,2}x_2 \end{aligned}\right\} \tag{П-1}$$

могут быть записаны в виде таблицы, называемой м а т р и ц е й,

$$\left\| a \right\| = \left\| \begin{matrix} a_{1\,1} a_{1\,2} \\ a_{2\,1} a_{2\,2} \end{matrix} \right\|.$$

Подобные матрицы называются квадратными, так как в них число элементов в строках m равно числу элементов в столбцах n: $m = n = 2$.

В общем случае может быть $m \neq n$.

Если $a_{1\,2} = 0$ и $a_{2\,2} = 0$, матрица принимает вид:

$$\left\| \begin{matrix} a_{1\,1} 0 \\ a_{2\,1} 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_{1\,1} \\ a_{2\,1} \end{matrix} \right\|.$$

Отсюда следует, что любая матрица может быть записана как квадратная, если к ней добавить нули вместо отсутствующих элементов.

Две матрицы

$$\left\| a \right\| = \left\| \begin{matrix} a_{1\,1} a_{1\,2} \\ a_{2\,1} a_{2\,2} \end{matrix} \right\| \text{ и } \left\| b \right\| = \left\| \begin{matrix} b_{1\,1} b_{1\,2} \\ b_{2\,1} b_{2\,2} \end{matrix} \right\|$$

равны между собой, если соответственно равны их элементы, т. е. $a_{1\,1} = b_{1\,1}$; $a_{1\,2} = b_{1\,2}$; $a_{2\,1} = b_{2\,1}$; $a_{2\,2} = b_{2\,2}$.

При с л о ж е н и и матриц образуется новая матрица. Ее элементы представляют собой суммы соответствующих элементов слагаемых матриц:

$$\left\| a \right\| + \left\| b \right\| = \left\| \begin{matrix} a_{1\,1} + b_{1\,1} & a_{1\,2} + b_{1\,2} \\ a_{2\,1} + b_{2\,1} & a_{2\,2} + b_{2\,2} \end{matrix} \right\|.$$

При у м н о ж е н и и матриц применяется правило «строка на столбец».

Чтобы получить первый элемент первой строки новой матрицы, образуют сумму двух произведений: 1) первого элемента первой строки первой матрицы $a_{1\,1}$ на первый элемент первой строки второй матрицы $b_{1\,1}$ и 2) второго элемента первой строки первой матрицы $a_{1\,2}$ на второй элемент первого столбца второй матрицы $b_{2\,1}$.

Аналогично составляется второй элемент первой строки, но с этой целью $a_{1\,1}$ и $a_{1\,2}$ умножают соответственно на элементы второго столбца второй матрицы $b_{1\,2}$ и $b_{2\,2}$.

Поступая подобным образом для образования элементов второй строки матрицы произведения, получим

$$\begin{Vmatrix} a \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} b \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{1\,1} a_{1\,2} \\ a_{2\,1} a_{2\,2} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} b_{1\,1} b_{1\,2} \\ b_{2\,1} b_{2\,2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{1\,1} b_{1\,1} + a_{1\,2} b_{2\,1} & a_{1\,1} b_{1\,2} + a_{1\,2} b_{2\,2} \\ a_{2\,1} b_{1\,1} + a_{2\,2} b_{2\,1} & a_{2\,1} b_{1\,2} + a_{2\,2} b_{2\,2} \end{Vmatrix}.$$

Возвращаясь к системе (П-1), составим матрицу

$$\begin{Vmatrix} x \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_1 0 \\ x_2 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix}.$$

Умножим ее на матрицу

$$\begin{Vmatrix} a \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} \end{Vmatrix}.$$

В соответствии с изложенным выше правилом получим

$$\begin{Vmatrix} a \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} x \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{1\,1} x_1 + a_{1\,2} x_2 & 0 \\ a_{2\,1} x_1 + a_{2\,2} x_2 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$\begin{Vmatrix} y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Vmatrix}.$$

Имея в виду (П-1), приходим к выводу, что правые части двух последних равенств равны между собой; следовательно,

$$\begin{Vmatrix} y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} x \end{Vmatrix} \text{ или } \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix}.$$

Это выражение представляет собой матричную форму записи исходной системы уравнений (П-1).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x
0,0	1,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000
0,1	1,1052	0,9048	0,1002	1,0050	0,0997
0,2	1,2214	0,8187	0,2013	1,0201	0,1974
0,3	1,3499	0,7408	0,3045	1,0453	0,2913
0,4	1,4918	0,6703	0,4108	1,0811	0,3799
0,5	1,6487	0,6065	0,5211	1,1276	0,4621
0,6	1,8221	0,5488	0,6367	1,1855	0,5370
0,7	2,0138	0,4966	0,7586	1,2552	0,6044
0,8	2,2255	0,4493	0,8881	1,3374	0,6640
0,9	2,4596	0,4066	1,0265	1,4331	0,7163
1,0	2,7183	0,3679	1,1752	1,5431	0,7616
1,1	3,0042	0,3329	1,3356	1,6685	0,8005
1,2	3,3201	0,3012	1,5095	1,8107	0,8337
1,3	3,6693	0,2725	1,6984	1,9709	0,8617
1,4	4,0552	0,2466	1,9043	2,1509	0,8854
1,5	4,4817	0,2231	2,1293	2,3524	0,9051

Продолжение

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x
1,6	4,9530	0,2019	2,3756	2,5775	0,9217
1,7	5,4739	0,1827	2,6456	2,8283	0,9354
1,8	6,0496	0,1653	2,9422	3,1075	0,9468
1,9	6,6859	0,1496	3,2682	3,4178	0,9562
2,0	7,3891	0,1353	3,6269	3,7622	0,9640

Примечание. При $x \ll 1$ $\operatorname{sh} x \approx x + \frac{x^3}{6}$, $\operatorname{ch} x \approx 1 + \frac{x^2}{2}$, $\operatorname{th} x \approx \approx x - \frac{x^3}{3}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ Si (x)

x	Si (x)	x	Si (x)	x	Si (x)	x	Si (x)
0,0	0,0000	2,3	1,7222	4,6	1,6325	6,9	1,4457
0,1	0,0999	2,4	1,7525	4,7	1,6110	7,0	1,4546
0,2	0,1996	2,5	1,7785	4,8	1,5900	7,1	1,4644
0,3	0,2985	2,6	1,8004	4,9	1,5696	7,2	1,4751
0,4	0,3965	2,7	1,8182	5,0	1,5499	7,3	1,4864
0,5	0,4931	2,8	1,8321	5,1	1,5313	7,4	1,4983
0,6	0,5881	2,9	1,8422	5,2	1,5137	7,5	1,5107
0,7	0,6812	3,0	1,8487	5,3	1,4973	7,6	1,5233
0,8	0,7721	3,1	1,8517	5,4	1,4823	7,7	1,5361
0,9	0,8605	3,2	1,8514	5,5	1,4687	7,8	1,5489
1,0	0,9461	3,3	1,8481	5,6	1,4567	7,9	1,5617
1,1	1,0287	3,4	1,8419	5,7	1,4462	8,0	1,5742
1,2	1,1081	3,5	1,8331	5,8	1,4374	8,1	1,5864
1,3	1,1840	3,6	1,8220	5,9	1,4302	8,2	1,5981
1,4	1,2562	3,7	1,8086	6,0	1,4247	8,3	1,6093
1,5	1,3247	3,8	1,7933	6,1	1,4209	8,4	1,6198
1,6	1,3892	3,9	1,7765	6,2	1,4187	8,5	1,6296
1,7	1,4496	4,0	1,7582	6,3	1,4182	8,6	1,6386
1,8	1,5058	4,1	1,7387	6,4	1,4192	8,7	1,6487
1,9	1,5578	4,2	1,7184	6,5	1,4218	8,8	1,6538
2,0	1,6054	4,3	1,6973	6,6	1,4258	8,9	1,6599
2,1	1,6487	4,4	1,6758	6,7	1,4312	9,0	1,6650
2,2	1,6876	4,5	1,6541	6,8	1,4388		

Примечание. $\operatorname{Si}(\pm 1{,}92) \approx \pm \frac{\pi}{2}$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атабеков Г. И., Теория линейных электрических цепей, «Советское радио», 1960.

2. Вентцель К. С., Теория вероятностей, Физматгиз, 1958.

3. Гольдштейн Л. Д., Анализ радиотехнических систем, Ленинградская военно-воздушная инженерная академия имени А. Ф. Можайского, 1959.

4. Гоноровский И. С., Основы радиотехники, Связьиздат, 1957.

5. Дробов С. А., Радиопередающие устройства, Воениздат, 1951.

6. Зевеке Г. В., Ионкин П. А., Основы электротехники, часть первая, Госэнергоиздат, 1955.

7. Ицхоки Я. С., Нелинейная радиотехника, «Советское радио». 1955.

8. Калинин В. И., Герштейн Г. М., Введение в радиофизику, Гостехиздат, 1957.

9. Карпов В. Г., Линейные радиотехнические цепи, Ленинградская военно-воздушная инженерная академия имени А. Ф. Можайского, 1952.

10. Крылов Н. Н., Теоретические основы радиотехники, «Морской транспорт», 1953.

11. Нетушил А. В., Страхов С. В., Основы электротехники, часть вторая, Госэнергоиздат, 1955.

12. Сифоров В. И., Радиоприемные устройства, Воениздат, 1951.

13. Харкевич А. А., Теоретические основы радиосвязи, Гостехиздат, 1957.

14. Харкевич А. А., Нелинейные и параметрические явления в радиотехнике, Гостехиздат, 1956.

15. Арлей Н., Бух К., Введение в теорию вероятностей и математическую статистику, Изд-во иностр. лит., 1951.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
54	3 сверху	$\frac{U_{н}^{2}}{P_{н}}$	$\frac{P_{н}}{U_{н}^{2}}$
176	Формула (4-46)	$e^{j\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}$	$e^{-j\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}$
189	13 снизу	$R_{э}=\frac{\rho^{2}}{r}$ (4-81), можно	$R_{э}=\frac{\rho^{2}}{r}$, (4-81) можно
296	Формула (5-217) (в знаменателе)	$\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)$	$\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$
328	3 и 4 сверху, 12 и 13 снизу	Вместо $\leqslant$ должно быть $<$	
330	11 и 12 сверху	То же	
435	16 сверху	$\hat{F}(j\omega)\,\hat{F}(j\omega)$	$F(j\omega)\,\hat{F}(j\omega)$
462	3 снизу	от p.	от p. $\left(\text{Исключение составляет случай, когда } \frac{r_1}{L_1}=\frac{g_1}{C_1}\right)$.
649	Формула (14-61)	$S-j\omega C_{g\,k}$	$S-j\omega C_{g\,a}$
649	7 сверху	$S\gg\omega C_{g\,k}$	$S\gg\omega C_{g\,a}$
814	7 снизу	(см. рис. 15-89)	(см. рис. 15-75)

Н. В. Зернов и В. Г. Карпов. Теория радиотехнических цепей. Заказ 1289.

Цена 2 р. 69 к.